2026年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$2800=2^4 5^2 7$ より、2800 の約数は$2^s 5^t 7^u$ $(0 \leqq s \leqq 4, 0 \leqq t \leqq 2, 0 \leqq u \leqq 1)$と表せる。

$2^s 5^t 7^u=(3-1)^s(6-1)^t(6+1)^u \equiv (-1)^s(-1)^t 1^u \pmod 3$であるから、$2^s 5^t 7^u$を 3 で割った余りが 1 であるとき$(-1)^s(-1)^t 1^u=1$、2 であるとき$(-1)^s(-1)^t 1^u=-1$ である。

$1^u=1$ であるから、$(-1)^{s+t}$について考えればよい。

$s+t$が奇数であるとき$(-1)^{s+t}=-1$ であり、$s+\mathrm{t}$ が偶数であるとき$(-1)^{s+t}=1$ である。

$s+t$が奇数になるのはsとtの奇遇が異なるときで、$3 \cdot 1+2 \cdot 2=7$ 通り。

$s+t$が偶数になるのはsとtの奇遇が同じときで、$3 \cdot 2+2 \cdot 1=8$ 通り。

$u=0,1$ の 2 通りであるから、これらの値を 2 倍して　$\therefore f(2800)=16, g(2800)=14$ ……(答)

(2)

nが素因数 3 をl個含むとき、$f(n)=f(3^{-l}n), g(n)=g(3^{-l}n)$である。

nが素因数 3 を含まないときについて考える。このとき、nの素因数は、3 で割った余りが 1 か 2 である。

nの素因数のうち、3 で割って 1 余るものを$a_1, a_2, \cdots, a_p$とし、3 で割って 2 余るものを$b_1, b_2, \cdots, b_q$とする。

$n={a_1}^{L_1}{a_2}^{L_2}\cdots{a_p}^{L_p}{b_1}^{M_1}{b_2}^{M_2}\cdots{b_q}^{M_q}$のとき、$n$の約数は${a_1}^{x_1}{a_2}^{x_2}\cdots{a_p}^{x_p}{b_1}^{y_1}{b_2}^{y_2}\cdots{b_q}^{y_q}$と表される。

ただし、$0 \leqq x_i \leqq L_i$ $(1 \leqq i \leqq p), 0 \leqq y_j \leqq M_j$ $(1 \leqq j \leqq q)$である。

$${a_1}^{x_1}{a_2}^{x_2}\cdots{a_p}^{x_p}{b_1}^{y_1}{b_2}^{y_2}\cdots{b_q}^{y_q} \equiv 1^{x_1+x_2+\cdots+x_p}\cdot(-1)^{y_1+y_2+\cdots+y_q}=(-1)^{y_1+y_2+\cdots+y_q} \pmod 3$$

nの約数は、$y_1+y_2+\cdots+y_q$が偶数であれば、3 で割った余りが 1 であり、奇数であれば、3 で割った余りが 2 である。$y_1+y_2+\cdots+y_q$が偶数となるような非負整数$y_1, y_2, \cdots, y_q$の組の数を$F(q)$とし、奇数となるような非負整数$y_1, y_2, \cdots, y_q$の組の数を$G(q)$としたき、$F(q)=G(q)+1$ または$F(q)=G(q)$であることを、qに関する数学的帰納法で示す。

$q=1$ のとき

M_1が偶数であれば　$F(1)=\dfrac{M_1}{2}+1, G(1)=\dfrac{M_1}{2}$　M_1が奇数であれば　$F(1)=G(1)=\dfrac{M_1+1}{2}$

したがって、$q=1$ のとき成立。

$q=k$のとき

$F(k)=G(k)+1$ または$F(k)=G(k)$と仮定する。

$F(k)=G(k)+1$ のとき

M_{k+1}が偶数であれば

$$F(k+1)=F(k)\left(\frac{M_{k+1}}{2}+1\right)+G(k)\cdot\frac{M_{k+1}}{2}=G(k)(M_{k+1}+1)+\frac{M_{k+1}}{2}+1$$

$$G(k+1)=F(k)\cdot\frac{M_{k+1}}{2}+G(k)\left(\frac{M_{k+1}}{2}+1\right)=G(k)(M_{k+1}+1)+\frac{M_{k+1}}{2}$$

M_{k+1}が奇数であれば

$$F(k+1)=G(k+1)=F(k)\left(\frac{M_{k+1}+1}{2}\right)+G(k)\left(\frac{M_{k+1}+1}{2}\right)=G(k)(M_k+1)+\frac{M_{k+1}+1}{2}$$

$F(k)=G(k)$のとき

　M_{k+1}が偶数であれば

$$F(k+1)=F(k)\left(\frac{M_{k+1}}{2}+1\right)+G(k)\cdot\frac{M_{k+1}}{2}=G(k)(M_{k+1}+1)$$

$$G(k+1)=F(k)\cdot\frac{M_{k+1}}{2}+G(k)\left(\frac{M_{k+1}}{2}+1\right)=G(k)(M_{k+1}+1)$$

　M_{k+1}が奇数であれば

$$F(k+1)=G(k+1)=F(k)\left(\frac{M_{k+1}+1}{2}\right)+G(k)\left(\frac{M_{k+1}+1}{2}\right)=G(k)(M_{k+1}+1)$$

$F(k+1)=G(k+1)+1$ または$F(k+1)=G(k+1)$であるから、$q=k+1$ でも成立。

以上により、$F(q)\geqq G(q)$が示された。

$f(n)=(L_1+1)(L_2+1)\cdots(L_p+1)F(q),g(n)=(L_1+1)(L_2+1)\cdots(L_p+1)G(q)$であるから

　$\therefore f(n)\geqq g(n)$　(証明終)

(3)

$g(n)=15$ のとき、(2)の検討より

　$(L_1+1)(L_2+1)=15$ または$L_1+1=15,G(q)=1$

　$L_1+1=3,G(q)=5$

　$L_1+1=5,G(q)=3$

　3 で割って 1 余る素因数を含まない場合　$G(q)=15$

$F(q)=G(q)+1$ または$F(q)=G(q)$であるから

$\therefore f(n)=15,16,18,20,30$ ⋯⋯(答)