1章　ベクトル解析

BASIC

1（1）与式 $=2(2,\ -1,\ 4)-(3,\ 2,\ 5)$

$=(4,\ -2,\ 8)-(3,\ 2,\ 5)$

$=(4-3,\ -2-2,\ 8-5)=\mathbf{(1,\ -4,\ 3)}$

（2）$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-4)^2+3^2}$

$=\sqrt{1+16+9}=\sqrt{26}$

よって，求めるベクトルは，$\pm\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{26}}}\mathbf{(1,\ -4,\ 3)}$

2　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\cdot1+3\cdot(-2)+k\cdot2=2k-2$

よって，求める正射影の大きさは

$$\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{|2k-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}$$

$$=\frac{2|k-1|}{\sqrt{9}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}|\boldsymbol{k}-\mathbf{1}|$$

また，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ となるのは，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ のときであるから，$2k-2=0$ より，$\boldsymbol{k}=\mathbf{1}$

3　$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$ であるから

与式 $=\boldsymbol{k}-(-\boldsymbol{k})=\mathbf{2}\boldsymbol{k}$

4　$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&3&1\\1&-1&4\end{vmatrix}$$

$=12\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}-(-\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$

$=13\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$

$=\mathbf{(13,\ -7,\ -5)}$

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&4\\2&3&1\end{vmatrix}$$

$=-\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}-(12\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$

$=-13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$

$=\mathbf{(-13,\ 7,\ 5)}$

これより，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ が成り立っている．

5（1）$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,\ 2,\ 5)-(2,\ 1,\ 3)$

$=(2,\ 1,\ 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 0,\ 4)-(2,\ 1,\ 3)$

$=(0,\ -1,\ 1)$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&2\\0&-1&1\end{vmatrix}$$

$=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}-(-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})$

$=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$

$=\mathbf{(3,\ -2,\ -2)}$

（2）$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{3^2+(-2)^2+(-2)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{17}$

$=\dfrac{\sqrt{\mathbf{17}}}{\mathbf{2}}$

6（1）$(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}$

$=-\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\times\mathbf{0}$

$=\mathbf{0}$

（2）$(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}$

$=\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}\times(-\boldsymbol{k})$

$=\boldsymbol{j}$

7（1）$\boldsymbol{a}'(t)=(-\sin\pi t\cdot\pi,\ \cos\pi t\cdot\pi,\ 1)$

$=\mathbf{(-\pi\sin\pi t,\ \pi\cos\pi t,\ 1)}$

$t=1$ における微分係数は

$\boldsymbol{a}'(1)=(-\pi\sin\pi,\ \pi\cos\pi,\ 1)$

$=\mathbf{(0,\ -\pi,\ 1)}$

（2）$\boldsymbol{b}'(t)=\mathbf{(2,\ e^{t},\ 0)}$

$t=1$ における微分係数は

$\boldsymbol{b}'(1)=(2,\ e^1,\ 0)$

$=\mathbf{(2,\ e,\ 0)}$

8　$\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}=(-\sin2t\cdot2,\ \cos2t\cdot2,\ 1)$

$=(-2\sin2t,\ 2\cos2t,\ 1)$

よって

$\left|\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right|=\sqrt{(-2\sin2t)^2+(2\cos2t)^2+1^2)}$

$=\sqrt{4(\sin^2 2t+\cos^2 2t)+1}$

$=\sqrt{4+1}=\sqrt{\mathbf{5}}$

9（1）$\boldsymbol{a}'(t)=\mathbf{(2,\ 6t,\ 0)}$

$\boldsymbol{b}'(t)=\mathbf{(0,\ 1,\ 2t)}$

（2）$u=e^{2t}$ とおくと

与式 $=\dfrac{d\boldsymbol{a}}{du}\cdot\dfrac{du}{dt}$

$=(2,\ 6u,\ 0)\cdot(e^{2t})'$

$=(2,\ 6e^{2t},\ 0)\cdot(2e^{2t})$

$=\mathbf{(4e^{2t},\ 12e^{4t},\ 0)}$

（3）与式 $=\boldsymbol{a}'(t)\cdot\boldsymbol{b}(t)+\boldsymbol{a}(t)\cdot\boldsymbol{b}'(t)$

$=(2,\ 6t,\ 0)\cdot(1,\ t+2,\ t^2)$

$\quad+(2t,\ 3t^2+1,\ 1)\cdot(0,\ 1,\ 2t)$

$=2\cdot1+6t(t+2)+0+0+(3t^2+1)\cdot1+1\cdot2t$

$=2+6t^2+12t+3t^2+1+2t$

$=\mathbf{9t^2+14t+3}$

（4）　与式 $= \boldsymbol{a}'(t) \times \boldsymbol{b}(t) + \boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}'(t)$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 6t & 0 \\ 1 & t+2 & t^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2t & 3t^2+1 & 1 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix}$$

$$= 6t^3\boldsymbol{i} + 2(t+2)\boldsymbol{k} - (2t^2\boldsymbol{j} + 6t\boldsymbol{k})$$
$$+ 2t(3t^2+1)\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{i} + 4t^2\boldsymbol{j})$$

$$= \{6t^3 + 2t(3t^2+1) - 1\}\boldsymbol{i} + (-2t^2 - 4t^2)\boldsymbol{j}$$
$$+ \{2(t+2) - 6t + 2t\}\boldsymbol{k}$$

$$= (6t^3 + 6t^3 + 2t - 1)\boldsymbol{i} + (-6t^2)\boldsymbol{j} + (2t + 4 - 4t)\boldsymbol{k}$$

$$= (12t^3 + 2t - 1)\boldsymbol{i} + (-6t^2)\boldsymbol{j} + (-2t+4)\boldsymbol{k}$$

$$= \boldsymbol{(12t^3 + 2t - 1,\ -6t^2,\ -2t+4)}$$

10　$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (1,\ 2t,\ 3t^2)$

これより，$\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$

よって，$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}(1,\ 2t,\ 3t^2)}$

11　それぞれの曲線の長さを s とする．

（1）　$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\sqrt{2},\ t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ より

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + t^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}$$
$$= \sqrt{t^2 + 2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2}$$
$$= \left|t + \frac{1}{t}\right|$$

$1 \leqq t \leqq 2$ において，$t + \dfrac{1}{t} > 0$ なので

$$s = \int_1^2 \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$$
$$= \int_1^2 \left(t + \frac{1}{t}\right) dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + \log t\right]_1^2$$
$$= (2 + \log 2) - \left(\frac{1}{2} + \log 1\right)$$
$$= 2 + \log 2 - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2} + \log 2}$$

（2）　$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\dfrac{1}{1+t^2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{2t}{t^2+1},\ 1 - \dfrac{1}{1+t^2}\right)$

$$= \left(\frac{1}{1+t^2},\ \frac{\sqrt{2}t}{t^2+1},\ \frac{t^2}{1+t^2}\right) \text{ より}$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1 + 2t^2 + t^4}{(1+t^2)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}} = 1$$

よって

$$s = \int_1^2 \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$$
$$= \int_1^2 dt = \Big[\ t\ \Big]_1^2$$
$$= 2 - 1 = \boldsymbol{1}$$

12　単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．

（1）　$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (1,\ 0,\ 3)$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (0,\ 1,\ -1)$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= \boldsymbol{k} - (3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$$
$$= (-3,\ 1,\ 1)$$

また，$\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}$

$$= \sqrt{11}$$

よって，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\pm\dfrac{1}{\sqrt{11}}(-3,\ 1,\ 1)}$

（2）　$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(1,\ 0,\ \dfrac{1}{2\sqrt{1-u^2-v^2}} \cdot (-2u)\right)$

$$= \left(1,\ 0,\ -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(0,\ 1,\ \frac{1}{2}\sqrt{1-u^2-v^2} \cdot (-2v)\right)$$
$$= \left(0,\ 1,\ -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{k} - \left(-\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\boldsymbol{i} - \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\boldsymbol{j}\right)$$
$$= \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\ \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\ 1\right)$$

また

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|$$
$$= \sqrt{\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + (1-u^2-v^2)}{1-u^2+v^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

よって

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},1\right)$$
$$= \pm\sqrt{1-u^2-v^2}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\ \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\ 1\right)$$
$$= \boldsymbol{\pm(u,\ v,\ \sqrt{1-u^2-v^2})}$$

（3）　$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (1,\ 1,\ 2u)$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (-1,\ 1,\ 2v)$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 2u \\ -1 & 1 & 2v \end{vmatrix}$$
$$= 2v\boldsymbol{i} - 2u\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - (2u\boldsymbol{i} + 2v\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$$
$$= (-2u + 2v,\ -2u - 2v,\ 2)$$

また

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|$$
$$= \sqrt{(-2u+2v)^2 + (-2u-2v)^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{4\{(u^2 - 2uv + v^2) + (u^2 + 2uv + v^2) + 1\}}$$
$$= 2\sqrt{2u^2 + 2v^2 + 1}$$

よって

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2u^2+2v^2+1}}(-2u+2v,\ -2u-2v,\ 2)$$
$$= \pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2u^2+2v^2+1}}}(\boldsymbol{-u+v,\ -u-v,\ 1})$$

13　求める曲面の面積を S とする.

（1）　$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(1,\ 0,\ \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}\right)$,　$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (0,\ 1,\ 0)$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{e^u - e^{-u}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \boldsymbol{k} - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\boldsymbol{i}\right)$$
$$= \left(-\frac{e^u - e^{-u}}{2},\ 0,\ 1\right)$$

よって

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{\left(-\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{\frac{e^{2u} - 2 + e^{-2u} + 4}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{e^{2u} + 2 + e^{-2u}}{4}}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2}$$
$$= \left|\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right| = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

したがって

$$S = \iint_D \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$
$$= \iint_D \frac{e^u + e^{-u}}{2}\,du\,dv$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left\{\int_0^1 (e^u + e^{-u})\,du\right\} dv$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \Big[e^u - e^{-u}\Big]_0^1 dv$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \{(e - e^{-1}) - (1 - 1)\}\,dv$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(e - \frac{1}{e}\right) dv$$
$$= \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)\int_0^2 dv$$
$$= \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) \cdot 2 = \boldsymbol{e - \frac{1}{e}}$$

（2）　$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (\cos v,\ \sin v,\ 1)$,　$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -u\sin v\,\boldsymbol{j} + u\cos^2 v\,\boldsymbol{k}$$
$$- (u\cos v\,\boldsymbol{i} - u\sin^2 v\,\boldsymbol{k})$$
$$= (-u\cos v,\ -u\sin v,\ u(\cos^2 v + \sin^2 v))$$
$$= (-u\cos v,\ -u\sin v,\ u)$$

よって

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{(-u\cos v)^2 + (-u\sin v)^2 + u^2}$$
$$= \sqrt{u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2}$$
$$= \sqrt{2u^2}$$
$$= \sqrt{2}|\,u\,|$$

したがって

$$S = \iint_D \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$
$$= \iint_D \sqrt{2}|\,u\,|\,du\,dv$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left\{\int_0^2 |\,u\,|\,du\right\} dv$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left\{\int_0^2 u\,du\right\} dv \qquad (0 \leqq u \leqq 2 \text{ で, } u \geqq 0)$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^2 dv$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} (2^2 - 0^2)\,dv$$
$$= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} dv$$
$$= 2\sqrt{2} \cdot 2\pi = \boldsymbol{4\sqrt{2}\pi}$$

∎