1章　微分法

§1　関数の極限と導関数　(p.3〜p.8)

BASIC

1（1）与式 $= 2^4 = \mathbf{16}$

（2）与式 $= \sqrt{2 \cdot 4 + 1}$
$= \sqrt{9} = \mathbf{3}$

（3）与式 $= \log_2 1 = \mathbf{0}$

（4）与式 $= \tan \dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

2（1）与式 $= 2^2 + 2 \cdot 2 - 3$
$= 4 + 4 - 3 = \mathbf{5}$

（2）与式 $= 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1)$
$= 3 + 2 = \mathbf{5}$

（3）与式 $= \sin^2 0 - 3^0$
$= 0 - 1 = \mathbf{-1}$

（4）与式 $= \dfrac{-(-2) + 1}{(-2)^2 + (-2)}$
$= \dfrac{2+1}{4-2} = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$

3（1）与式 $= \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x(x+2)}{3x}$
$= \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{3}$
$= \dfrac{0+2}{3} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

（2）与式 $= \displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(2x+3)}{x+1}$
$= \displaystyle\lim_{x \to -1} (2x+3)$
$= 2 \cdot (-1) + 3 = \mathbf{1}$

（3）与式 $= \displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$
$= \displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x+2}$
$= \dfrac{2-1}{2+2} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

（4）与式 $= \displaystyle\lim_{h \to 2} \frac{(h-2)(h^2+2h+4)}{h-2}$
$= \displaystyle\lim_{h \to 2} (h^2+2h+4)$
$= 2^2 + 2 \cdot 2 + 4$
$= 4 + 4 + 4 = \mathbf{12}$

4（1）与式 $= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}}$
$= \dfrac{1-0}{2+0} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

（2）与式 $= \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$
$= \dfrac{2-0+0}{1-0-0} = \mathbf{2}$

（3）与式 $= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + x - 1}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$
$= \dfrac{0-0-0}{1+0-0} = \mathbf{0}$

（4）与式 $= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{-3}{\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{-3}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}$
$= \dfrac{-3}{\sqrt{1+0}} = \mathbf{-3}$

5（1）与式 $= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x+4} - \sqrt{x})(\sqrt{x+4} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x}}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(x+4) - x}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x}}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$
$= \mathbf{0}$

（2）与式 $= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x} - x)(\sqrt{^2+4x} + x)}{\sqrt{x^2+4x} + x}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2+4x) - x^2}{\sqrt{x^2+4x} + x}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x} + x}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1}$
$= \dfrac{4}{\sqrt{1+0} + 1}$
$= \dfrac{4}{2} = \mathbf{2}$

（3）与式 $= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2+3} - x)(\sqrt{x^2+3} + x)}{\sqrt{x^2+3} + x}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2+3) - x^2}{\sqrt{x^2+3} + x}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3} + x}$
$= \mathbf{0}$

（4）与式
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x}}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2+2x) - (x^2+x)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x}}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+x}}$
$= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$
$= \dfrac{1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

6（1）$f(x) = x^2 + 3x$ とおく．
$\dfrac{f(2) - f(0)}{2-1} = \dfrac{(2^2 + 3 \cdot 2) - (0^2 + 3 \cdot 0)}{2}$
$= \dfrac{10-0}{2} = \mathbf{5}$

（2）　$f(x)=-2x+5$ とおく．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(-2\cdot b+5)-(-2\cdot a+5)}{b-a}=\frac{-2b+2a}{b-a}=\frac{-2(b-a)}{b-a}=\mathbf{-2}$$

（3）　$f(x)=x^2$ とおく．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}=\boldsymbol{a+b}$$

7（1）

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1^3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=1^2+1+1=\mathbf{3}$$

〔別解〕

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^3-1^3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to0}(3+3h+h^2)=3+0+0=\mathbf{3}$$

（2）

$$f'(4)=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

〔別解〕

$$f'(4)=\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\lim_{h\to0}\frac{(4+h)-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{\sqrt{4+0}+2}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

8

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2x^2-2a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2(x^2-a^2)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2(x+a)(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}2(x+a)=2(a+a)=\boldsymbol{4a}$$

〔別解〕

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2(a+h)^2-2a^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2a^2+4ah+2h^a-2a^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{4ah+2h^2}{h}=\lim_{h\to0}(4a+2h)=4a+0=\boldsymbol{4a}$$

点 (1, 2) における接線の傾きは

$$f'(1)=4\cdot1=\mathbf{4}$$

9（1）　$f(x)=x^2-x$ とおくと

$$f'(x)=\lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}=\lim_{X\to x}\frac{(X^2-X)-(x^2-x)}{X-x}=\lim_{X\to x}\frac{(X^2-x^2)-(X-x)}{X-x}=\lim_{X\to x}\frac{(X-x)(X+x)-(X-x)}{X-x}=\lim_{X\to x}(X+x-1)=x+x-1=\boldsymbol{2x-1}$$

〔別解〕

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2-(x+h)\}-(x^2-x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{x^2+2hx+h^2-x-h-x^2+x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2hx-h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x-1+h)=2x-1+0=\boldsymbol{2x-1}$$

$x=1$ における微分係数は

$$f'(1)=2\cdot1-1=\mathbf{1}$$

（2）　$f(x)=x^3+2$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}\\
&= \lim_{X\to x}\frac{(X^3+2)-(x^3+2)}{X-x}\\
&= \lim_{X\to x}\frac{X^3-x^3}{X-x}\\
&= \lim_{X\to x}\frac{(X-x)(X^2+Xx+x^2)}{X-x}\\
&= \lim_{X\to x}(X^2+Xx+x^2)\\
&= x^2+x^2+x^2=\boldsymbol{3x^2}
\end{aligned}
$$

〔別解〕

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^3+2\}-(x^3+2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+2-x^3-2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)\\
&= 3x^2+0+0=\boldsymbol{3x^2}
\end{aligned}
$$

$x=1$ における微分係数は

$f'(1)=3\cdot 1^2=\boldsymbol{3}$

10（1）　$y'=4x^3+2\cdot 3x^2+1$

$=\boldsymbol{4x^2-6x^2+1}$

（2）　$y'=\frac{3}{2}\cdot 3x^2+\frac{1}{2}\cdot 1$

$=\boldsymbol{2x^2+\frac{1}{2}}$

（3）　$y=-x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$ であるから

$y'=-4x^3+\frac{1}{2}\cdot 2x$

$=\boldsymbol{-4x^3+x}$

（4）　$y=x^2-1$ であるから

$y'=\boldsymbol{2x}$

11（1）　$y=2x^2+7x-4$ であるから

$y'=2\cdot 2x+7$

$=\boldsymbol{4x+7}$

〔別解〕

$$
\begin{aligned}
y' &= (x+4)'(2x-1)+(x+4)(2x-1)'\\
&= 1(2x-1)+(x+4)\cdot 2\\
&= 2x-1+2x+8\\
&= \boldsymbol{4x+7}
\end{aligned}
$$

（2）　$y=x^3+1$ であるから

$y'=\boldsymbol{3x^2}$

〔別解〕

$$
\begin{aligned}
y' &= (x+1)'(x^2-x+1)+(x+1)(x^2-x+1)'\\
&= 1(x^2-x+1)+(x+1)(2x-1)\\
&= x^2-x+1+2x^2+x-1\\
&= \boldsymbol{3x^2}
\end{aligned}
$$

（3）

$$
\begin{aligned}
s' &= (t^2+t+1)'(2t+1)+(t^2+t+1)(2t+1)'\\
&= (2t+1)^2+(t^2+t+1)\cdot 2\\
&= 4t^2+4t+1+2t^2+2t+2\\
&= \boldsymbol{6t^2+6t+3}
\end{aligned}
$$

（4）

$$
\begin{aligned}
v' &= (u^2+2u)'(u^2+1)+(u^2+2u)(u^2+1)'\\
&= (2u+2)(u^2+1)+(u^2+2u)\cdot 2u\\
&= 2u^3+2u^2+2u+2+2u^3+4u^2\\
&= \boldsymbol{4u^3+6u^2+2u+2}
\end{aligned}
$$

（5）

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(x+3)'(2x+1)-(x+3)(2x+1)'}{(2x+1)^2}\\
&= \frac{1\cdot(2x+1)-(x+3)\cdot 2}{(2x+1)^2}\\
&= \frac{2x+1-2x-6}{(2x+1)^2}\\
&= \boldsymbol{-\frac{5}{(2x+1)^2}}
\end{aligned}
$$

（6）

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{(3x-1)'(x^2-5)-(3x-1)(x^2-5)'}{(x^2-5)^2}\\
&= \frac{3(x^2-5)-(3x-1)\cdot 2x}{(x^2-5)^2}\\
&= \frac{3x^2-15-6x^2+2x}{(x^2-5)^2}\\
&= \boldsymbol{\frac{-3x^2+2x-15}{(x^2-5)^2}}
\end{aligned}
$$

（7）

$$
\begin{aligned}
v' &= -\frac{(u^2+2u+3)'}{(u^2+2u+3)^2}\\
&= \boldsymbol{-\frac{2u+2}{(u^2+2u+3)^2}}
\end{aligned}
$$

（8）　$s=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ であるから

$$
\begin{aligned}
s' &= \frac{(t^2+1)'(t^2+1)-(t^2-1)(t^2+1)'}{(t^2+1)^2}\\
&= \frac{2t(t^2+1)-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\\
&= \frac{2t\{(t^2+1)-(t^2-1)\}}{(t^2+1)^2}\\
&= \frac{2t\cdot 2}{(t^2+1)^2}\\
&= \boldsymbol{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}
\end{aligned}
$$

12（1）

$$
\begin{aligned}
y' &= x'(2x+1)(x^2-1)\\
&\qquad +x(2x+1)'(x^2-1)\\
&\qquad\qquad +x(2x+1)(x^2-1)'\\
&= 1\cdot(2x+1)(x^2-1)\\
&\qquad +x\cdot 2\cdot(x^2-1)\\
&\qquad\qquad +x(2x+1)\cdot 2x\\
&= (2x^3+x^2-2x-1)+(2x^3-2x)+(4x^3+2x^2)\\
&= \boldsymbol{8x^3+3x^2-4x-1}
\end{aligned}
$$

（2）　$s' = (1-t^2)'(2t-3)(t+2)$
$\qquad + (1-t^2)(2t-3)'(t+2)$
$\qquad\qquad + (1-t^2)(2t-3)(t+2)'$
$= -2t(2t-3)(t+2)$
$\qquad + (1-t^2)\cdot 2\cdot(t+2)$
$\qquad\qquad + (1-t^2)(2t-3)\cdot 1$
$= (-4t^3-2t^2+12t)$
$\qquad + (-2t^3-4t^2+2t+4)$
$\qquad\qquad + (-2t^3+3t^2+2t-3)$
$= \boldsymbol{-6t^3-3t^2+16t+1}$

13（1）　$y = x^{-5}$ であるから
$y' = -5x^{-5-1}$
$= \boldsymbol{-5x^{-6}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{5}{x^6}}$

（2）　$v' = -2\cdot(-2u^{-2-1})$
$= \boldsymbol{4u^{-3}}$　または　$\boldsymbol{\dfrac{4}{u^3}}$

（3）　$y' = \dfrac{1}{3}\cdot(-3x^{-3-1}) + \dfrac{1}{4}\cdot(-2x^{-2-1}) + 5\cdot(-x^{-1-1})$
$= \boldsymbol{-x^{-4} - \dfrac{1}{2}x^{-3} - 5x^{-2}}$
または　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{2x^3} - \dfrac{5}{x^2}}$

（4）　$s = 2t^{-3} + \dfrac{1}{2}t^{-2} + \dfrac{4}{5}$ であるから
$s' = 2\cdot(-3t^{-3-1}) + \dfrac{1}{2}\cdot(-2t^{-2-1})$
$= \boldsymbol{-6t^{-4} - t^{-3}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{6}{t^4} - \dfrac{1}{t^3}}$

（5）　$y = \dfrac{1}{4}x^4 - 4x^{-4}$ であるから
$y' = \dfrac{1}{4}\cdot 4x^3 - 4\cdot(-4x^{-4-1})$
$= \boldsymbol{x^3 + 16x^{-5}}$　または　$\boldsymbol{x^3 + \dfrac{16}{x^5}}$

（6）　$v = \dfrac{1}{4}u^{-2} + \dfrac{5}{6}u^{-3}$ であるから
$v' = \dfrac{1}{4}\cdot(-2u^{-2-1}) + \dfrac{5}{6}\cdot(-3u^{-3-1})$
$= \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}u^{-3} - \dfrac{5}{2}u^{-4}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2u^3} - \dfrac{5}{2u^4}}$

14（1）　$y' = \dfrac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}$
$= \boldsymbol{\dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}}$　または　$\boldsymbol{\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}}$

（2）　$s' = \dfrac{4}{5}t^{\frac{4}{5}-1} - \dfrac{1}{4}t^{-\frac{1}{4}-1}$
$= \boldsymbol{\dfrac{4}{5}t^{-\frac{1}{5}} - \dfrac{1}{4}t^{-\frac{5}{4}}}$　または　$\boldsymbol{\dfrac{4}{5\sqrt[5]{t}} - \dfrac{1}{4t\sqrt[4]{t}}}$

（3）　$y' = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}$
$= \boldsymbol{x^{\frac{1}{3}}}$　または　$\boldsymbol{\sqrt[3]{x}}$

（4）　$v = u^{\frac{1}{6}} + u^{\frac{5}{4}}$ であるから
$v' = \dfrac{1}{6}u^{\frac{1}{6}-1} + \dfrac{5}{4}u^{\frac{5}{4}-1}$
$= \boldsymbol{\dfrac{1}{6}u^{-\frac{5}{6}} + \dfrac{5}{4}u^{\frac{1}{4}}}$　または　$\boldsymbol{\dfrac{1}{6\sqrt[6]{u^5}} + \dfrac{5}{4}\sqrt[4]{u}}$

（5）　$s = t^{\frac{3}{5}}\cdot t^{-1} = t^{-\frac{2}{5}}$ であるから
$s' = -\dfrac{2}{5}t^{-\frac{2}{5}-1}$
$= \boldsymbol{-\dfrac{2}{5}t^{-\frac{7}{5}}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{2}{5t\sqrt[5]{t^2}}}$

〔別解〕
$s = \dfrac{t^{\frac{3}{5}}}{t}$ であるから
$s' = \dfrac{\frac{3}{5}t^{\frac{3}{5}-1}\cdot t - t^{\frac{3}{5}}\cdot 1}{t^2}$
$= \dfrac{\frac{3}{5}t^{\frac{3}{5}} - t^{\frac{3}{5}}}{t^2}$
$= -\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{t^{\frac{3}{5}}}{t^2}$
$= \boldsymbol{-\dfrac{2}{5}t^{-\frac{7}{5}}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{2}{5t\sqrt[5]{t^2}}}$

（6）　$y = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = e^{-\frac{3}{2}}$ であるから
$y' = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1-1}$
$= \boldsymbol{-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}}$

〔別解〕
$y = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ であるから
$y' = -\dfrac{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}}{(x^{\frac{3}{2}})^2}$
$= -\dfrac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{x^3}$
$= -\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}-3}$
$= \boldsymbol{-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}}$

15（1）　$y' = (2x-1)'\sqrt{x} + (2x-1)(\sqrt{x})'$
$= 2\sqrt{x} + (2x-1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$= 2\sqrt{x} + \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x}}$
$= \dfrac{4x+(2x-1)}{2\sqrt{x}}$
$= \boldsymbol{\dfrac{6x-1}{2\sqrt{x}}}$

（2）　$y' = \dfrac{(\sqrt{x})'(2x+3) - \sqrt{x}(2x+3)'}{(2x+3)^2}$
$= \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+3) - \sqrt{x}\cdot 2}{(2x+3)^2}$
$= \dfrac{(2x+3)-4x}{2\sqrt{x}(2x+3)^2}$
$= \boldsymbol{\dfrac{-2x+3}{2\sqrt{x}(2x+3)^2}}$

（3）　$y' = \dfrac{(x-3)'\sqrt{x} - (x-3)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}$
$= \dfrac{1\cdot\sqrt{x} - (x-3)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$
$= \dfrac{2x-(x-3)}{2x\sqrt{x}}$
$= \boldsymbol{\dfrac{x+3}{2x\sqrt{x}}}$

16（1）　$y' = 3\cdot 4(3x+2)^3$
$= \boldsymbol{12(3x+2)^3}$

（2）　$u' = -1 \cdot 5(-v+3)^4$

$= \boldsymbol{-5(-v+3)^4}$

（3）　$y' = 2 \cdot \dfrac{1}{4}(2x-5)^{-\frac{3}{4}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(2x-5)^{-\frac{3}{4}}}$　または　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x-5)^3}}}$

（4）　$s' = 6 \cdot \left\{-\dfrac{1}{3}(6t+1)^{-\frac{4}{3}}\right\}$

$= \boldsymbol{-2(6t+1)^{-\frac{4}{3}}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt[3]{(6t+1)^4}}}$

（5）　$y = (3x-1)^{\frac{1}{3}}$ であるから

$y' = 3 \cdot \dfrac{1}{3}(3x-1)^{-\frac{2}{3}}$

$= \boldsymbol{(3x-1)^{-\frac{2}{3}}}$　または　$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}}$

（6）　$u = (5v+7)^{\frac{4}{5}}$ であるから

$u' = 5 \cdot \dfrac{4}{5}(5v+7)^{-\frac{1}{5}}$

$= \boldsymbol{4(5v+7)^{-\frac{1}{5}}}$　または　$\boldsymbol{\dfrac{4}{\sqrt[5]{5v+7}}}$

（7）　$y = (3x+4)^{-3}$ であるから

$y' = 3 \cdot \{-3(3x+4)^{-4}\}$

$= \boldsymbol{-9(3x+4)^{-4}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{9}{(3x+4)^4}}$

（8）　$s = (3-2t)^{-2}$ であるから

$y' = -2 \cdot \{-2(3-2t)^{-3}\}$

$= \boldsymbol{4(3-2t)^{-3}}$　または　$\boldsymbol{\dfrac{4}{(3-2t)^3}}$

（9）　$y = (-x+5)^{-5}$ であるから

$y' = -1 \cdot \{-5(-x+5)^{-6}\}$

$= \boldsymbol{5(-x+5)^{-6}}$　または　$\boldsymbol{\dfrac{5}{(-x+5)^6}}$

（10）　$y = (4x-5)^{-\frac{1}{2}}$ であるから

$y' = 4 \cdot \left\{-\dfrac{1}{2}(4x-5)^{-\frac{3}{2}}\right\}$

$= \boldsymbol{-2(4x-5)^{-\frac{3}{2}}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{2}{(4x-5)\sqrt{4x-5}}}$

17

〔補足〕

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{1}{1} = 1$$

すなわち，$\boldsymbol{\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\theta}{\sin\theta} = 1}$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

すなわち，$\boldsymbol{\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\tan\theta}{\theta} = 1}$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\tan\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\frac{\tan\theta}{\theta}} = \frac{1}{1} = 1$$

すなわち，$\boldsymbol{\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\theta}{\tan\theta} = 1}$

（1）　与式 $= \lim_{\theta \to 0} \pi \cdot \dfrac{\sin\pi\theta}{\pi\theta}$

$= \pi \cdot 1 = \boldsymbol{\pi}$

（2）　与式 $= \lim_{\theta \to 0} \dfrac{\theta}{\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}}$

$= \lim_{\theta \to 0} \dfrac{\theta\cos 3\theta}{\sin 3\theta}$

$= \lim_{\theta \to 0} \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\theta}{\sin 3\theta} \cdot \cos 3\theta$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

〔別解〕

与式 $= \lim_{\theta \to 0} \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\theta}{\tan 3\theta}$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 1 = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

（3）　与式 $= \lim_{\theta \to 0} \dfrac{\theta\sin 3\theta(1+cos3\theta)}{(1-\cos 3\theta)(1+\cos 3\theta)}$

$= \lim_{\theta \to 0} \dfrac{\theta\sin 3\theta(1+\cos 3\theta)}{1-\cos^2 3\theta}$

$= \lim_{\theta \to 0} \dfrac{\theta\sin 3\theta(1+\cos 3\theta)}{\sin^2 3\theta}$

$= \lim_{\theta \to 0} \dfrac{\theta(1+\cos 3\theta)}{\sin 3\theta}$

$= \lim_{\theta \to 0} \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\theta}{\sin 3\theta}(1+\cos 3\theta)$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1) = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

18（1）　$y' = -3 \cdot \cos(2-3x)$

$= \boldsymbol{-3\cos(2-3x)}$

（2）　$y' = 1 \cdot \dfrac{1}{\cos^2(x-2)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{\cos^2(x-2)}}$

（3）　$y' = 2 \cdot \{-\sin(2x-3)\}$

$= \boldsymbol{-2\sin(2x-3)}$

19（1）　$y' = \dfrac{2 \cdot \cos 2x - 3}{4}$

$= \boldsymbol{\dfrac{\cos(2x-3)}{2}}$

（2）　$y' = -2 \cdot 3 \cdot \{-\sin(3x+1)\}$

$= \boldsymbol{6\sin(3x+1)}$

（3）　$y' = (\sin 4x)'\cos 5x + \sin 4x(\cos 5x)'$

$= 4 \cdot \cos 4x\cos 5x + \sin 4x \cdot 5 \cdot (-\sin 5x)$

$= \boldsymbol{4\cos 4x\cos 5x - 5\sin 4x\sin 5x}$

（4）　$y' = \dfrac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}$

20（1）　$y' = 3 \cdot e^{3x}$

$= \boldsymbol{3e^{3x}}$

（2）　$y' = 2 \cdot e^{2x+5}$

$= \mathbf{2e^{2x+5}}$

（3）　$y' = (x^2 - x + 1)'e^x + (x^2 - x + 1)(e^x)'$

$= (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 1)e^x$

$= \{(2x - 1) + (x^2 - x + 1)\}e^x$

$= (x^2 + x)e^x = \boldsymbol{x(x+1)e^x}$

（4）　$y' = (2x - 3)'e^{4x} + (2x - 3)(e^{4x})'$

$= 2e^{4x} + (2x - 3) \cdot 4e^{4x}$

$= \{2 + 4(2x - 3)\}e^{4x}$

$= (8x - 10)e^{4x}$

$= \boldsymbol{2(4x - 5)e^{4x}}$

（5）　$y' = (e^x)' \tan x + e^x (\tan x)'$

$= e^x \tan x + e^x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$= \boldsymbol{e^x \left(\tan x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}$

または

$e^x \left(\tan x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = e^x \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$

$= \boldsymbol{\dfrac{\sin x \cos x + 1}{\cos^2 x} e^x}$

（6）　$y' = (e^{3x})' \cos(2x + 1) + e^{3x}\{\cos(2x + 1)\}'$

$= -3e^{3x} \cos(2x + 1) + e^{3x} \cdot 2\{-\sin(2x + 1)\}$

$= 3e^{3x} \cos(2x + 1) - 2e^{3x} \sin(2x + 1)$

$= \boldsymbol{e^{3x}\{3\cos(2x + 1) - 2\sin(2x + 1)\}}$

（7）　$y' = (e^{-x})'(\sin 3x + \cos 4x) + e^{-x}(\sin 3x + \cos 4x)'$

$= -e^{-x}(\sin 3x + \cos 4x) + e^{-x}(3\cos 3x - 4\sin 4x)$

$= \boldsymbol{-e^{-x}(\sin 3x + \cos 4x - 3\cos 3x + 4\sin 4x)}$

（8）　$y' = -\dfrac{3(e^{2x})'}{(e^{2x})^2}$

$= -\dfrac{3 \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x})^2}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{6}{e^{2x}}}$

〔別解〕

$y = 3e^{-2x}$ であるから

$y' = 3 \cdot (-2e^{-2x})$

$= \boldsymbol{-6e^{-2x}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{6}{e^{2x}}}$

（9）　$y' = \dfrac{(x + 2)'e^x - (x + 2)(e^x)'}{(e^x)^2}$

$= \dfrac{1 \cdot e^x - (x + 2)e^x}{(e^x)^2}$

$= \dfrac{e^x\{1 - (x + 2)\}}{(e^x)^2}$

$= \dfrac{-x - 1}{e^x} = \boldsymbol{-\dfrac{x + 1}{e^x}}$

(10)　$y' = -\dfrac{(\sqrt{e^x})'}{(\sqrt{e^x})^2}$

$= -\dfrac{(e^{\frac{x}{2}})'}{(\sqrt{e^x})^2}$

$= -\dfrac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}{(\sqrt{e^x})^2}$

$= -\dfrac{\sqrt{e^x}}{2(\sqrt{e^x})^2}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{1}{2\sqrt{e^x}}}$

〔別解〕

$y = e^{-\frac{x}{2}}$ であるから

$y' = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}}$　または　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2\sqrt{e^x}}}$

21（1）　与式 $= \log e^{\frac{1}{3}}$

$= \dfrac{1}{3} \log e$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 1 = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

（2）　与式 $= \log e^{-2}$

$= -2 \log e$

$= -2 \cdot 1 = \boldsymbol{-2}$

（3）　与式 $= \log \dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$

$= \log e^{-\frac{1}{2}}$

$= -\dfrac{1}{2} \log e$

$= -\dfrac{1}{2} \cdot 1 = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

22（1）　$y' = \boldsymbol{5^x \log 5}$

（2）　$y' = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} \cdot \log \dfrac{1}{3}$

$= 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} (\log 1 - \log 3)$

$= 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} (-\log 3)$

$= \boldsymbol{-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} \log 3}$

（3）　$y' = -1 \cdot 2^{-x+1} \log 2$

$= \boldsymbol{-2^{-x+1} \log 2}$

23（1）　与式 $= \lim_{h \to 0} \{(1 + h)^{\frac{1}{h}}\}^{-1}$

$= e^{-1} = \boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$

（2）　$2x = t$ とおくと，$x = \dfrac{t}{2}$，また，$x \to \infty$ のとき，$t \to \infty$ であるから

与式 $= \lim_{t \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^{\frac{t}{2}}$

$= \lim_{t \to \infty} \left\{\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= e^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{e}}$

CHECK

24（1）　与式 $= \sin \dfrac{\pi}{6} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

（2）　与式 $= 2\cdot(-2)^2 - 3\cdot(-2) + 1$

$= 8 + 6 + 1 = \mathbf{15}$

（3）与式 $= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1)(x+3)}{2x-1}$

$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} (x+3)$

$= \dfrac{1}{2} + 3 = \mathbf{\dfrac{7}{2}}$

（4）与式 $= \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(x-2)}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} (x-2)$

$= 0 - 2 = \mathbf{-2}$

（5）与式 $= \lim_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)}$

$= \lim_{x\to -1} \dfrac{x-3}{x-1}$

$= \dfrac{-1-3}{-1-1} = \mathbf{2}$

（6）与式 $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$

$= \dfrac{2-0}{3+0+0} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

（7）与式 $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}$

$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}$

$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

$= \sqrt{1+0} = \mathbf{1}$

（8）与式 $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{(\sqrt{4x+1} - 2\sqrt{x})(\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{x})}{\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{x}}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{(4x+1) - 4x}{\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{x}}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{x}} = \mathbf{0}$

25（1）　$\dfrac{f(3) - f(1)}{3-1} = \dfrac{(3^2+3) - (1^2+1)}{2}$

$= \dfrac{12-2}{2} = \mathbf{5}$

（2）　$f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a} \dfrac{(x^2+x) - (a^2+a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a} \dfrac{(x^2-a^2) + (x-a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a} \dfrac{(x-a)(x+a) + (x-a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a} \dfrac{(x-a)\{(x+a)+1\}}{x-a}$

$= \lim_{x\to a} (x+a+1) = \mathbf{2a+1}$

〔別解〕

$f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{\{(a+h)^2 + (a+h)\} - (a^2+a)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{a^2 + 2ah + h^2 + a + h - a^2 - a}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{2ah + h + h^2}{h}$

$= \lim_{h\to 0} (2a+1+h)$

$= 2a + 1 + 0 = \mathbf{2a+1}$

（3）　点 $(-1,\ 0)$ における接線の傾きは

$f'(-1) = 2\cdot(-1) + 1 = \mathbf{-1}$

26（1）　$y' = -4x^3 + 2\cdot 3x^2 - 2x + 3$

$= \mathbf{-4x^3 + 6x^2 - 2x + 3}$

（2）　$s = \dfrac{1}{2}t^4 + \dfrac{3}{2}t^2 + 2$ であるから

$s' = \dfrac{1}{2}\cdot 4t^3 + \dfrac{3}{2}\cdot 2t$

$= \mathbf{2t^3 + 3t}$

（3）　$y = 2x^3 + x^2 - 6x - 2$ であるから

$y' = 2\cdot 3x^2 + 2x - 6$

$= \mathbf{6x^2 + 2x - 6}$

〔別解〕

$y' = (x^2-3)'(2x+1) + (x^2-3)(2x+1)'$

$= 2x(2x+1) + (x^2-3)\cdot 2$

$= 4x^2 + 2x + 2x^2 - 6$

$= \mathbf{6x^2 + 2x - 6}$

（4）　$v = 4u^{-2} + \dfrac{2u+5}{u+3}$ であるから

$v' = 4\cdot(-2u^{-3})$

$+ \dfrac{(2u+5)'(u+3) - (2u+5)(u+3)'}{(u+3)^2}$

$-8u^{-3} + \dfrac{2(u+3) - (2u+5)\cdot 1}{(u+3)^2}$

$-\dfrac{8}{u^3} + \dfrac{2u+6-2u-5}{(u+3)^2}$

$= \mathbf{-\dfrac{8}{u^3} + \dfrac{1}{(u+3)^2}}$

（5）　$y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}} + \dfrac{x}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$ であるから

$y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \left(-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)$

$= \dfrac{3}{2}\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

$= \mathbf{\dfrac{3x^2 + x + 1}{2x\sqrt{x}}}$

〔別解〕

$$y' = \frac{(x^2+x-1)'\sqrt{x} - (x^2+x-1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{(2x+1)\sqrt{x} - (x^2+x-1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$= \frac{(2x+1)\cdot 2x - (x^2+x-1)}{2x\sqrt{x}}$$
$$= \frac{4x^2+2x-x^2-x+1}{2x\sqrt{x}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{3x^2+x+1}{2x\sqrt{x}}}$$

（6）※ この問題以降の解答例は，合成関数の微分法を利用しています．

$$s' = 3(4t+3)^2(4t+3)'$$
$$= 3(4t+3)^2\cdot 4$$
$$= \boldsymbol{12(4t+3)^2}$$

（7）　$y = (3-x)^{-3}$ であるから

$$y' = -3(3-x)^{-4}\cdot(3-x)'$$
$$= -\frac{3}{(3-x)^4}\cdot(-1)$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{(3-x)^4}}$$

〔別解〕

$$y' = -\frac{\{(3-x)^3\}'}{\{(3-x)^3\}^2}$$
$$= -\frac{3(3-x)^2(3-x)'}{(3-x)^6}$$
$$= -\frac{3(3-x)^2\cdot(-1)}{(3-x)^6}$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{(3-x)^4}}$$

（8）　$y = (6x-7)^{\frac{1}{3}}$ であるから

$$y' = \frac{1}{3}(6x-7)^{-\frac{2}{3}}(6x-7)'$$
$$= \frac{1}{3(6x-7)^{\frac{2}{3}}}\cdot 6$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt[3]{(6x-7)^2}}}$$

27（1）

$$与式 = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（2）

$$与式 = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\cdot\frac{\sin\dfrac{\theta}{3}}{\cos\dfrac{\theta}{3}}$$
$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\dfrac{\theta}{3}}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\dfrac{\theta}{3}}$$
$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\dfrac{\theta}{3}}{\dfrac{\theta}{3}}\cdot\frac{1}{\cos\dfrac{\theta}{3}}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

〔別解〕

$$与式 = \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\dfrac{\theta}{3}}{\theta}$$
$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\tan\dfrac{\theta}{3}}{\dfrac{\theta}{3}}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

28（1）

$$y' = \cos(5x-1)\cdot(5x-1)'$$
$$= \cos(5x-1)\cdot 5$$
$$= \boldsymbol{5\cos(5x-1)}$$

（2）

$$y' = e^{3x+2}\cdot(3x+2)'$$
$$= e^{3x+2}\cdot 3$$
$$= \boldsymbol{3e^{3x+2}}$$

（3）

$$y' = x'e^{-3x} + x(e^{-3x})'$$
$$= 1\cdot e^{-3x} + x\cdot e^{-3x}\cdot(-3x)'$$
$$= e^{-3x} + x\cdot e^{-3x}\cdot(-3)$$
$$= \boldsymbol{(1-3x)e^{-3x}}$$

（4）　$y = e^{\frac{3x}{4}}$ であるから

$$y' = e^{\frac{3x}{4}}\cdot\left(\frac{3x}{4}\right)'$$
$$= \frac{4}{3}e^{\frac{3x}{4}} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt[4]{e^{3x}}}$$

（5）

$$y' = (x^2)'\sin 4x + x^2(\sin 4x)'$$
$$= 2x\sin 4x + x^2\cdot\cos 4x\cdot(4x)'$$
$$= 2x\sin 4x + x^2\cos 4x\cdot 4$$
$$= 2x\sin 4x + 4x^2\cos 4x$$
$$= \boldsymbol{2x(\sin 4x + 2x\cos 4x)}$$

（6）

$$y' = (e^{-2x})'\cos 3x + e^{-2x}(\cos 3x)'$$
$$= e^{-2x}\cdot(-2x)'\cos 3x + e^{-2x}\cdot(-\sin 3x)\cdot(3x)'$$
$$= -2e^{-2x}\cos 3x - e^{-2x}\sin 3x\cdot 3$$
$$= -2e^{-2x}\cos 3x - 3e^{-2x}\sin 3x$$
$$= \boldsymbol{-e^{-2x}(2\cos 3x + 3\sin 3x)}$$

（7）

$$y' = (\sin x)'\tan x + \sin x(\tan x)'$$
$$= \cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \boldsymbol{\sin x\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)}$$

（8）

$$y' = 3^{2x+3}\log 3\cdot(2x+3)'$$
$$= 3^{2x+3}\log 3\cdot 2$$
$$= \boldsymbol{2\cdot 3^{2x+3}\log 3}$$

29（1）　$x = 2t$ とおくと，$x\to\infty$ のとき，$t\to\infty$ であるから

$$与式 = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2}{2t}\right)^{2t}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^2$$
$$= \boldsymbol{e^2}$$

〔別解〕

$\dfrac{2}{x}=h$ とおくと，$x=\dfrac{2}{h}$，また，$x\to\infty$ のとき，$h\to 0$ であるから

$$与式=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{2}{h}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}^2$$
$$=\boldsymbol{e^2}$$

（2） $$与式=\lim_{h\to 0}\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}^3$$
$$=\boldsymbol{e^3}$$

STEP UP

30（1） $$与式=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x+a)(x^2+a^2)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$
$$=\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})(x+a)(x^2+a^2)$$
$$=2\sqrt{a}\cdot 2a\cdot 2a^2=\boldsymbol{8a^3\sqrt{a}}$$

（2） $$与式=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-1)-1}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(\sqrt{x-1}+1)$$
$$=\sqrt{2-1}+1=\boldsymbol{2}$$

（3） $$与式=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{3x+x}{2}\sin\dfrac{3x-x}{2}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\sin x}{x^2}$$
$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$
$$=-2\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}$$
$$=-2\cdot 2\cdot 1\cdot 1=\boldsymbol{-4}$$

（4） 2 倍角の公式より，$1-2\sin^2 x=\cos 2x$

$$与式=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-(1-2\sin^2 x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-\cos 2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2\sin\dfrac{x+2x}{2}\sin\dfrac{x-2x}{2}}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin\dfrac{3x}{2}\sin\left(-\dfrac{x}{2}\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\dfrac{3x}{2}}\cdot\frac{x}{\sin\dfrac{x}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3x}{2}}{\sin\dfrac{3x}{2}}\cdot\frac{2\cdot\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x}{2}}{\sin\dfrac{3x}{2}}\cdot\frac{\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

（5） $$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2^x}{3^x}+\dfrac{3^x}{3^x}}{\dfrac{2^x}{3^x}-\dfrac{3^x}{3^x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x-1}$$
$$=\frac{0+1}{0-1}=\boldsymbol{-1}$$

（6） $$与式=\lim_{x\to 0}\left(2x^2+1-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=0+1-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\boldsymbol{-\infty}$$

（7） $$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)-x}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}+1}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{2+0}+1}=\boldsymbol{\infty}$$

（8） $$与式=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-\sqrt{4x^2+x-1})(2x+\sqrt{4x^2+x+1})}{2x+\sqrt{4x^2+x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-(4x^2+x+1)}{2x+\sqrt{4x^2+x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{2x+\sqrt{4x^2+x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\dfrac{1}{x}}{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{-1-0}{2+\sqrt{4+0+0}}=\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

（9） $$与式=\lim_{x\to\infty}\{\log(x+1)^{\frac{1}{2}}+\log(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x})\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log\sqrt{x+1}(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{3x+2}-\sqrt{3x})(\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x})}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{\sqrt{x+1}(3x+2-3x)}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{\sqrt{3+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{3}}$$
$$=\log\frac{2\sqrt{1+0}}{\sqrt{3+0}+\sqrt{3}}$$
$$=\log\frac{2}{2\sqrt{3}}=\log 3^{-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\log 3}$$

31（1） $y' = \dfrac{(2x+3)'\sqrt{2x+1} - (2x+3)(\sqrt{2x+1})'}{(\sqrt{2x+1})^2}$

$= \dfrac{2\sqrt{2x+1} - (2x+3) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2}{2x+1}$

$= \dfrac{2(2x+1) - (2x+3)}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

$= \dfrac{4x+2-2x-3}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2x-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}}$

（2）　※ 式の横幅が長すぎるので，最終ページに載せました．

（3） $y' = (x^2)' \sin(2x+1)\cos(x-2)$

$+ x^2\{\sin(2x+1)\}' \cos(x-2)$

$+ x^2 \sin(2x+1)\{\cos(x-1)\}'$

$= 2x\sin(2x+1)\cos(x-2)$

$+ x^2\cos(2x+1) \cdot 2 \cdot \cos(x-2)$

$+ x^2\sin(2x+1)\{-\sin(x-1) \cdot 1\}$

$= \boldsymbol{2x\sin(2x+1)\cos(x-2)}$

$\boldsymbol{+2x^2\cos(2x+1)\cos(x-2)}$

$\boldsymbol{-x^2\sin(2x+1)\sin(x-1)}$

（4） $y' = \dfrac{1}{3}\{x^2(x-1)\}^{-\frac{2}{3}} \cdot \{x^2(x-1)\}'$

$= \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\{x^2(x-1)\}^2}} \cdot (x^3 - x^2)'$

$= \dfrac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}$

$= \dfrac{3x^2-2x}{3x\sqrt[3]{x(x-1)^2}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{3x-2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}}$

（5） $y' = \dfrac{(1+2^{-x})'(1+2^x) - (1+2^{-x})(1+2^x)'}{(1+2^x)^2}$

$= \dfrac{\{2^{-x}\log 2 \cdot (-1)\}(1+2^x) - (1+2^{-x}) \cdot 2^x \log 2}{(1+2^x)^2}$

$= \dfrac{-2^{-x}\log 2(1+2^x) - (1+2^{-x}) \cdot 2^x\log 2}{(1+2^x)^2}$

$= \dfrac{-\log 2\{2^{-x}(1+2^x) + 2^x(1+2^{-x})\}}{(1+2^x)^2}$

$= \dfrac{-\log 2(2^{-x}+1+2^x+1)}{(1+2^x)^2}$

$= \dfrac{-\log 2(2^{-x}+2+2^x)}{(1+2^x)^2}$

$= \dfrac{-2^{-x}\log 2(1+2^{1+x}+2^{2x})}{(1+2^x)^2}$

$= \dfrac{-2^{-x}\log 2(1+2\cdot 2^x+2^{2x})}{(1+2^x)^2}$

$= \dfrac{-2^{-x}\log 2(1+2^x)^2}{(1+2^x)^2} = \boldsymbol{-2^{-x}\log 2}$

（6） $y' = (e^{-3x})'(\cos 3x + \sin 3x) + e^{-3x}(\cos 3x + \sin 3x)'$

$= e^{-3x} \cdot (-3)(\cos 3x + \sin 3x)$

$+ e^{-3x}(-\sin 3x \cdot 3 + \cos 3x \cdot 3)$

$= -3e^{-3x}(\cos 3x + \sin 3x) + 3e^{-3x}(-\sin 3x + \cos 3x)$

$= -3e^{-3x}\{(\cos 3x + \sin 3x) - (-\sin 3x + \cos 3x)\}$

$= -3e^{-3x} \cdot 2\sin 3x$

$= \boldsymbol{-6e^{-3x}\sin 3x}$

32（1）　$\displaystyle\lim_{x\to -1}(x+1) = 0$ であるから，極限値が存在するためには

$\displaystyle\lim_{x\to -1}(x^2 - ax + 3) = 0$

でなければならない．

これより，$(-1)^2 - a\cdot(-1) + 3 = 0$

$1 + a + 3 = 0$

よって，$a = -4$

このとき

$\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2-ax+3}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$

$\displaystyle= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+3)}{x+1}$

$\displaystyle= \lim_{x\to -1}(x+3)$

$= -1+3 = 2$

以上より，$\boldsymbol{a = -4}$，極限値は **2**

（2）　$\displaystyle\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}-2) = \sqrt{1+3}-2 = 0$ であるから，極限値が存在するためには

$\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-a) = 0$

でなければならない．

これより，$1 - a = 0$

よって，$a = 1$

このとき

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3)-4}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}+2)$

$= \sqrt{1+3}+2 = 4$

以上より，$\boldsymbol{a = 1}$，極限値は **4**

33　$\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2-x-2) = 2^2-2-2 = 0$ であるから，極限値が存在するためには

$\displaystyle\lim_{x\to 2}(ax^2+bx+6) = 0$

でなければならない．

これより，$a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 6 = 0$

$4a + 2b + 6 = 0$

よって，$b = -2a-3$

このとき

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+bx+6}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{ax^2+(-2a-3)x+6}{(x-2)(x+1)}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(ax-3)}{(x-2)(x+1)}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 2}\frac{ax-3}{x+1}$

$= \dfrac{a\cdot 2-3}{2+1} = \dfrac{2a-3}{3}$

よって，$\dfrac{2a-3}{3}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$2(2a-3)=3$$
$$4a-6=3$$
$$4a=9$$
$$a=\frac{9}{4}$$

また，$b=-2\cdot\dfrac{9}{4}-3=-\dfrac{9}{2}-3=-\dfrac{15}{2}$

以上より，$\boldsymbol{a=\dfrac{9}{4},\ b=-\dfrac{15}{2}}$

34（1）　$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$ であるから

$$\text{与式}=\lim_{t\to\infty}\frac{3(-t)-1}{\sqrt{(-t)^2+2(-t)+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t-1}{\sqrt{t^2-2t+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3-\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}}$$
$$=\frac{-3-0}{\sqrt{1-0+0}}=\boldsymbol{-3}$$

（2）　$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$ であるから

$$\text{与式}=\lim_{t\to\infty}(-t)\{\sqrt{(-t)^2-9}+(-t)\}$$
$$=-\lim_{t\to\infty}t(\sqrt{t^2-9}-t)$$
$$=-\lim_{t\to\infty}\frac{t(\sqrt{t^2-9}-t)(\sqrt{t^2-9}+t)}{\sqrt{t^2-9}+t}$$
$$=-\lim_{t\to\infty}\frac{t\{(t^2-9)-t^2\}}{\sqrt{t^2-9}+t}$$
$$=-\lim_{t\to\infty}\frac{-9t}{\sqrt{t^2-9}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{9}{\sqrt{1-\frac{9}{t^2}}+1}$$
$$=\frac{9}{\sqrt{1-0}+1}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

35（1）　分子に，$x^2f(a)$ を加えて引くと

$$\text{与式}=\lim_{x\to a}\frac{x^2f(x)-a^2f(a)+x^2f(a)-x^2f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2f(x)-x^2f(a)+x^2f(a)-a^2f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2\{f(x)-f(a)\}+f(a)\{x^2-a^2\}}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}x^2\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$+\lim_{x\to a}\frac{f(a)(x-a)(x+a)}{x-a}$$
$$=a^2f'(a)+f(a)\lim_{x\to a}(x+a)$$
$$=\boldsymbol{a^2f'(a)+2af(a)}$$

（2）　分子に，$a^3f(a)$ を加えて引くと

$$\text{与式}=\lim_{x\to a}\frac{a^3f(x)-x^3f(a)+a^3f(a)-a^3f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{a^3f(x)-a^3f(a)-x^3f(a)+a^3f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{a^3\{f(x)-f(a)\}-f(a)(x^3-a^3)}{x-a}$$
$$=a^3\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$-f(a)\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+xa+a^2)}{x-a}$$
$$=a^3f'(a)-f(a)\lim_{x\to a}(x^2+xa+a^2)$$
$$=a^3f'(a)-f(a)\cdot 3a^2$$
$$=\boldsymbol{a^3f'(a)-3a^2f(a)}$$

36（1）　分子に，$f(a)$ を加えて引くと

$$\text{与式}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+h)+f(a)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)-f(a+h)+f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}3\cdot\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}-f'(a)$$
$$=3f'(a)-f'(a)=\boldsymbol{2f'(a)}$$

（2）　※ 式の横幅が長すぎるので，最終ページに載せました.

31（2）$y' = \dfrac{(\sin x - 2\cos x)'(2\sin x + \cos x) - (\sin x - 2\cos x)(2\sin x + \cos x)'}{(2\sin x + \cos x)^2}$

$= \dfrac{(\cos x + 2\sin x)(2\sin x + \cos x) - (\sin x - 2\cos x)(2\cos x - \sin x)}{(2\sin x + \cos x)^2}$

$= \dfrac{(2\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - 2\cos x)^2}{(2\sin x + \cos x)^2}$

$= \dfrac{4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x}{(2\sin x + \cos x)^2}$

$= \dfrac{5(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(2\sin x + \cos x)^2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{5}{(2\sin x + \cos x)^2}}$

36（2）　与式 $= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{(a+h)(a-h)} \{(a-h)f(a+h) - (a+h)f(a-h)\}$

$= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{a^2 - h^2} \cdot \frac{(a-h)f(a+h) - (a+h)f(a-h)}{h}$

$= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{a^2 - h^2} \cdot \frac{af(a+h) - hf(a+h) - af(a-h) - hf(a-h)}{h}$

$= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{a^2 - h^2} \cdot \frac{af(a+h) - af(a-h) - hf(a+h) - hf(a-h)}{h}$

$= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{a^2 - h^2} \left\{ \frac{af(a+h) - af(a-h)}{h} - f(a+h) - f(a-h) \right\}$

$= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{a^2 - h^2} \left\{ \frac{af(a+h) - af(a-h) + af(a) - af(a)}{h} - f(a+h) - f(a-h) \right\}$

$= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{a^2 - h^2} \left\{ \frac{af(a+h) - af(a) - af(a-h) + af(a)}{h} - f(a+h) - f(a-h) \right\}$

$= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{a^2 - h^2} \left\{ a \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - a \cdot \frac{f(a-h) - f(a)}{h} - f(a+h) - f(a-h) \right\}$

$= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{a^2 - h^2} \left\{ a \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + a \cdot \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} - f(a+h) - f(a-h) \right\}$

$= \dfrac{1}{a^2 - 0^2} \{af'(a) + af'(a) - f(a+0) - f(a-0)\}$

$= \dfrac{1}{a^2} \{2af'(a) - 2f(a)\}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2}{a^2} \{af'(a) - f(a)\}}$