1章　微分法

§2　いろいろな関数の導関数 (p.10〜p.17)

BASIC

37 (1) $y' = 6(3x^2-2)^5 \cdot (3x^2-2)'$
$= 6(3x^2-2)^5 \cdot 6x$
$= \boldsymbol{36x(3x^2-2)^5}$

(2) $y' = 3(9-x^3)^2 \cdot (9-x^3)'$
$= 3(9-x^3)^2 \cdot (-3x^2)$
$= \boldsymbol{-9x^2(9-x^3)^2}$

(3) $y' = -\dfrac{-3\{(x^3+2)^2\}'}{\{(x^3+2)^2\}^2}$
$= \dfrac{3 \cdot 2(x^3+2)(x^3+2)'}{(x^3+2)^4}$
$= \dfrac{6(x^3+2) \cdot 3x^2}{(x^3+2)^4}$
$= \dfrac{18x^2(x^3+2)}{(x^3+2)^4}$
$= \boldsymbol{\dfrac{18x^2}{(x^3+2)^3}}$

〔別解〕
$y = -3(x^3+2)^{-2}$ であるから
$y' = -3 \cdot \{-2(x^3+2)^{-3}(x^3+2)'\}$
$= 6(x^3+2)^{-3} \cdot 3x^2$
$= 18x^2(x^3+2)^{-3}$
$= \boldsymbol{\dfrac{18x^2}{(x^3+2)^3}}$

(4) $x' = -7(u^7-u)^{-8}(u^7-u)'$
$= \boldsymbol{-7(u^7-u)^{-8}(7u^6-1)}$

(5) $y' = \dfrac{2}{3}(x^2+x)^{-\frac{1}{3}}(x^2+x)'$
$= \boldsymbol{\dfrac{2}{3}(x^2+x)^{-\frac{1}{3}}(2x+1)}$

(6) $u' = -\dfrac{3\{\sqrt[3]{(t^2-t)^2}\}'}{\{\sqrt[3]{(t^2-t)^2}\}^2}$
$= -\dfrac{3 \cdot \dfrac{2}{3}(t^2-t)^{-\frac{1}{3}}(t^2-t)'}{\{\sqrt[3]{(t^2-t)^2}\}^2}$
$= -\dfrac{2(2t-1)}{\sqrt[3]{t^2-t}\sqrt[3]{(t^2-t)^4}}$
$= -\dfrac{2(2t-1)}{\sqrt[3]{(t^2-t)^3}\sqrt[3]{(t^2-t)^2}}$
$= \boldsymbol{-\dfrac{2(2t-1)}{(t^2-t)\sqrt[3]{(t^2-t)^2}}}$

〔別解〕
$u = 3(t^2-t)^{-\frac{2}{3}}$ であるから
$u' = 3 \cdot \left\{-\dfrac{2}{3}(t^2-t)^{-\frac{5}{3}}\right\} \cdot (t^2-t)'$
$= -\dfrac{2(2t-1)}{\sqrt[3]{(t^2-t)^5}}$
$= \boldsymbol{-\dfrac{2(2t-1)}{(t^2-t)\sqrt[3]{(t^2-t)^2}}}$

(7) $y' = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})'$
$= e^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$= \boldsymbol{\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}$

(8) $y' = -\dfrac{(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$
$= \boldsymbol{-\dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}}$

38 (1) $y' = 3\cos^2 x \cdot (\cos x)'$
$= \boldsymbol{-3\cos^2 x \sin x}$

(2) $y' = 5\tan^4 x \cdot (\tan x)'$
$= 5\tan^4 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$= \boldsymbol{\dfrac{5\tan^4 x}{\cos^2 x}}$

39 (1) $y' = 2\tan(3x-4) \cdot \{\tan(3x-4)\}'$
$= 2\tan(3x-4) \cdot \dfrac{1}{\cos^2(3x-4)} \cdot (3x-4)'$
$= \dfrac{2\tan(3x-4)}{\cos^2(3x-4)} \cdot 3$
$= \boldsymbol{\dfrac{6\tan(3x-4)}{\cos^2(3x-4)}}$

(2) $s' = \dfrac{1}{2}(\sin 3t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\sin 3t)'$
$= \dfrac{1}{2\sqrt{\sin 3t}} \cdot \cos 3t \cdot (3t)'$
$= \dfrac{\cos 3t}{2\sqrt{\sin 3t}} \cdot 3$
$= \boldsymbol{\dfrac{3\cos 3t}{2\sqrt{\sin 3t}}}$

(3) $y' = e^{\cos^2 x} \cdot (\cos^2 x)'$
$= e^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x \cdot (\cos x)'$
$= 2e^{\cos^2 x}\cos x \cdot (-\sin x)$
$= \boldsymbol{-2\sin x \cos x\ e^{\cos^2 x}}$

(4) $y' = \{(2x+5)^3\}'\sqrt{x^2+1} + (2x+5)^3(\sqrt{x^2+1})'$
$= 3(2x+5)^2 \cdot (2x+5)'\sqrt{x^2+1}$
$\quad + (2x+5)^3 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'$
$= 3(2x+5)^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2+1} + (2x+5)^3 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$
$= 6(2x+5)^2\sqrt{x^2+1} + \dfrac{x(2x+5)^3}{\sqrt{x^2+1}}$
$= \dfrac{6(2x+5)^2(x^2+1) + x(2x+5)^3}{\sqrt{x^2+1}}$
$= \dfrac{(2x+5)^2\{6(x^2+1) + x(2x+5)\}}{\sqrt{x^2+1}}$
$= \dfrac{(2x+5)^2\{6x^2+6+2x^2+5x\}}{\sqrt{x^2+1}}$
$= \boldsymbol{\dfrac{(2x+5)^2(8x^2+5x+6)}{\sqrt{x^2+1}}}$

40（1）$y' = (x^2)' \log x + x^2 (\log x)'$

$= 2x \log x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x}$

$= \boldsymbol{2x \log x + x}$

（2）$y' = \dfrac{(x+1)' \log x - (x+1)(\log x)'}{(\log x)^2}$

$= \dfrac{1 \cdot \log x - (x+1) \cdot \dfrac{1}{x}}{(\log x)^2}$

$= \dfrac{x \log x - (x+1)}{x(\log x)^2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{x \log x - x - 1}{x(\log x)^2}}$

（3）$y' = \dfrac{1}{x^2 - x + 1} \cdot (x^2 - x + 1)'$

$= \boldsymbol{\dfrac{2x - 1}{x^2 - x + 1}}$

（4）$y' = (\cos x)' \log(\sin x) + \cos x \{\log(\sin x)\}'$

$= -\sin x \log(\sin x) + \cos x \cdot \dfrac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)'$

$= -\sin x \log(\sin x) + \dfrac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos x$

$= \boldsymbol{-\sin x \log(\sin x) + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}}$

41（1）　$x > 1$ より，$x + 1 > 0$，$x > 0$，$x - 1 > 0$ であるから

$y = \log(x+1)^2 - \log x(x-1)$

$= 2\log(x+1) - \{\log x + \log(x-1)\}$

$= 2\log(x+1) - \log x - \log(x-1)$

よって

$y' = 2 \cdot \dfrac{1}{x+1} \cdot (x+1)' - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} \cdot (x-1)'$

$= \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}$

$= \dfrac{2x(x-1) - (x+1)(x-1) - x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{2x^2 - 2x - (x^2 - 1) - x^2 - x}{x(x+1)(x-1)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{-3x + 1}{x(x+1)(x-1)}}$

（2）　$\dfrac{x^2}{\cos x} > 0$　かつ　$x^2 > 0$ より，$\cos x > 0$ であるから

$y = \log x^2 - \log(\cos x)$

$= 2\log x - \log(\cos x)$

よって

$y' = 2 \cdot \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)'$

$= \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)$

$= \dfrac{2}{x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2}{x} + \tan x}$

（3）　$3^x > 0$，$x^2 + 2 > 0$ であるから

$y = \log 3^x - \log \sqrt{x^2 + 2}$

$= x \log 3 - \dfrac{1}{2} \log(x^2 + 2)$

よって

$y' = \log 3 - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2 + 2} \cdot (x^2 + 2)'$

$= \log 3 - \dfrac{1}{2(x^2 + 2)} \cdot (2x)$

$= \log 3 - \dfrac{x}{x^2 + 2}$

$= \dfrac{\log 3(x^2 + 2) - x}{x^2 + 2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{x^2 \log 3 - x + 2\log 3}{x^2 + 2}}$

（4）　$x^2 + 1 > 0$，また，$x^3 > 0$ より，$x > 0$ であるから

$y = \log \sqrt[3]{x^2 + 1} + \log \sqrt{x^3}$

$= \dfrac{1}{3} \log(x^2 + 1) + \dfrac{3}{2} \log x$

よって

$y' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' + \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{1}{3(x^2 + 1)} \cdot (2x) + \dfrac{3}{2x}$

$= \dfrac{2x \cdot 2x + 3 \cdot 3(x^2 + 1)}{6x(x^2 + 1)}$

$= \dfrac{4x^2 + 9x^2 + 9}{6x(x^2 + 1)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{13x^2 + 9}{6x(x^2 + 1)}}$

42（1）$y' = \boldsymbol{\pi x^{\pi - 1}}$

（2）　$v = u^{-e}$

よって

$y' = -eu^{-e-1}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{e}{u^{e+1}}}$

（3）　$y' = \sqrt{2}(\sqrt{2}x - 3)^{\sqrt{2}-1} \cdot (\sqrt{2}x - 3)'$

$= \sqrt{2}(\sqrt{2}x - 3)^{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{2}$

$= \boldsymbol{2(\sqrt{2}x - 3)^{\sqrt{2}-1}}$

43（1）両辺の自然対数をとると

$\log y = \log(2x)^x$

$= x \log 2x$

両辺を x で微分すると

$\dfrac{d}{dy}(\log y) \dfrac{dy}{dx} = x' \log 2x + x(\log 2x)'$

$\dfrac{1}{y} \cdot y' = \log 2x + x \cdot \dfrac{1}{2x} \cdot (2x)'$

$= \log 2x + 1$

よって

$y' = y(\log 2x + 1)$

$= \boldsymbol{(2x)^x(\log 2x + 1)}$

（2）両辺の自然対数をとると

$\log y = \log x^{x^2}$

$= x^2 \log x$

両辺を x で微分すると

$\dfrac{d}{dy}(\log y) \dfrac{dy}{dx} = (x^2)' \log x + x^2(\log x)'$

$\dfrac{1}{y} \cdot y' = 2x \log x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x}$

$= 2x \log x + x$

$= x(2\log x + 1)$

よって

$y' = y \cdot x(2\log x + 1)$

$y' = x^{x^2} \cdot x(2\log x + 1)$

$= \boldsymbol{x^{x^2+1}(2\log x + 1)}$

44（1）　$y' = \dfrac{1}{x^2-1} \cdot (x^2-1)'$

$= \dfrac{1}{x^2-1} \cdot 2x$

$= \boldsymbol{\dfrac{2x}{x^2-1}}$

（2）　$y' = \dfrac{1}{e^x-2} \cdot (e^x-2)'$

$= \dfrac{1}{e^x-2} \cdot e^x$

$= \boldsymbol{\dfrac{e^x}{e^x-2}}$

（3）　$y' = \dfrac{1}{3-x} \cdot (3-x)'$

$= \dfrac{1}{3-x} \cdot (-1)$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{x-3}}$

45（1）　$y' = \boldsymbol{\dfrac{1}{x\log 3}}$

（2）　$y' = \dfrac{1}{(2x+3)\log 10} \cdot (2x+3)'$

$= \boldsymbol{\dfrac{2}{(2x+3)\log 10}}$

（3）　$y' = 2\log_2 x \cdot (\log_2 x)'$

$= 2\log_2 x \cdot \dfrac{1}{x\log 2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2\log_2 x}{x\log 2}}$

（4）　$(u-4)\sqrt{u^2+3} > 0$　かつ　$\sqrt{u^2+3} > 0$ より，$u-4 > 0$ であるから

$v = \log_3(u-4) + \log_3\sqrt{u^2+3}$

$= \log_3(u-4) + \dfrac{1}{2}\log_3(u^2+3)$

よって

$v' = \dfrac{1}{(u-4)\log 3} \cdot (u-4)'$

$+ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{(u^2+3)\log 3} \cdot (u^2+3)'$

$= \dfrac{1}{(u-4)\log 3} + \dfrac{2u}{2(u^2+3)\log 3}$

$= \dfrac{(u^2+3) + u(u-4)}{(u-4)(u^2+3)\log 3}$

$= \dfrac{u^2+3+u^2-4u}{(u-4)(u^2+3)\log 3}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2u^2-4u+3}{(u-4)(u^2+3)\log 3}}$

46（1）　$x = \sin\dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

（2）　$x = \sin\dfrac{\pi}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

（3）　$x = \sin\dfrac{\pi}{6} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

47　$\mathrm{AB} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

（1）　$\sin A = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ であるから

$\boldsymbol{A = \sin^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

（2）　$\cos B = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ であるから

$\boldsymbol{B = \cos^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

（3）　$\tan B = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{1}{2}$ であるから

$\boldsymbol{B = \tan^{-1}\dfrac{1}{2}}$

48（1）$y = \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと

$\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$(0 \leqq y \leqq \pi)$ であるから，$y = \dfrac{\pi}{4}$

よって，$\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

（2）$y = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと

$\tan y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$y = \dfrac{\pi}{6}$

よって，$\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

（3）$\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

$y = \sin^{-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ とおくと

$\sin y = \dfrac{1}{2}$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$y = \dfrac{\pi}{6}$

よって，$\sin^{-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

49（1）$y = \sin^{-1} 0$ とおくと

$\sin y = 0$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$y = 0$

よって，$\sin^{-1} 0 = \mathbf{0}$

（2）$y = \cos^{-1}(-1)$ とおくと

$\cos y = -1$　$(0 \leqq y \leqq \pi)$ であるから，$y = \pi$

よって，$\cos^{-1}(-1) = \boldsymbol{\pi}$

（3）$y = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$ とおくと

$\tan y = -\sqrt{3}$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$y = -\dfrac{\pi}{3}$

よって，$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \boldsymbol{-\dfrac{\pi}{3}}$

（4）$y = \sin^{-1}(-1)$ とおくと

$\sin y = -1$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$y = -\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\sin^{-1}(-1) = \boldsymbol{-\dfrac{\pi}{2}}$

（5）$y = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ とおくと

$\cos y = -\dfrac{1}{2}$　$(0 \leqq y \leqq \pi)$ であるから，$y = \dfrac{2}{3}\pi$

よって，$\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$

（6）$y = \tan^{-1}(-1)$ とおくと

$\tan y = -1$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$y = -\dfrac{\pi}{4}$

よって，$\tan^{-1}(-1) = \boldsymbol{-\dfrac{\pi}{4}}$

50（1）　$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot (3x)'$

$= \boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}}$

（2）　$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)'$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{2-x^2}{2}}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}}$

（3）　$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)'$

$= \boldsymbol{-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}$

（4）　$y' = \dfrac{(\sin^{-1} x)' \cdot x - \sin^{-1} x \cdot (x)'}{x^2}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \sin^{-1} x}{x^2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{x - \sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x}{x^2\sqrt{1-x^2}}}$

（5）　$y' = (x)' \cdot \cos^{-1} x + x \cdot (\cos^{-1} x)'$

$= \cos^{-1} x + x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$= \boldsymbol{\cos^{-1} x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

（6）　$y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)'$

$= \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{3+x^2}{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$= \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3+x^2}}$

（7）　$y' = 2\tan^{-1} x \cdot (\tan^{-1} x)'$

$= 2\tan^{-1} x \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2\tan^{-1} x}{1+x^2}}$

（8）　$y' = \dfrac{1}{1+(-\sqrt{x})^2} \cdot (-\sqrt{x})'$

$= -\dfrac{1}{1+x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}}$

51（1）$-a < x < a$ より，$-1 < \dfrac{x}{a} < 1$

$\left(\sin^{-1} \dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} \cdot \left(\dfrac{x}{a}\right)'$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} \cdot \dfrac{1}{a}$

$= \dfrac{1}{a\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2}}}$

$= \dfrac{1}{a \cdot \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{|a|}}$

$= \dfrac{1}{a \cdot \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}}$　（$a > 0$ より）

$= \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$\left(\cos^{-1} \dfrac{x}{a}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} \cdot \left(\dfrac{x}{a}\right)'$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} \cdot \dfrac{1}{a}$

$= -\dfrac{1}{a\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2}}}$

$= -\dfrac{1}{a \cdot \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{|a|}}$

$= -\dfrac{1}{a \cdot \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}}$　（$a > 0$ より）

$= -\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

よって

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0$

（2）　$f(a) = \sin^{-1} \dfrac{a}{a} + \cos^{-1} \dfrac{a}{a}$

$= \sin^{-1} 1 + \cos^{-1} 1$

$= \dfrac{\pi}{2} + 0 = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

$f(0) = \sin^{-1} \dfrac{0}{a} + \cos^{-1} \dfrac{0}{a}$

$= \sin^{-1} 0 + \cos^{-1} 0$

$= 0 + \dfrac{\pi}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

$f(-a) = \sin^{-1} \dfrac{-a}{a} + \cos^{-1} \dfrac{-a}{a}$

$= \sin^{-1}(-1) + \cos^{-1}(-1)$

$= -\dfrac{\pi}{2} + \pi = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

52（1）　$f(x) = x^3 - 3x - 1$ とおくと，$f(x)$ は区間 $[-1, 1]$ で連続である．

また

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 1$

$= -1 + 3 - 1 = 1 > 0$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 1$

$= 1 - 3 - 1 = -3 < 0$

よって，中間値の定理より，方程式 $f(x) = 0$ は，区間 $(-1, 1)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

（2）　$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$ とおくと，$f(x)$ は区間 $[-1, 1]$ で連続である．

また

$$f(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) - 1$$
$$= 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = -1 < 0$$
$$f(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 - 1$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 3 > 0$$

よって，中間値の定理より，方程式 $f(x) = 0$ は，区間 $(-1, 1)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

53（1）　$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - x$ とおくと，$f(x)$ は区間 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ で連続である．

また

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$
$$f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 - 1$$
$$= 0 - 1 = -1 < 0$$

よって，中間値の定理より，方程式 $f(x) = 0$ すなわち $\log_{\frac{1}{2}} x = x$ は，区間 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

（2）　$f(x) = e^x - 2$ とおくと，$f(x)$ は区間 $[0,\ 1]$ で連続である．

また

$$f(0) = e^0 - 2$$
$$= 1 - 2 = -1 < 0$$
$$f(1) = e^1 - 2$$
$$= e - 2 > 0 \qquad (e \fallingdotseq 2.718\cdots)$$

よって，中間値の定理より，方程式 $f(x) = 0$ すなわち $e^x = 2$ は，区間 $(0,\ 1)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつので，$e^x = 2$ を満たす x の値が 0 と 1 の間に存在する．

CHECK

54（1）　$y' = 7(x^3 + 2x^2 - x + 3)^6(x^3 + 2x^2 - x + 3)'$

$$= \boldsymbol{7(x^3 + 2x^2 - x + 3)^6(3x^2 + 4x - 1)}$$

（2）　$y' = -\dfrac{3\{(x^2+4)^3\}'}{\{(x^2+4)^3\}^2}$

$$= -\frac{3 \cdot 3(x^2+4)^2(x^2+4)'}{(x^2+4)^6}$$
$$= -\frac{9 \cdot 2x}{(x^2+4)^4}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{18x}{(x^2+4)^4}}$$

〔別解〕

$y = 3(x^2+4)^{-3}$ であるから

$$y' = 3 \cdot \{-3(x^2+4)^{-4}(x^2+4)'\}$$
$$= -9(x^2+4)^{-4} \cdot 2x$$
$$= -18x(x^2+4)^{-4}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{18x}{(x^2+4)^4}}$$

（3）　$v = (u^3 + 6u - 7)^{\frac{1}{4}}$ であるから

$$v' = \frac{1}{4}(u^3 + 6u - 7)^{-\frac{3}{4}}(u^3 + 6u - 7)'$$
$$= \frac{1}{4}(u^3 + 6u - 7)^{-\frac{3}{4}}(3u^2 + 6)$$
$$= \boldsymbol{\frac{3u^2 + 6}{4\sqrt[4]{(u^3 + 6u - 7)^3}}}$$

（4）　$u = (2-t)^{-\frac{2}{3}}$ であるから

$$u' = -\frac{2}{3}(2-t)^{-\frac{5}{3}}(2-t)'$$
$$= -\frac{2}{3\sqrt[3]{(2-t)^5}} \cdot (-1)$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3(2-t)\sqrt[3]{(2-t)^2}}}$$

55（1）　$y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ であるから

$$y' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \boldsymbol{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

（2）　$y = (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}}$ であるから

$$y' = \frac{1}{2}(1 + \sin x)^{-\frac{1}{2}}(1 + \sin x)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin x}} \cdot \cos x$$
$$= \boldsymbol{\frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}}}$$

（3）　$v' = (2\sin u - 1)'(1 + \cos^2 u) + (2\sin u - 1)(1 + \cos^2 u)'$

$$= 2\cos u(1 + \cos^2 u) + (2\sin u - 1) \cdot 2\cos u \cdot (\cos u)'$$
$$= 2\cos u(1 + \cos^2 u) + 2\cos u(2\sin u - 1) \cdot (-\sin u)$$
$$= 2\cos u(1 + \cos^2 u) - 2\sin u\cos u(2\sin u - 1)$$
$$= 2\cos u\{1 + \cos^2 u - \sin u(2\sin u - 1)\}$$
$$= \boldsymbol{2\cos u(1 + \cos^2 u - 2\sin^2 u + \sin u)}$$

（4）　$y' = 3\sin^2(2x+1)\{\sin(2x+1)\}'$

$$= 3\sin^2(2x+1) \cdot \cos(2x+1) \cdot (2x+1)'$$
$$= 3\sin^2(2x+1)\cos(2x+1) \cdot 2$$
$$= \boldsymbol{6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)}$$

（5）　$y' = -\dfrac{\{\cos^4(2x-3)\}'}{\{\cos^4(2x-3)\}^2}$

$$= -\frac{4\cos^3(2x-3)\{\cos(2x-3)\}'}{\cos^8(2x-3)}$$
$$= -\frac{4\{-\sin(2x-3)\}(2x-3)'}{\cos^5(2x-3)}$$
$$= \frac{4\sin(2x-3) \cdot 2}{\cos^5(2x-3)} = \boldsymbol{\frac{8\sin(2x-3)}{\cos^5(2x-3)}}$$

〔別解〕

$y = \{\cos(2x-3)\}^{-4}$ であるから

$$y' = -4\{\cos(2x-3)\}^{-5} \cdot \{\cos(2x-3)\}'$$
$$= -\frac{4}{\cos^5(2x-3)} \cdot \{-\sin(2x-3)\} \cdot (2x-3)'$$
$$= \frac{4\sin(2x-3)}{\cos^5(2x-3)} \cdot 2 = \boldsymbol{\frac{8\sin(2x-3)}{\cos^5(2x-3)}}$$

（6） $s' = \dfrac{\{\sin(5t-\pi)\}' e^{3t-2} - \sin(5t-\pi)(e^{3t-2})'}{(e^{3t-2})^2}$

$= \dfrac{\cos(5t-\pi)(5t-\pi)' e^{3t-2} - \sin(5t-\pi)e^{3t-2}(3t-2)'}{(e^{3t-2})^2}$

$= \dfrac{5e^{3t-2}\cos(5t-\pi) - 3e^{3t-2}\sin(5t-\pi)}{(e^{3t-2})^2}$

$= \dfrac{e^{3t-2}\{5\cos(5t-\pi) - 3\sin(5t-\pi)\}}{(e^{3t-2})^2}$

$= \dfrac{e^{3t-2}\{5\cos(5t-\pi) - 3\sin(5t-\pi)\}}{(e^{3t-2})^2}$

$= \dfrac{5\cos(5t-\pi) - 3\sin(5t-\pi)}{e^{3t-2}}$

$= \dfrac{5(-\cos 5t) - 3(-\sin 5t)}{e^{3t-2}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{-5\cos 5t + 3\sin 5t}{e^{3t-2}}}$

56（1） $y' = \dfrac{1}{(3x+1)\log 7} \cdot (3x+1)'$

$= \boldsymbol{\dfrac{3}{(3x+1)\log 7}}$

（2） $y' = \dfrac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)'$

$= \dfrac{\cos x}{\sin x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{\sin x \cos x}}$

（3） $y' = x' \log(x^2+2x+3) + x\{\log(x^2+2x+3)\}'$

$= \log(x^2+2x+3) + x \cdot \dfrac{1}{x^2+2x+3} \cdot (x^2+2x+3)'$

$= \log(x^2+2x+3) + \dfrac{x(2x+2)}{x^2+2x+3}$

$= \boldsymbol{\log(x^2+2x+3) + \dfrac{2x(x+1)}{x^2+2x+3}}$

（4） $y' = \dfrac{1}{\dfrac{(3u+4)^2}{u^2-1}} \cdot \left\{\dfrac{(3u+4)^2}{u^2-1}\right\}'$

$= \dfrac{u^2-1}{(3u+4)^2} \cdot \dfrac{\{(3u+4)^2\}'(u^2-1) - (3u+4)^2(u^2-1)'}{(u^2-1)^2}$

$= \dfrac{1}{(3u+4)^2} \cdot \dfrac{2(3u+4)\cdot 3 \cdot (u^2-1) - (3u+4)^2 \cdot 2u}{(u^2-1)}$

$= \dfrac{6(3u+4)(u^2-1) - 2u(3u+4)^2}{(3u+4)^2(u^2-1)}$

$= \dfrac{(3u+4)\{6(u^2-1) - 2u(3u+4)\}}{(3u+4)^2(u^2-1)}$

$= \dfrac{6u^2 - 6 - 6u^2 - 8u}{(3u+4)(u^2-1)}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{8u+6}{(3u+4)(u^2-1)}}$

〔別解〕

$\dfrac{(3u+4)^2}{u^2-1} > 0$，$(3u+4)^2 > 0$ であるから，$u^2 - 1 > 0$

よって，$y = \log(3u+4)^2 - \log(u^2-1)$

$= 2\log|3u+4| - \log(u^2-1)$

$y' = 2 \cdot \dfrac{1}{3u+4} \cdot (3u+4)' - \dfrac{1}{u^2-1} \cdot (u^2-1)'$

$= \dfrac{6}{3u+4} - \dfrac{2u}{u^2-1}$

$= \dfrac{6(u^2-1) - 2u(3u+4))}{(3u+4)(u^2-1)}$

$= \dfrac{6u^2 - 6 - 6u^2 - 8u}{(3u+4)(u^2-1)}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{8u+6}{(3u+4)(u^2-1)}}$

57　両辺の自然対数をとると

$\log y = \log x^{2x}$

$= 2x \log x$

両辺を x で微分すると

$\dfrac{d}{dy}(\log y)\dfrac{dy}{dx} = (2x)' \log x + 2x(\log x)'$

$\dfrac{1}{y} \cdot y' = 2\log x + 2x \cdot \dfrac{1}{x}$

$= 2\log x + 2$

$= 2(\log x + 1)$

よって

$y' = y \cdot 2(\log x + 1)$

$y' = x^{2x} \cdot 2(\log x + 1)$

$= \boldsymbol{2x^{2x}(\log x + 1)}$

58（1）　$B = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ より，$\sin B = \dfrac{3}{5}$

また，図より，$\sin B = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{5}$

よって，$\dfrac{\mathrm{AC}}{5} = \dfrac{3}{5}$ であるから，$\mathrm{AC} = \boldsymbol{3}$

（2）　$A = \cos^{-1}\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ より，$\cos A = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

また，図より，$\cos A = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{5}$

よって，$\dfrac{\mathrm{AC}}{5} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ であるから，$\mathrm{AC} = \sqrt{5}$

したがって

$\mathrm{BC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2}$

$= \sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2}$

$= \sqrt{25 - 5}$

$= \sqrt{20} = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$

59（1） $y = \tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ とおくと

$\tan y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$y = -\dfrac{\pi}{6}$

よって，$\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{\pi}{6}}$

（2） $\tan\dfrac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$y = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$ とおくと

$\tan y = -\sqrt{3}$　$\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$y = -\dfrac{\pi}{3}$

よって，$\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{2\pi}{3}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{\pi}{3}}$

60（1） $2\sin^{-1} x = \pi$ より，$\sin^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$x = \sin\dfrac{\pi}{2} = \boldsymbol{1}$

（2）　$2x - 1 = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ であるから

$2x = \dfrac{1}{2} + 1$

$$2x = \frac{3}{2}$$
$$x = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

61（1）$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)'$

$= \mathbf{-\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}$

（2）$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{4}\right)^2}} \cdot \left(\dfrac{x}{4}\right)'$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{16}}} \cdot \dfrac{1}{4}$

$= \dfrac{1}{4\sqrt{\dfrac{16-x^2}{16}}}$

$= \mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}}$

（3）$y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{5}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{2x}{5}\right)'$

$= \dfrac{1}{1+\dfrac{4x^2}{25}} \cdot \dfrac{2}{5}$

$= \dfrac{2}{5+\dfrac{4x^2}{5}} = \mathbf{\dfrac{10}{25+4x^2}}$

（4）$y' = (\sin^{-1}x)'\cos^{-1}x + \sin^{-1}x(\cos^{-1}x)'$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \cos^{-1}x + sin^{-1}x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$= \mathbf{\dfrac{\cos^{-1}x - \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}}$

（5）$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\tan^{-1}x}} \cdot (\tan^{-1}x)'$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{\tan^{-1}x}} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$

$= \mathbf{\dfrac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x}}}$

（6）$y' = \dfrac{(\sin^{-1}x)'\cos^{-1}x - \sin^{-1}x(\cos^{-1}x)'}{(\cos^{-1}x)^2}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \cos^{-1}x - \sin^{-1}x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\cos^{-1}x)^2}$

$= \mathbf{\dfrac{\cos^{-1}x + \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}(\cos^{-1}x)^2}}$

62　$f(x) = 2^x + x - 2$ とおくと，$f(x)$ は区間 $[0,\ 1]$ で連続である．また

$f(0) = 2^0 + 0 - 2$

$= 1 - 2 = -1 < 0$

$f(1) = 2^1 + 1 - 2$

$= 2 + 1 - 2 = 1 > 0$

よって，中間値の定理より，方程式 $f(x) = 0$ すなわち $2^x + x = 2$ は，区間 $(0,\ 1)$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ．

STEP UP

63（1）　$y = \log|2t-1| - \log(t^2+1)$ であるから

$y' = \dfrac{1}{2t-1} \cdot (2t-1)' - \dfrac{1}{t^2+1} \cdot (t^2+1)'$

$= \dfrac{2}{2t-1} - \dfrac{2t}{t^2+1}$

$= \dfrac{2(t^2+1) - 2t(2t-1)}{(2t-1)(t^2+1)}$

$= \dfrac{2t^2+2-4t^2+2t}{(2t-1)(t^2+1)}$

$= \mathbf{\dfrac{-2t^2+2t+2}{(2t-1)(t^2+1)}}$

（2）　$y' = \dfrac{1}{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}} \cdot \left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)'$

$= \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

$\times \dfrac{(1+\tan x)'(1-\tan x) - (1+\tan x)(1-\tan x)'}{(1-\tan x)^2}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}(1-\tan x) - (1+\tan x)\left(-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}{(1+\tan x)(1-\tan x)}$

$= \dfrac{(1-\tan x) + (1+\tan x)}{(1-\tan^2 x)\cos^2 x}$

$= \dfrac{2}{\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x}$

$= \dfrac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$= \mathbf{\dfrac{2}{\cos 2x}}$

（3）　$y' = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)'$

$= \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{x^2}{x^2+1} \cdot \dfrac{1}{x^2}$

$= \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = \mathbf{0}$

（4）　$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \dfrac{(x)'\sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{(1+x^2)-x^2}{1+x^2}}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{1+x^2}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}} \cdot \dfrac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$= \sqrt{1+x^2} \cdot \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$= \mathbf{\dfrac{1}{1+x^2}}$

（5）
$$y' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)'$$
$$= \frac{1}{1+\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}} \times \frac{(1-\cos x)'\sin x-(1-\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$
$$= \frac{1}{1+\dfrac{1-2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}} \times \frac{\sin x\cdot\sin x-(1-\cos x)\cos x}{(\sin x)^2}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+1-2\cos x+\cos^2 x} \times \frac{\sin^2 x-\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{1-\cos x}{2-2\cos x} = \frac{1-\cos x}{2(1-\cos x)} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（6）
$$y' = \frac{1}{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}\cdot\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)'$$
$$= \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \times \frac{(x^2-x+1)'(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{(2x^3+x^2+x-1)-(2x^3-x^2+x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{2x^2-2}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2(x^2-1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}}$$

〔別解〕

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$$
$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$$

よって，$y=\log(x^2-x+1)-\log(x^2+x+1)$

したがって
$$y' = \frac{1}{x^2-x+1}\cdot(x^2-x+1)' - \frac{1}{x^2+x+1}\cdot(x^2+x+1)'$$
$$= \frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{(2x^3+x^2+x-1)-(2x^3-x^2+x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{2x^2-2}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2(x^2-1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}}$$

64（1）　両辺の絶対値の自然対数をとると
$$\log|y| = \log\left|x^2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right|$$
$$= \log|x^2|+\log\left|\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right|$$
$$= 2\log|x|+\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|$$
$$= 2\log|x|+\frac{1}{2}\{\log(1+x^2)-\log|1-x^2|\}$$

両辺を x で微分すると
$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}+\frac{1}{2}\left\{\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}-\frac{(1-x^2)'}{1-x^2}\right\}$$
$$= \frac{2}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}-\frac{-2x}{1-x^2}\right)$$
$$= \frac{2}{x}+\frac{x(1-x^2)+x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}$$
$$= \frac{2(1+x^2)(1-x^2)+2x^2}{x(1+x^2)(1-x^2)}$$
$$= \frac{2(1+x^2-x^4)}{x(1+x^2)(1-x^2)}$$

よって
$$y' = y\cdot\frac{2(1+x^2-x^4)}{x(1+x^2)(1-x^2)}$$
$$= x^2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{2(1+x^2-x^4)}{x(1+x^2)(1-x^2)}$$
$$= x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{2(1+x^2-x^4)}{x(1+x^2)(1-x^2)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2x(1+x^2-x^4)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1-x^2)^3}}}$$

（2）　$0 \leqq \cos^2 x \leqq 1$ より，$2-\cos^2 x > 0$，$2+\cos^2 x > 0$ であるから，両辺の自然対数をとると
$$\log y = \log\sqrt{\frac{2-\cos^2 x}{2+\cos^2 x}}$$
$$= \log\left(\frac{2-\cos^2 x}{2+\cos^2 x}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\{\log(2-\cos^2 x)-\log(2+\cos^2 x)\}$$

両辺を x で微分すると
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(2-\cos^2 x)'}{2-\cos^2 x}-\frac{(2+\cos^2 x)'}{2+\cos^2 x}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{-2\cos x(-\sin x)}{2-\cos^2 x}-\frac{2\cos x(-\sin x)}{2+\cos^2 x}\right\}$$
$$= \frac{\sin x\cos x}{2-\cos^2 x}+\frac{\sin x\cos x}{2+\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin x\cos x(2+\cos^2 x)+\sin x\cos(2-\cos^2 x)}{(2-\cos^2 x)(2+\cos^2 x)}$$
$$= \frac{4\sin x\cos x}{(2-\cos^2 x)(2+\cos^2 x)}$$

よって
$$y' = y\cdot\frac{4\sin x\cos x}{(2-\cos^2 x)(2+\cos^2 x)}$$
$$= \sqrt{\frac{2-\cos^2 x}{2+\cos^2 x}}\cdot\frac{4\sin x\cos x}{(2-\cos^2 x)(2+\cos^2 x)}$$
$$= \frac{\sqrt{2-\cos^2 x}}{\sqrt{2+\cos^2 x}}\cdot\frac{4\sin x\cos x}{(2-\cos^2 x)(2+\cos^2 x)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{4\sin x\cos x}{\sqrt{2-\cos^2 x}\sqrt{(2+\cos^2 x)^3}}}$$

65（1）　$-1 < x < 1$ より，$1-x>0,\ 1+x>0$ であるから

$$y=\frac{1}{2}\{\log(1-x)-\log(1+x)\}$$

よって

$$y'=\frac{1}{2}\left\{\frac{(1-x)'}{1-x}-\frac{(1+x)'}{1+x}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{(1-x)(1+x)}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{1-x^2}}$$

（2）　$y=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ より，$2y=\log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

これより，$e^{2y}=\dfrac{1-x}{1+x}$

$$e^{2y}(1+x)=1-x$$
$$e^{2y}+xe^{2y}=1-x$$
$$xe^{2y}+x=1-e^{2y}$$
$$(1+e^{2y})x=1-e^{2y}$$

$1+e^{2y}\neq 0$ であるから，$\boldsymbol{x=\dfrac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}}}$

（3）

$$\frac{dx}{dy}=\frac{(1-e^{2y})'(1+e^{2y})-(1-e^{2y})(1+e^{2y})'}{(1+e^{2y})^2}$$
$$=\frac{-e^{2y}\cdot 2\cdot(1+e^{2y})-(1-e^{2y})\cdot e^{2y}\cdot 2}{(1+e^{2y})^2}$$
$$=\frac{-2e^{2y}-2e^{4y}-2e^{2y}+2e^{4y}}{(1+e^{2y})^2}$$
$$=-\frac{4e^{2y}}{(1+e^{2y})^2}$$

（4）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$
$$=\frac{1}{-\frac{4e^{2y}}{(1+e^{2y})^2}}$$
$$=-\frac{(1+e^{2y})^2}{4e^{2y}}$$

ここで，$e^{2y}=\dfrac{1-x}{1+x}$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(1+\frac{1-x}{1+x}\right)^2}{4\cdot\frac{1-x}{1+x}}$$
$$=-\frac{\left(\frac{1+x+1-x}{1+x}\right)^2}{\frac{4(1-x)}{1+x}}$$
$$=-\frac{\left(\frac{2}{1+x}\right)^2}{\frac{4(1-x)}{1+x}}$$
$$=-\frac{\frac{4}{(1+x)^2}}{\frac{4(1-x)}{1+x}}$$
$$=-\frac{1}{(1-x)(1+x)}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{1-x^2}}$$

PLUS

66（1）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{3n^2+n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n+2)\cdot\frac{1}{n^2}}{(3n^2+n+4)\cdot\frac{1}{n^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{3}$$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ **に収束する．**

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\infty$$

よって，$\boldsymbol{\infty}$ **に発散する．**

（3）　与えられた数列は，$-1,\ 1, -1,\ 1, -1,\ \cdots$ となるから，**振動する．**

67（1）　$\left|\tan^{-1}\dfrac{1}{x}\right|<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\left|x\tan^{-1}\dfrac{1}{x}\right|<|x|\cdot\dfrac{\pi}{2}$

これより，$-\dfrac{\pi|x|}{2}<x\tan^{-1}\dfrac{1}{x}<\dfrac{\pi|x|}{2}$

ここで

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\pi|x|}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\pi|x|}{2}=0$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}x\tan^{-1}\frac{1}{x}=0$

以上より，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\tan^{-1}\frac{1}{x}=0=f(0)$

したがって，$f(x)$ は $x=0$ において，連続である．

（2）

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h\tan^{-1}\frac{1}{h}-0\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\tan^{-1}\frac{1}{h}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to +0}\tan^{-1}\frac{1}{h}=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{h\to -0}\tan^{-1}\frac{1}{h}=-\frac{\pi}{2}$$

これより，$f'(0)$ は存在しないので，$f(x)$ は $x=0$ において微分可能ではない．

68

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{(\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+2})(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2})}{x(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2})}$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{(3x+2)-(x+2)}{x(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2})}$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{2x}{x(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2})}$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{2}{(\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+2})}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\cos(x+\theta)$

$$=\cos\theta$$

以上より, $f(x)$ が $x=0$ で連続であるための条件は, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\cos\theta$

したがって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}$

69（1）　$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{(0+h)^m-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to+0}\frac{h^m}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to+0}h^{m-1}$

$m=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{h\to+0}h^{m-1}=\lim_{h\to+0}h^0=1$

$m\geqq 2$ のとき，$\displaystyle\lim_{h\to+0}h^{m-1}=0$

よって，$\boldsymbol{m\geqq 2}$ のとき，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$ となり，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能となる．

（2）　（1）より，$m\geqq 2$ のとき，$f'(x)$ は存在して

$$f'(x)=\begin{cases}mx^{m-1} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}$$

よって

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=0$

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{m(0+h)^{m-1}-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to+0}\frac{mh^{m-1}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to+0}mh^{m-2}$

ここで，$m\geqq 3$ であるから，$\displaystyle\lim_{h\to+0}mh^{m-2}=0$

よって，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h}=0$ となるので，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能である．

70　$x=2$ で連続なので，$\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)$ が存在し，

$\displaystyle\lim_{x\to2+0}f(x)=\lim_{x\to2-0}f(x)$

これより，$\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{x^2+ax-2}{x-2}=b\quad\cdots①$

左辺の極限値が存在することから，$\displaystyle\lim_{x\to2+0}(x^2+ax-2)=0$

よって，$2^2+a\cdot2-2=0$

$4+2a-2=0$

$2a=-2$

$a=-1$

これを ① に代入して

$\displaystyle b=\lim_{x\to2+0}\frac{x^2-x-2}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2+0}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2+0}(x+1)=3$

以上より，$\boldsymbol{a=-1,\ b=3}$

71（1）　$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

（2）　$\displaystyle f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{\sqrt{h+1}-1}{h}-\dfrac{1}{2}}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{2(\sqrt{h+1}-1)-h}{2h^2}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{2\sqrt{h+1}-(h+2)}{2h^2}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{\{2\sqrt{h+1}-(h+2)\}\{2\sqrt{h+1}+(h+2)\}}{2h^2\{2\sqrt{h+1}+(h+2)\}}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{4(h+1)-(h+2)^2}{2h^2\{2\sqrt{h+1}+(h+2)\}}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{4h+4-(h^2+4h+4)}{2h^2\{2\sqrt{h+1}+(h+2)\}}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{-h^2}{2h^2\{2\sqrt{h+1}+(h+2)\}}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{-1}{2\{2\sqrt{h+1}+(h+2)\}}$

$\displaystyle=\frac{-1}{2\{2\sqrt{0+1}+(0+2)\}}=\boldsymbol{-\frac{1}{8}}$

■