3章　積分法

§2　積分の計算 (p.39〜p.50)

BASIC

教科書にしたがって，積分定数 C は省略

162 (1)　$x^3+x=t$ とおくと，$(3x^2+1)\,dx=dt$

よって

$$\text{与式}=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4=\boldsymbol{\frac{1}{4}(x^3+x)^4}$$

(2)　$x^2+1=t$ とおくと，$2x\,dx=dt$ より，$x\,dx=\frac{1}{2}dt$

よって

$$\text{与式}=\int\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}t\sqrt{t}=\boldsymbol{\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

または，$\boldsymbol{\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}}$

〔別解〕

$\sqrt{x^2+1}=t$ とおくと，$x^2+1=t^2$

これより，$2x\,dx=2t\,dt$，すなわち，$x\,dx=t\,dt$

よって

$$\text{与式}=\int t\cdot t\,dt=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3\,dt=\frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3=\boldsymbol{\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

(3)　$1-2x=t$ とおくと，$-2\,dx=dt$ より，$dx=-\frac{1}{2}dt$

よって

$$\text{与式}=\int\sqrt{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)=-\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}t\sqrt{t}=\boldsymbol{-\frac{1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x}}$$

または，$\boldsymbol{\frac{1}{3}\sqrt{(1-2x)^3}}$

〔別解〕

$\sqrt{1-2x}=t$ とおくと，$1-2x=t^2$

これより，$-2\,dx=2t\,dt$，すなわち，$dx=-t\,dt$

よって

$$\text{与式}=\int t\cdot(-t\,dt)=-\int t^2\,dt=-\frac{1}{3}t^3\,dt=-\frac{1}{3}(\sqrt{1-2x})^3=\boldsymbol{-\frac{1}{3}(1-2x)\sqrt{1-2x}}$$

(4)　$\log x+1=t$ とおくと，$\frac{1}{x}\,dx=dt$

よって

$$\text{与式}=\int(\log x+1)^2\cdot\frac{1}{x}\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3=\boldsymbol{\frac{1}{3}(\log x+1)^3}$$

(5)　$e^x=t$ とおくと，$e^x\,dx=dt$，また，$e^{2x}=t^2$

よって

$$\text{与式}=\int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt=\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|=\boldsymbol{\log\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)}$$

(6)　$\cos x+2=t$ とおくと，$-\sin x\,dx=dt$

これより，$\sin x\,dx=-dt$

よって

$$\text{与式}=\int t^3(-dt)=-\int t^3\,dt=-\frac{1}{4}t^4=\boldsymbol{-\frac{1}{4}(\cos x+2)^4}$$

(7)　$\sin x=t$ とおくと，$\cos x\,dx=dt$

よって

$$\text{与式}=\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=\tan^{-1}t=\boldsymbol{\tan^{-1}(\sin x)}$$

(8)　$2\tan x+3=t$ とおくと，$2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=dt$

これより，$\sec^2 x\,dx=\frac{1}{2}\,dt$

よって

$$\text{与式}=\frac{1}{2}\int t^5\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}t^6=\boldsymbol{\frac{1}{12}(2\tan x+3)^6}$$

163 (1)　$(\sin x+2)'=\cos x$ であるから

$$\text{与式}=\int\frac{(\sin x+2)'}{\sin x+2}\,dx=\log|\sin x+2|=\boldsymbol{\log(\sin x+2)}\quad(\sin x+2>0)$$

(2)　$(e^{2x}+3)'=e^{2x}\cdot 2=2e^{2x}$ であるから

$$与式 = \int \frac{(e^{2x}+3)'}{e^{2x}+3}\,dx$$
$$= \log|e^{2x}+3|$$
$$= \mathbf{\log(e^{2x}+3)} \quad (e^{2x}+3>0)$$

（3）$(x^2+2x-5)' = 2x+2 = 2(x+1)$ であるから

$$与式 = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+2x-5)'}{x^2+2x-5}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x-5)'}{x^2+2x-5}\,dx$$
$$= \mathbf{\frac{1}{2}\log|x^2+2x-5|}$$

（4）$(2x\sqrt{x}+1)' = (2x^{\frac{3}{2}}+1)' = 3x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x}$ であるから

$$与式 = \int \frac{\frac{1}{3}(2x\sqrt{x}+1)'}{2x\sqrt{x}+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{(2x\sqrt{x}+1)'}{2x\sqrt{x}+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\log|2x\sqrt{x}+1|$$
$$= \mathbf{\frac{1}{3}\log(2x\sqrt{x}+1)} \quad (2x\sqrt{x}+1>0)$$

164（1）　$3x-2=t$ とおくと，$3\,dx = dt$ より，$dx = \frac{1}{3}dt$

また，x と t の対応は

x	$1 \to 2$
t	$1 \to 4$

よって

$$与式 = \int_1^4 \sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\int_1^4 t^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$= \frac{2}{9}\left[t\sqrt{t}\right]_1^4$$
$$= \frac{2}{9}(4\sqrt{4}-1\sqrt{1})$$
$$= \frac{2}{9}(8-1)$$
$$= \frac{2}{9}\cdot 7 = \mathbf{\frac{14}{9}}$$

〔別解〕

$\sqrt{3x-2}=t$ とおくと，$3x-2=t^2$ であるから

$3\,dx = 2t\,dt$，すなわち，$dx = \frac{2}{3}t\,dt$

また，x と t の対応は

x	$1 \to 2$
t	$1 \to 2$

よって

$$与式 = \int_1^2 t\cdot\frac{2}{3}t\,dt$$
$$= \frac{2}{3}\int_1^2 t^2\,dt$$
$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^2$$
$$= \frac{2}{9}\left[t^3\right]_1^2$$
$$= \frac{2}{9}(2^3-1^3)$$
$$= \frac{2}{9}\cdot 7 = \mathbf{\frac{14}{9}}$$

（2）　$x^3+1=t$ とおくと，$3x^2\,dx = dt$，すなわち，$x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to 2$
t	$1 \to 9$

よって

$$与式 = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\int_1^9 t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$= \frac{1}{3}\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^9$$
$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{t}\right]_1^9$$
$$= \frac{2}{3}(\sqrt{9}-\sqrt{1})$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 2 = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

〔別解〕

$\sqrt{x^3+1}=t$ とおくと，$x^3+1=t^2$ であるから

$3x^2\,dx = 2t\,dt$ すなわち，$x^2\,dx = \frac{2}{3}t\,dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to 2$
t	$1 \to 3$

よって

$$与式 = \int_1^3 \frac{1}{t}\cdot\frac{2}{3}t\,dt$$
$$= \frac{2}{3}\int_1^3 dt$$
$$= \frac{2}{3}\left[t\right]_1^3$$
$$= \frac{2}{3}(3-1)$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 2 = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

（3）　$\cos x = t$ とおくと，$-\sin x\,dx = dt$

すなわち，$\sin x\,dx = -dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to \frac{\pi}{4}$
t	$1 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって

$$与式 = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^3\,(-dt)$$
$$= -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^3\,dt$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 t^3\,dt$$
$$= \left[\frac{1}{4}t^4\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$
$$= \frac{1}{4}\left\{1^4-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \mathbf{\frac{3}{16}}$$

（4）　$e^x+1=t$ とおくと，$e^x\,dx = dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to 1$
t	$2 \to e+1$

よって

$$\text{与式} = \int_2^{e+1} \frac{1}{t^2}\,dt$$
$$= \int_2^{e+1} t^{-2}\,dt$$
$$= \Big[-t^{-1}\Big]_2^{e+1}$$
$$= -\left[\frac{1}{t}\right]_2^{e+1}$$
$$= -\left(\frac{1}{e+1} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{(e+1)-2}{2(e+1)} = \boldsymbol{\frac{e-1}{2(e+1)}}$$

165　教科書の $G(x)$ 等をそのまま使用.

（1）　$f(x) = x+3,\quad g(x) = \cos x$ とすると

$$G(x) = \int \cos x\,dx = \sin x$$
$$f'(x) = 1$$

よって

$$\text{与式} = (x+3)\cdot\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx$$
$$= (x+3)\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= \boldsymbol{(x+3)\sin x + \cos x}$$

（2）　$f(x) = 2x-1,\quad g(x) = e^x$ とすると

$$G(x) = \int e^x\,dx = e^x$$
$$f'(x) = 2$$

よって

$$\text{与式} = (2x-1)\cdot e^x - \int 2\cdot e^x\,dx$$
$$= (2x-1)e^x - 2e^x$$
$$= \boldsymbol{(2x-3)e^x}$$

166　教科書の $G(x)$ 等をそのまま使用.

（1）　$f(x) = x+1,\quad g(x) = \log x$ とすると

$$F(x) = \int (x+1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x$$
$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

よって

$$\text{与式} = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\log x - \int \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\log x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx$$
$$= \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\log x - \frac{1}{4}x^2 - x}$$

（2）　$f(x) = \dfrac{1}{x^2},\quad g(x) = \log x$ とすると

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$$
$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

よって

$$\text{与式} = \left(-\frac{1}{x}\right)\log x - \int \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= -\frac{1}{x}\log x + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= -\frac{1}{x}\log x - \frac{1}{x}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{x}(\log x + 1)}$$

167（1）$\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$

$$\text{与式} = (x^2+2x)\cdot\sin x - \int (x^2+2x)'\cdot\sin x\,dx$$
$$= (x^2+2x)\sin x - \int (2x+2)\sin x\,dx$$
$$= (x^2+2x)\sin x - 2\int (x+1)\sin x\,dx$$
$$= (x^2+2x)\sin x$$
$$-2\left\{(x+1)\cdot(-\cos x) - \int (x+1)'(-\cos x)\,dx\right\}$$
$$= (x^2+2x)\sin x - 2\left\{-(x+1)\cos x + \int \cos x\,dx\right\}$$
$$= (x^2+2x)\sin x + 2(x+1)\cos x - 2\sin x$$
$$= \boldsymbol{(x^2+2x-2)\sin x + 2(x+1)\cos x}$$

（2）$\displaystyle\int e^{\frac{x}{2}}\,dx = 2e^{\frac{x}{2}}$

$$\text{与式} = (2x^2-1)\cdot 2e^{\frac{x}{2}} - \int (2x^2-1)'\cdot 2e^{\frac{x}{2}}\,dx$$
$$= (4x^2-2)e^{\frac{x}{2}} - 2\int 4x\cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx$$
$$= (4x^2-2)e^{\frac{x}{2}} - 8\int xe^{\frac{x}{2}}\,dx$$
$$= (4x^2-2)e^{\frac{x}{2}} - 8\left\{x\cdot 2e^{\frac{x}{2}} - \int (x)'\cdot 2e^{\frac{x}{2}}\,dx\right\}$$
$$= (4x^2-2)e^{\frac{x}{2}} - 16xe^{\frac{x}{2}} + 16\int e^{\frac{x}{2}}\,dx$$
$$= (4x^2-2)e^{\frac{x}{2}} - 16xe^{\frac{x}{2}} + 16\cdot 2e^{\frac{x}{2}}$$
$$= (4x^2-2-16x+32)e^{\frac{x}{2}}$$
$$= \boldsymbol{(4x^2-16x+30)e^{\frac{x}{2}}}$$

（3）$\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$

$$\text{与式} = (\log x)^2\cdot\frac{1}{3}x^3 - \int \{(\log x)^2\}'\cdot\frac{1}{3}x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3(\log x)^2 - \frac{1}{3}\int 2\log x\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3(\log x)^2 - \frac{2}{3}\int x^2\log x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3(\log x)^2$$
$$-\frac{2}{3}\left\{\log x\cdot\frac{1}{3}x^3 - \int (\log x)'\cdot\frac{1}{3}x^3\,dx\right\}$$
$$= \frac{1}{3}x^3(\log x)^2 - \frac{2}{9}x^3\log x + \frac{2}{9}\int \frac{1}{x}\cdot x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3(\log x)^2 - \frac{2}{9}x^3\log x + \frac{2}{9}\int x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3(\log x)^2 - \frac{2}{9}x^3\log x + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}x^3$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3(\log x)^2 - \frac{2}{9}x^3\log x + \frac{2}{27}x^3}$$

168（1） $与式 = \Big[(x+1)\cdot\sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(x+1)'\cdot\sin x\,dx$

$= (\pi+1)\sin\pi - (0+1)\sin 0 - \int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$= 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$

$= \cos\pi - \cos 0$

$= -1 - 1 = \mathbf{-2}$

（2） $与式 = \Big[(x+3)e^x\Big]_1^2 - \int_1^2 (x+3)'\cdot e^x\,dx$

$= (2+3)e^2 - (1+3)e^1 - \int_1^2 e^x\,dx$

$= 5e^2 - 4e - \Big[e^x\Big]_1^2$

$= 5e^2 - 4e - (e^2 - e^1)$

$\boldsymbol{= 4e^2 - 3e}$

（3） $与式 = \left[\left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)\log x\right]_1^e$

$- \int_1^e \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)\cdot(\log x)'\,dx$

$= \left(\frac{3}{2}e^2 + e\right)\log e - \left(\frac{3}{2} + 1\right)\log 1$

$- \int_1^e \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \left(\frac{3}{2}e^2 + e\right) - 0 - \int_1^e\left(\frac{3}{2}x + 1\right)dx$

$= \frac{3}{2}e^2 + e - \left[\frac{3}{4}x^2 + x\right]_1^e$

$= \frac{3}{2}e^2 + e - \left\{\left(\frac{3}{4}e^2 + e\right) - \left(\frac{3}{4} + 1\right)\right\}$

$= \frac{3}{2}e^2 + e - \left(\frac{3}{4}e^2 + e - \frac{7}{4}\right)$

$\boldsymbol{= \frac{3}{4}e^2 + \frac{7}{4}}$

（4） $\int e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -2e^{-\frac{x}{2}}$

$与式 = \left[x^2(-2e^{-\frac{x}{2}})\right]_0^1 - \int_0^1 (x^2)'\cdot(-2e^{-\frac{x}{2}})\,dx$

$= -2\left[x^2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1 + 4\int_0^1 xe^{-\frac{x}{2}}\,dx$

$= -2(e^{-\frac{1}{2}} - 0)$

$+ 4\left\{\left[x(-2e^{-\frac{x}{2}})\right]_0^1 - \int (x)'(-2e^{-\frac{x}{2}})\,dx\right\}$

$= -2e^{-\frac{1}{2}} + 4\left(-2\left[xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1 + 2\int e^{-\frac{x}{2}}\,dx\right)$

$= -2e^{-\frac{1}{2}} - 8\left(e^{-\frac{1}{2}} - 0 - \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1\right)$

$= -2e^{-\frac{1}{2}} - 8\left\{e^{-\frac{1}{2}} + 2(e^{-\frac{1}{2}} - e^0)\right\}$

$= -2e^{-\frac{1}{2}} - 8(3e^{-\frac{1}{2}} - 2)$

$= -26e^{-\frac{1}{2}} + 16 = \boldsymbol{-\frac{26}{\sqrt{e}} + 16}$

169（1） $3x+2 = t$ とおくと，$3dx = dt$ より，$dx = \frac{1}{3}\,dt$

また，$x = \frac{t-2}{3}$

よって

$与式 = \int \frac{\frac{t-2}{3}+1}{t^4}\cdot\frac{1}{3}\,dt$

$= \frac{1}{9}\int\frac{t+1}{t^4}\,dt$

$= \frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^4}\right)dt$

$= \frac{1}{9}\int(t^{-3} + t^{-4})\,dt$

$= \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}t^{-2} - \frac{1}{3}t^{-3}\right)$

$= -\frac{1}{54}\left(\frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3}\right)$

$= -\frac{1}{54}\cdot\frac{3t+2}{t^3}$

$= -\frac{3(3x+2)+2}{54(3x+2)^3}$

$\boldsymbol{= -\frac{9x+8}{54(3x+2)^3}}$

（2） $\sqrt{x+1} = t$ とおくと，$x+1 = t^2$ であるから，$dx = 2tdt$，$x = t^2 - 1$

よって

$与式 = \int\frac{(t^2-1)-1}{t}\cdot 2t\,dt$

$= 2\int(t^2 - 2)\,dt$

$= 2\left(\frac{1}{3}t^3 - 2t\right)$

$= \frac{2}{3}t(t^2 - 6)$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\{(\sqrt{x+1})^2 - 6\}$

$\boldsymbol{= \frac{2}{3}(x-5)\sqrt{x+1}}$

〔別解〕

$x+1 = t$ とおくと，$dx = dt$，$x = t-1$

よって

$与式 = \int\frac{(t-1)-1}{\sqrt{t}}\,dt$

$= \int\left(\frac{t}{\sqrt{t}} - \frac{2}{\sqrt{t}}\right)dt$

$= \int(t^{\frac{1}{2}} - 2t^{-\frac{1}{2}})\,dt$

$= \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 4t^{\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}(t-6)$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\{(x+1) - 6\}$

$\boldsymbol{= \frac{2}{3}(x-5)\sqrt{x+1}}$

170（1） $x = \sin\theta$ とおくと，$dx = \cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0 \ \rightarrow \ \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \ \rightarrow \ \frac{\pi}{4}$

よって

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$
$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ で, $\cos\theta \geqq 0$ なので
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1 - 0\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}}$$

（2）　$x = 3\sin\theta$ とおくと，$dx = 3\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0 \;\to\; \frac{2}{3}$
θ	$0 \;\to\; \frac{\pi}{6}$

よって

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{9-(3\sin\theta)^2}\cdot 3\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 9\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$
$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$
$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ で, $\cos\theta \geqq 0$ なので
$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta\,d\theta$$
$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{9}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{8}}$$

171（1）　$与式 = \dfrac{e^{2x}}{2^2+3^2}(2\sin 3x - 3\cos 3x)$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x)}$$

（2）　$与式 = \dfrac{e^{-x}}{(-1)^2+2^2}(-\cos 2x + 2\sin 2x)$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x)}$$

172（1）　分子を分母で割ると

$$\begin{array}{r@{}l} & \;x \quad +2 \\ x-2 & \overline{)\,x^2 \qquad\quad +1} \\ & \,x^2 \;-2x \\ \hline & \qquad 2x \;+1 \\ & \qquad 2x \;-4 \\ \hline & \qquad\qquad 5 \end{array}$$

よって

$$与式 = \int\left(x+2+\frac{5}{x-2}\right)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5\log|x-2|}$$

（2）　被積分関数を部分分数に分解する.

$\dfrac{1}{x^2-4x+3} = \dfrac{1}{(x-3)(x-1)}$ であるから

$\dfrac{1}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{x-1}$ とおき，両辺に $(x-1)(x-3)$ をかけると

$$1 = a(x-1) + b(x-3)$$
$$1 = ax - a + bx - 3b$$
$$1 = (a+b)x + (-a-3b)$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a-3b=1 \end{cases}$$

これを解いて，$a = \dfrac{1}{2}$，$b = -\dfrac{1}{2}$

よって

$$与式 = \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-3}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\log|x-3| - \frac{1}{2}\log|x-1|$$
$$= \frac{1}{2}(\log|x-3| - \log|x-1|)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-3}{x-1}\right|}$$

173（1）　両辺に $x^2(x-2)$ をかけると

$$x^2+5x-2 = (ax+b)(x-2) + cx^2$$
$$x^2+5x-2 = ax^2 + (-2a+b)x - 2b + cx^2$$
$$x^2+5x-2 = (a+c)x^2 + (-2a+b)x - 2b$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+c=1 \\ -2a+b=5 \\ -2b=-2 \end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-2,\ b=1,\ c=3}$

（2）　（1）より

$$与式 = \int\left(\frac{-2x+1}{x^2} + \frac{3}{x-2}\right)dx$$
$$= \int\frac{-2x+1}{x^2}\,dx + 3\int\frac{(x-2)'}{x-2}\,dx$$
$$= \int\left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx + 3\log|x-2|$$
$$= -2\log|x| - \frac{1}{x} + 3\log|x-2|$$
$$= \boldsymbol{3\log|x-2| - 2\log|x| - \frac{1}{x}}$$

174（1）　$\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$ を部分分数に分解する。

$\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$ とする。

両辺に $(x-2)(x+2)$ をかけると

$$1=a(x+2)+b(x-2)$$
$$1=ax+2a+bx-2b$$
$$1=(a+b)x+2a-2b$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b=1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=\dfrac{1}{4}$，$b=-\dfrac{1}{4}$

よって，$\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

したがって

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx\\&=\frac{1}{4}(\log|x-2|-\log|x+2|)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}\end{aligned}$$

〔別解〕

教科書　**問 14** の結果を利用して

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\int\frac{dx}{x^2-2^2}\\&=\frac{1}{2\cdot 2}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}\end{aligned}$$

（2）　与式 $=-\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-9}$

$\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{1}{(x-3)(x+3)}$ を部分分数に分解する。

$\dfrac{1}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x+3}$ とする。

両辺に $(x-3)(x+3)$ をかけると

$$1=a(x+3)+b(x-3)$$
$$1=ax+3a+bx-3b$$
$$1=(a+b)x+3a-3b$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a-3b=1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=\dfrac{1}{6}$，$b=-\dfrac{1}{6}$

よって，$\dfrac{1}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

したがって

$$\begin{aligned}\text{与式}&=-\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx\\&=-\frac{1}{6}(\log|x-3|-\log|x+3|)\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|}\end{aligned}$$

〔別解〕

教科書　**問 14** の結果を利用して

$$\begin{aligned}\text{与式}&=-\int\frac{dx}{x^2-3^2}\\&=-\frac{1}{2\cdot 3}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|}\end{aligned}$$

175　求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

（1）

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{2^2-x^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{4-x^2}+4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^{\sqrt{3}}\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sqrt{4-3}+4\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+4\cdot\frac{\pi}{3}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{3}\pi}\end{aligned}$$

（2）　$x=2\sin\theta$ とおくと，$dx=2\cos\theta\,d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0\ \to\ \sqrt{3}$
θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{3}$

よって

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\text{で, }\cos\theta\geqq 0\right)\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\&=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi-0\right)\\&=2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

176（1）

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\right\}}\end{aligned}$$

（2）　与式 $=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-3}-3\log\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|\right)}$

177（1）　与式 $=\displaystyle\int_0^2\sqrt{(x+2)^2-4}\,dx$

$x+2=t$ とおくと，$dx=dt$

また，x と t の対応は

x	$0\ \to\ 2$
t	$2\ \to\ 4$

よって

$$与式 = \int_2^4 \sqrt{t^2-4}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2-4} - 4\log|t+\sqrt{t^2-4}|\right]_2^4$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(4\sqrt{16-4} - 4\log|4+\sqrt{16-4}|\right) - \left(2\sqrt{4-4} - 4\log|2+\sqrt{4-4}|\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(4\sqrt{12} - 4\log|4+\sqrt{12}|) - (-4\log|2|)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{8\sqrt{3} - 4\log(4+2\sqrt{3}) + 4\log 2\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(8\sqrt{3} - 4\log\frac{4+2\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \mathbf{4\sqrt{3} - 2\log(2+\sqrt{3})}$$

（2）
$$与式 = \int_1^2 \sqrt{(x-1)^2-1+2}\,dx$$
$$= \int_1^2 \sqrt{(x-1)^2+1}\,dx$$

$x-1=t$ とおくと，$dx=dt$

また，x と t の対応は

x	$1 \to 2$
t	$0 \to 1$

よって

$$与式 = \int_0^1 \sqrt{t^2+1}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+1} + \log|t+\sqrt{t^2+1}|\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1\sqrt{1+1} + \log|1+\sqrt{1+1}|\right) - \left(\log|0+\sqrt{0+1}|\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \log|1+\sqrt{2}| - \log|1|)$$
$$= \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})}$$

（3）
$$与式 = \int_{-1}^0 \sqrt{-(x^2+2x)+1}\,dx$$
$$= \int_{-1}^0 \sqrt{-(x+1)^2+1+1}\,dx$$
$$= \int_{-1}^0 \sqrt{2-(x+1)^2}\,dx$$

$x+1=t$ とおくと，$dx=dt$

また，x と t の対応は

x	$-1 \to 0$
t	$0 \to 1$

よって

$$与式 = \int_0^1 \sqrt{2-t^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 \sqrt{(\sqrt{2})^2-t^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{2-t^2} + 2\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1\sqrt{2-1} + 2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\sin^{-1}0\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + 2\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \mathbf{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

178（1）
$$与式 = \frac{1}{2}\int\{\sin(3x+5x) + \sin(3x-5x)\}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int\{\sin 8x + \sin(-2x)\}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int(\sin 8x - \sin 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)$$
$$= \mathbf{-\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x}$$

（2）
$$与式 = \frac{1}{2}\int\{\cos(3x+5x) + \cos(3x-5x)\}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int\{\cos 8x + \cos(-2x)\}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int(\cos 8x + \cos 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$
$$= \mathbf{\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x}$$

（3）
$$与式 = \int\cos x\,\cos^4 x\,dx = \int\cos x(1-\sin^2 x)^2\,dx$$

$\sin x = t$ とおくと，$\cos x\,dx = dt$ であるから

$$与式 = \int(1-t^2)^2\,dt$$
$$= \int(1-2t^2+t^4)\,dt$$
$$= t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$$
$$= \mathbf{\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x}$$

179（1）
$$与式 = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \mathbf{\frac{16}{35}}$$

（2）
$$与式 = \frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \mathbf{\frac{35}{256}\pi}$$

（3）
$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^3 x\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 x - \cos^5 x)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,dx$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \mathbf{\frac{2}{15}}$$

CHECK

180（1）　$x^2+x+5=t$ とおくと，$(2x+1)\,dx=dt$

よって

$$\text{与式}=\int\frac{1}{t^3}\,dt$$
$$=\int t^{-3}\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}t^{-2}$$
$$=-\frac{1}{2t^2}=\boldsymbol{-\frac{1}{2(x^2+x+5)^2}}$$

（2）　$\cos x+2=t$ とおくと，$-\sin x\,dx=dt$ より，$\sin x\,dx=-dt$

よって

$$\text{与式}=\int\sqrt{t}(-\,dt)$$
$$=-\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$$
$$=-\frac{2}{3}(\cos x+2)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\sqrt{(\cos x+2)^3}}$$

または，$\boldsymbol{-\frac{2}{3}(\cos x+2)\sqrt{\cos x+2}}$

〔別解〕

$\sqrt{\cos x+2}=t$ とおくと，$\cos x+2=t^2$

これより，$-\sin x\,dx=2t\,dt$，すなわち，$\sin x\,dx=-2t\,dt$

よって

$$\text{与式}=\int t\cdot(-2t\,dt)$$
$$=-2\int t^2\,dt$$
$$=-\frac{2}{3}t^3\,dt$$
$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{\cos x+2})^3$$
$$=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\sqrt{(\cos x+2)^3}}$$

（3）　$e^x-x-1=t$ とおくと，$(e^x-1)\,dx=dt$

よって

$$\text{与式}=\int\frac{1}{t}\,dt$$
$$=\log|t|$$
$$=\boldsymbol{\log|e^x-x-1|}$$

（4）　$\log x=t$ とおくと，$\dfrac{1}{x}\,dx=dt$

よって

$$\text{与式}=\int\frac{1}{t^2}\,dt$$
$$=\int t^{-2}\,dt$$
$$=-t^{-1}=\boldsymbol{-\frac{1}{\log x}}$$

（5）　$2x-1=t$ とおくと，$2\,dx=dt$ より $dx=\dfrac{1}{2}dt$

よって

$$\text{与式}=\int\cot t\cdot\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\cos t}{\sin t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin t)'}{\sin t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\log|\sin t|$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log|\sin(2x-1)|}$$

（6）　$\tan x+1=t$ とおくと，$\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx=dt$

これより，$\sec^2\,dx=dt$

よって

$$\text{与式}=\int\frac{1}{t}\,dt$$
$$=\log|t|=\boldsymbol{\log|\tan x+1|}$$

181（1）　$\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x$

$$\text{与式}=(x-1)(-\cos x)-\int(x-1)'(-\cos x)\,dx$$
$$=-(x-1)\cos x+\int\cos x\,dx$$
$$=\boldsymbol{-(x-1)\cos x+\sin x}$$

（2）　$\displaystyle\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}$

$$\text{与式}=x(-e^{-x})-\int(x)'(-e^{-x})\,dx$$
$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx$$
$$=-xe^{-x}-e^{-x}$$
$$=\boldsymbol{-(x+1)e^{-x}}$$

（3）　$\displaystyle\int dx=x$

$$\text{与式}=\log(x+1)\cdot x-\int\{\log(x+1)\}'\cdot x\,dx$$
$$=x\log(x+1)-\int\frac{x}{x+1}\,dx$$
$$=x\log(x+1)-\int\frac{(x+1)-1}{x+1}\,dx$$
$$=x\log(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\,dx$$
$$=x\log(x+1)-x+\log(x+1)$$
$$=\boldsymbol{(x+1)\log(x+1)-x}$$

（4）　$\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x$

$$\text{与式}=x^2\sin x-\int(x^2)'\sin x\,dx$$
$$=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx$$

$\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x$

$$=x^2\sin x-2\left\{x(-\cos x)-\int x'(-\cos x)\,dx\right\}$$
$$=x^2\sin x-2\left(-x\cos x+\int\cos x\,dx\right)$$
$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$$
$$=\boldsymbol{(x^2-2)\sin x+2x\cos x}$$

182（1）　$x^2-1=t$ とおくと，$2x\,dx=dt$ より，$x\,dx=\dfrac{1}{2}dt$

また，x と t の対応は

x	0	$\to$	1
t	-1	$\to$	0

よって

$$与式 = \int_{-1}^{0} t^4 \cdot \frac{1}{2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}t^5\right]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{1}{10}\left[t^5\right]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{1}{10}\left\{0^5 - (-1)^5\right\}$$
$$= \frac{1}{10}\cdot 1 = \mathbf{\frac{1}{10}}$$

（2）　$\displaystyle\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}$

$$与式 = \left[x\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 (x)'\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\left[xe^{3x}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}(1\cdot e^3 - 0) - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - e^0)$$
$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$
$$= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \mathbf{\frac{1}{9}(2e^3+1)}$$

（3）　$\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4$

$$与式 = \left[\log x\cdot\frac{1}{4}x^4\right]_1^e - \int_1^e (\log x)'\cdot\frac{1}{4}x^4\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[x^4\log x\right]_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e \frac{1}{x}\cdot x^4\,dx$$
$$= \frac{1}{4}(e^4\log e - 1^4\log 1) - \frac{1}{4}\int_1^e x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^e$$
$$= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{16}(e^4 - 1^4)$$
$$= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{16}$$
$$= \frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16} = \mathbf{\frac{1}{16}(3e^4+1)}$$

（4）　$\log 2x = t$ とおくと，$2\cdot\dfrac{1}{2x}\,dx = dt$ より，$\dfrac{1}{x}\,dx = dt$

また，x と t の対応は

x	e	$\to$	e^2
t	$\log 2e$	$\to$	$\log 2e^2$

よって

$$与式 = \int_{\log 2e}^{\log 2e^2} \frac{1}{t}\,dt$$
$$= \left[\log|t|\right]_{\log 2e}^{\log 2e^2}$$
$$= \log|\log 2e^2| - \log|\log 2e|$$
$$= \log\frac{\log 2e^2}{\log 2e}$$
$$= \log\frac{\log 2 + \log e^2}{\log 2 + \log e}$$
$$= \mathbf{\log\frac{\log 2 + 2}{\log 2 + 1}}$$

183（1）　分子を分母で割ると

$$\begin{array}{r}
x\ -1 \\
x+1\,\big)\,\overline{x^2\qquad} \\
x^2\ +x \\
\hline
-x \\
-x\ -1 \\
\hline
1
\end{array}$$

よって

$$与式 = \int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \mathbf{\frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1|}$$

（2）　被積分関数を部分分数に分解する．

$\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$ とおき，両辺に $(x-1)(x-2)$ をかけると

$$1 = a(x-2) + b(x-1)$$
$$1 = ax - 2a + bx - b$$
$$1 = (a+b)x + (-2a-b)$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a-b=1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-1$，$b=1$

よって

$$与式 = \int\left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$= -\log|x-1| + \log|x-2|$$
$$= \mathbf{\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|}$$

（3）　被積分関数を部分分数に分解する．

$\dfrac{1}{1-4x^2} = -\dfrac{1}{(2x-1)(2x+1)}$ であるから

$\dfrac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \dfrac{a}{2x-1} + \dfrac{b}{2x+1}$ とおき，両辺に $(2x-1)(2x+1)$ をかけると

$$1 = a(2x+1) + b(2x-1)$$
$$1 = 2ax + a + 2bx - b$$
$$1 = (2a+2b)x + (a-b)$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} 2a+2b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$

よって

$$与式 = -\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+1}\right)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\log|2x-1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|2x+1|$$
$$= \frac{1}{4}\log|2x+1| - \frac{1}{4}\log|2x-1|$$
$$= \mathbf{\frac{1}{4}\log\left|\frac{2x+1}{2x-1}\right|}$$

（4）　$\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$

分子を分母で割ると

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2+1 \overline{\big) x^2 + 2x + 1} \\ \underline{x^2 \qquad + 1} \\ 2x \end{array}$$

よって

$$\text{与式} = \int \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx$$
$$= \int dx + \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx$$
$$= x + \log|x^2+1| = \boldsymbol{x + \log(x^2+1)}$$

184（1）　$\sqrt{2x+1} = t$ とおくと, $2x+1 = t^2$ であるから, $2dx = 2t dt$

これより，$dx = t\,dt$，また，$x = \dfrac{t^2-1}{2}$

よって

$$\text{与式} = \int \frac{t^2-1}{2} \cdot t \cdot t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int t^2(t^2-1)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int (t^4 - t^2)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3\right)$$
$$= \frac{1}{30}t^3(3t^2-5)$$
$$= \frac{1}{30}(\sqrt{2x+1})^3\{3(\sqrt{2x+1})^2 - 5\}$$
$$= \frac{1}{30}(2x+1)\sqrt{2x+1}\{3(2x+1) - 5\}$$
$$= \frac{1}{30}(2x+1)\sqrt{2x+1}(6x-2)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{15}(3x-1)(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

（2）
$$\text{与式} = \frac{e^x}{1^2+2^2}(\sin 2x - 2\cos 2x)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x)}$$

（3）
$$\text{与式} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+2} + 2\log\left|x + \sqrt{x^2+2}\right|\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2} + \log(x + \sqrt{x^2+2})}$$

（4）
$$\text{与式} = -\frac{1}{2}\int \{\cos(2x+3x) - \cos(2x-3x)\}\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int \{\cos 5x + \cos(-x)\}\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int \{\cos 5x + \cos x\}\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right)$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x}$$

185（1）
$$\text{与式} = \int_0^1 \sqrt{(\sqrt{2})^2 - x^2}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{2-x^2} + 2\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1\sqrt{2-1^2} + 2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(0 + 2\sin^{-1}0\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + 2\cdot\frac{\pi}{4} - 0\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

（2）
$$\text{与式} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 - 1 + 2}}$$
$$= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}}$$

$x+1 = t$ とおくと，$dx = dt$

また，x と t の対応は

x	$-1 \to 0$
t	$0 \to 1$

よって

$$\text{与式} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{t^2+1}}$$
$$= \left[\log\left|t + \sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^1$$
$$= \log\left|1 + \sqrt{1^2+1}\right| - \log\left|0 + \sqrt{0^2+1}\right|$$
$$= \log\left|1 + \sqrt{2}\right| - \log|1|$$
$$= \boldsymbol{\log(1 + \sqrt{2})}$$

（3）
$$\text{与式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x(1 - \cos^2 x)dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - \cos^6 x)dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\,dx$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi$$
$$= \frac{3}{16}\pi - \frac{5}{32}\pi$$
$$= \frac{6}{32}\pi - \frac{5}{32}\pi = \boldsymbol{\frac{1}{32}\pi}$$

（4）
$$\text{与式} = \int_2^3 \sqrt{(x+1)^2 - 1 - 8}\,dx$$
$$= \int_2^3 \sqrt{(x+1)^2 - 9}\,dx$$

$x+1 = t$ とおくと，$dx = dt$

また，x と t の対応は

x	$2 \to 3$
t	$3 \to 4$

よって

$$与式 = \int_3^4 \sqrt{t^2-9}\,dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2-9} - 9\log\left|t+\sqrt{t^2-9}\right|\right)\right]_3^4$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(4\sqrt{4^2-9} - 9\log\left|4+\sqrt{4^2-9}\right|\right) - \left(3\sqrt{3^2-9} - 9\log\left|3+\sqrt{3^2-9}\right|\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(4\sqrt{7} - 9\log\left|4+\sqrt{7}\right|\right) - (0 - 9\log|3|)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(4\sqrt{7} - 9\log\left|4+\sqrt{7}\right| + 9\log|3|\right)$$
$$= 2\sqrt{7} - \frac{9}{2}\left\{\log(4+\sqrt{7}) - \log 3\right\}$$
$$= \mathbf{2\sqrt{7} - \frac{9}{2}\log\frac{4+\sqrt{7}}{3}}$$

STEP UP

186（1）　$\sqrt{2x-x^2} = t$ とおくと，$2x - x^2 = t^2$ であるから，

$(2-2x)dx = 2tdt$　これより，$(x-1)dx = -t\,dt$

よって

$$与式 = \int \frac{1}{t}\cdot(-t\,dt)$$
$$= -\int dt$$
$$= -t = \mathbf{-\sqrt{2x-x^2}}$$

（2）
$$与式 = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x\,dx$$
$$= \int (1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$$

$\tan x = t$ とおくと，$\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = dt$ より，$\sec^2 x\,dx = dt$

よって

$$与式 = \int (1+t^2)\,dt$$
$$= t + \frac{1}{3}t^3 = \mathbf{\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x}$$

（3）
$$与式 = \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \int \frac{1}{2}x^2(\tan^{-1}x)'\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}(x - \tan^{-1}x)$$
$$= \mathbf{\frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x}$$

（4）
$$与式 = \int 1\cdot\cos^{-1}x\,dx$$
$$= x\cos^{-1}x - \int x\cdot(\cos^{-1}x)'\,dx$$
$$= x\cos^{-1}x - \int x\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$
$$= x\cos^{-1}x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ において，$\sqrt{1-x^2} = t$ とおくと，$1-x^2 = t^2$ より，$-2x\,dx = 2t\,dt$ であるから，$x\,dx = -t\,dt$

よって

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{t}\cdot(-t\,dt)$$
$$= -\int dx$$
$$= -t = -\sqrt{1-x^2}$$

以上より

$$与式 = \mathbf{x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}}$$

（5）　被積分関数の分子を分母で割ると

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & x & +2 & \\
\hline
x^2-2x+2 \,) & x^3 & & & +3 \\
 & x^3 & -2x^2 & +2x & \\
\hline
 & & 2x^2 & -2x & +3 \\
 & & 2x^2 & -4x & +4 \\
\hline
 & & & 2x & -1
\end{array}$$

よって

$$与式 = \int\left(x+2+\frac{2x-1}{x^2-2x+2}\right)dx$$
$$= \int\left(x+2+\frac{(2x-2)+1}{x^2-2x+2}\right)dx$$
$$= \int\left(x+2+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{x^2-2x+2}\right)dx$$
$$= \int\left(x+2+\frac{(x^2-+2x+2)'}{x^2-2x+2} + \frac{1}{x^2-2x+2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + \log\left|x^2-2x+2\right| + \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx$ において，$x-1 = t$ とおくと，$dx = dt$ であるから

$$\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$
$$= \tan^{-1}t = \tan^{-1}(x-1)$$

以上より

$$与式 = \mathbf{\frac{1}{2}x^2 + 2x + \log(x^2-2x+2) + \tan^{-1}(x-1)}$$

※ $x^2-2x+1 = (x-1)^2+1 > 0$ より

$\log\left|x^2-2x+1\right| = \log(x^2-2x+2)$

（6）　被積分関数の分子を分母で割ると

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^2 & -2x & +3 & \\
\hline
x^2+2x+1 \,) & x^4 & & & & \\
 & x^4 & +2x^3 & +x^2 & & \\
\hline
 & & -2x^3 & -x^2 & & \\
 & & -2x^3 & -4x^2 & -2x & \\
\hline
 & & & 3x^2 & +2x & \\
 & & & 3x^2 & +6x & +3 \\
\hline
 & & & & -4x & -3
\end{array}$$

よって

$$与式 = \int \left(x^2 - 2x + 3 + \frac{-4x-3}{x^2+2x+1}\right) dx$$
$$= \int \left(x^2 - 2x + 3 + \frac{-4x-3}{(x+1)^2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + \int \frac{-4x-3}{(x+1)^2}\, dx$$

ここで，$\dfrac{-4x-3}{(x+1)^2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$ とおき，両辺に $(x+1)^2$ をかけると

$$-4x - 3 = a(x+1) + b$$
$$-4x - 3 = ax + (a+b)$$

これは，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} -4 = a \\ -3 = a + b \end{cases}$$

これを解いて，$a = -4,\ b = 1$

よって

$$\int \frac{-4x-3}{(x+1)^2}\, dx = \int \left\{-\frac{4}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right\} dx$$
$$= -4\log|x+1| + \int (x+1)^{-2}\, dx$$
$$= -4\log|x+1| - (x+1)^{-1}$$
$$= -4\log|x+1| - \frac{1}{x+1}$$

以上より，

$$与式 = \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4\log|x+1| - \frac{1}{x+1}}$$

（7）　$$与式 = \int \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\, dx$$
$$= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) dx$$
$$= \tan x + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$ において，$\cos x = t$ とおくと

$-\sin x\, dx = dt$ より，$\sin x\, dx = -dt$ であるから

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{t^2}\,(-dt)$$
$$= -\int \frac{1}{t^2}\, dt$$
$$= -\left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{\cos x}$$

以上より，与式 $= \boldsymbol{\tan x + \dfrac{1}{\cos x}}$

（8）　$$与式 = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}\, dx$$
$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\, dx$$
$$= \int \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\, dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\, dx$$
$$= \int \frac{-(1+\cos x)'}{1+\cos x}\, dx$$
$$= -\log|1+\cos x| = \boldsymbol{-\log(1+\cos x)}$$

187（1）　$x = \sin\theta$ とおくと，$dx = \cos\theta\, d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

よって

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\sin^2\theta)^5} \cdot \cos\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sqrt{(\cos^2\theta)^5}\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sqrt{(\cos^5\theta)^2}\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta|\cos^5\theta|\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\, d\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\text{で},\ \cos^5\theta \geqq 0\right)$$
$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{32}\pi}$$

（2）　$x = 2\sin\theta$ とおくと，$dx = 2\cos\theta\, d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$1 \to \sqrt{2}$
θ	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{4}$

よって

$$与式 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\sin^2\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}} \cdot 2\cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta\cdot 2\sqrt{1-\sin^2\theta}}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta\cdot\sqrt{\cos^2\theta}}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta\cdot|\cos\theta|}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}\, d\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\text{で},\ \cos\theta \geqq 0\right)$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2\theta}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\Big[-\cot\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\cot\frac{\pi}{4} - \cot\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}(1-\sqrt{3}) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}$$

188（1）　$x = 3\tan\theta$ とおくと，$dx = \dfrac{3}{\cos^2\theta}\, d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{6}$

よって

$$\text{与式} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(9\tan^2\theta+9)^2}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{3}{81}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{(\tan^2\theta+1)^2\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{1}{27}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^4\theta}\cdot\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{1}{27}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{27}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{54}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{54}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1}{54}\left\{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)-0\right\}$$
$$= \frac{1}{54}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{324}+\frac{\sqrt{3}}{216}}$$

（2）　$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

また，x と θ の対応は

x	0	$\to$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{3}$

よって

$$\text{与式} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(3\tan^2\theta+3)^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3^{\frac{5}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(\tan^2\theta+1)^{\frac{5}{2}}\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{5}{2}}\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^5\theta}\cdot\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta$$

ここで，$\sin\theta=t$ とおくと，$\cos\theta\,d\theta=dt$

また，θ と t の対応は

θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{3}$
t	0	$\to$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって

$$\text{与式} = \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1-t^2)\,dt$$
$$= \frac{1}{9}\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \frac{1}{9}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right\}$$
$$= \frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$
$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{24}}$$

189　**例題**の結果を利用して

$$\text{与式} = I_3 = \frac{1}{2\cdot 2}\left\{\frac{x}{(x^2+1)^2}+(2\cdot 2-1)I_2\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{x}{(x^2+1)^2}+3\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\tan^{-1}x\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{2}\tan^{-1}x\right\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{8}\tan^{-1}x}$$

190（1）　$\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=t$ より，$\dfrac{1+x}{1-x}=t^2$

これより

$1+x=t^2(1-x)$

$1+x=t^2-t^2x$

$t^2x+x=t^2-1$

$(x+1)t^2=t^2-1$

$t^2+1 \fallingdotseq 0$ より，$\boldsymbol{x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}}$

また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(t^2-1)'(t^2+1)-(t^2-1)(t^2+1)'}{(t^2+1)^2}$$
$$= \frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$$
$$= \frac{2t\{(t^2+1)-(t^2-1)\}}{(t^2+1)^2}$$
$$= \frac{2t\cdot 2}{(t^2+1)^2} = \boldsymbol{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}$$

（2）　$$I = \int t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}\,dt$$
$$= 4\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$

ここで，$\dfrac{t^2}{(t^2+1)^2}=\dfrac{a}{t^2+1}+\dfrac{b}{(t^2+1)^2}$ とおいて，両辺に $(t^2+1)^2$ をかけると

$t^2=a(t^2+1)+b$

$t^2=at^2+(a+b)$

これが，t についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \end{cases}$$

これを解くと，$a=1$，$b=-1$ であるから

$$I = 4\int\left\{\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{(t^2+1)^2}\right\}dt$$
$$= 4\left\{\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1}-\tan^{-1}t\right)\right\} \leftarrow \textbf{例題}\text{より}$$
$$= 4\tan^{-1}t-\frac{2t}{t^2+1}-2\tan^{-1}t$$
$$= 2\tan^{-1}t-\frac{2t}{t^2+1}$$
$$= 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2+1}$$
$$= 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\times(1-x)}{\left(\frac{1+x}{1-x}+1\right)\times(1-x)}$$
$$= 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{2\sqrt{(1+x)(1-x)}}{(1+x)+(1-x)}$$
$$= 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{2}$$
$$= \boldsymbol{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{1-x^2}}$$

191　$I_n = x^n e^x - \int e^x \cdot (x^n)'\,dx$

$= x^n e^x - \int e^x \cdot nx^{n-1}\,dx$

$= x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

$= x^n e^x - nI_{n-1}$

$n-1 \geqq 0$ より，$n \geqq 1$

以上より

$I_0 = \int e^x\,dx = e^x$

$I_1 = x^1 e^x - 1 \cdot I_0$

$= xe^x - e^x$

$= (x-1)e^x$

$I_2 = x^2 e^x - 2I_1$

$= x^2 e^x - 2(x-1)e^x$

$= (x^2 - 2x + 2)e^x$

$I_3 = x^3 e^x - 3I_2$

$= x^3 e^x - 3(x^2 - 2x + 2)e^x$

$= \boldsymbol{(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x}$

192　$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$

$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^2}}$

$= \int \frac{dx}{1-x^2}$

※ 公式がありますが，部分分数分解を利用します。

ここで，$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$ であるから，

$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$ とおき，両辺に $(1-x)(1+x)$ をかけると

$1 = a(1+x) + b(1-x)$

$1 = a + ax + b - bx$

$1 = (a-b)x + a + b$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

これを解くと，$a = \frac{1}{2}$，$b = \frac{1}{2}$ であるから

$I_2 = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\log|1-x|}{-1} + \log|1+x|\right)$

$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

$I_n = \int (1-x^2)^{-\frac{n}{2}}\,dx$

$= \int 1 \cdot (1-x^2)^{-\frac{n}{2}}\,dx$

$= x(1-x^2)^{-\frac{n}{2}} - \int x \cdot \{(1-x^2)^{-\frac{n}{2}}\}'\,dx$

$= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}} - \int x\left\{-\frac{n}{2}(1-x^2)^{-\frac{n}{2}-1} \cdot (-2x)\right\}dx$

$= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}} + n\int \frac{-x^2}{(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}}\,dx$

$= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}} + n\int \frac{(1-x^2)-1}{(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}}\,dx$

$= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}} + n\int \left\{\frac{(1-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}}\right\}dx$

$= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}}$

$+ n\left\{\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^{n+2}}}\right\}$

$= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}}$

$+ n\left\{\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{n}{2}}} - \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^{n+2}}}\right\}$

$= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}}$

$+ n\left\{\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^n}} - \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^{n+2}}}\right\}$

$= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}} - n(I_n - I_{n+2})$

よって，$I_n = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}} + n(I_n - I_{n+2})$ であるから

$I_n = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}} + nI_n - nI_{n+2}$

$nI_{n+2} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}} + nI_n - I_n$

$nI_{n+2} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}} + (n-1)I_n$

$I_{n+2} = \frac{1}{n}\left\{\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^n}} + (n-1)I_n\right\}$

193（1）　与式 $= \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}}\,dx$

$= \int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\,dx$

$= \sqrt{2}\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx$

$0 \leqq x \leqq \pi$ において，$\sin x \geqq 0$ であるから

与式 $= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$= \sqrt{2}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$

$= -\sqrt{2}(\cos\pi - \cos 0)$

$= -\sqrt{2}(-1-1) = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$

（2）　与式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\,dx$

$\frac{\pi}{2} - x = t$ とおくと，$-dx = dt$ であるから，$dx = -dt$

また，x と t の対応は

x	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	0

よって

$$与式 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos t}\,(-dt)$$
$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{2\cdot\frac{1-\cos t}{2}}\,dt$$
$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cdot\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$
$$= \sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 \leqq \dfrac{t}{2} \leqq \dfrac{\pi}{4}$

この区間において，$\sin\dfrac{t}{2} \geqq 0$ であるから

$$与式 = \sqrt{2}\int_{0}^{\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt$$
$$= \sqrt{2}\left[-\frac{1}{\frac{1}{2}}\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -2\sqrt{2}\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos 0\right)$$
$$= -2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$$
$$= -2+2\sqrt{2} = \boldsymbol{2\sqrt{2}-2}$$

PLUS

194（1）

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^4}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4$$
$$= \int_0^1 x^4\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{5}(1^5-0^5) = \boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

（2）

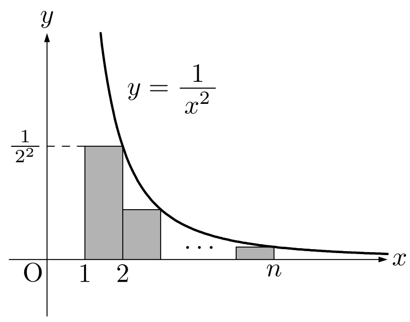
$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{k^2}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \left[\tan^{-1}x\right]_0^1$$
$$= \tan^{-1}1-\tan^{-1}0$$
$$= \frac{\pi}{4}-0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

195

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{n^2}}}$$
$$= \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$
$$= \left[\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right]_0^1$$
$$= \log\left|1+\sqrt{2}\right| - \log\left|0+\sqrt{1}\right|$$
$$= \log(1+\sqrt{2})-1 = \boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})}$$

196（1）　下の図において，影をつけた部分が $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$ となるから

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$$



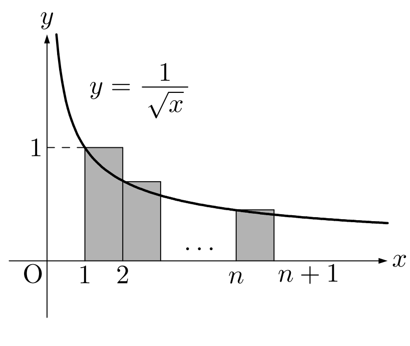
ここで，
$$\int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^n x^{-2}\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n$$
$$= -\frac{1}{n}+1$$

よって，$\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2} < 1-\dfrac{1}{n}$

（2）　下の図において，影をつけた部分が

$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ となるから

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$



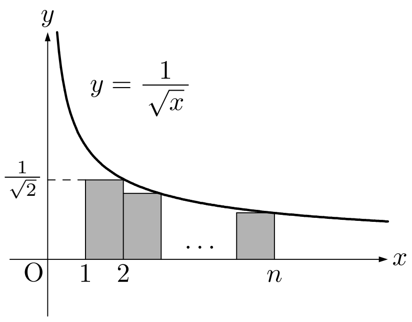
ここで，
$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{n+1} x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+1}$$
$$= 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})$$
$$= 2(\sqrt{n+1}-1)$$

よって，$2(\sqrt{n+1}-1) < 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

また，下の図において，影をつけた部分は

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ となるから

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$



ここで，$\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^n x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$$=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^n$$
$$=2(\sqrt{n}-\sqrt{1})$$
$$=2(\sqrt{n}-1)$$

よって，$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-1)$

この式の両辺に 1 を加えると

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-1)+1$

すなわち

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$

以上より

$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$

197（1）　$\frac{x^2+x+2}{(x+1)^2(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x+2}$ とおく．

両辺に $(x+1)^2(x+2)$ をかけると

$x^2+x+2=a(x+1)(x+2)+b(x+2)+c(x+1)^2\cdots$①

ここで

右辺 $=a(x^2+3x+2)+bx+2b+c(x^2+2x+1)$

$=ax^2+3ax+2a+bx+2b+cx^2+2cx+c$

$=(a+c)x^2+(3a+b+2c)x+(2a+2b+c)$

① が x についての恒等式になることから，

$$\begin{cases}a+c=1 & \cdots② \\ 3a+b+2c=1 & \cdots③ \\ 2a+2b+c=2 & \cdots④\end{cases}$$

③ $\times 2-$ ④ より，$4a+3c=0\cdots$⑤

② $\times 4-$ ⑤ より，$c=4$

これを，② に代入して，$a+4=1$

これより，$a=-3$

$a=-3,\ c=4$ を ③ に代入して

$-9+b+8=1$

よって，$b=2$

以上より

与式 $=\int\left\{-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{4}{x+2}\right\}dx$

$=-3\log|x+1|-\frac{2}{x+1}+4\log|x+2|$

$=-\log|x+1|^3+\log|x+2|^4-\frac{2}{x+1}$

$=\boldsymbol{\log\frac{(x+2)^4}{|x+1|^3}-\frac{2}{x+1}}$

（2）　$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$ であるから

$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$ とおく．

両辺に $(x+1)(x^2-x+1)$ をかけると

$1=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)\cdots$①

ここで

右辺 $=ax^2-ax+a+bx^2+bx+cx+c$

$=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)$

① が x についての恒等式になることから，

$$\begin{cases}a+b=0 & \cdots② \\ -a+b+c=0 & \cdots③ \\ a+c=1 & \cdots④\end{cases}$$

④ $-$ ③ より，$2a-b=1\cdots$⑤

① $+$ ⑤ より，$3a=1$ であるから，$a=\frac{1}{3}$

これを，①，③ に代入して，

$b=-\frac{1}{3},\ c=\frac{2}{3}$

以上より

与式 $=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{3}\int\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\right\}dx$

$=\frac{1}{3}\int\left\{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right.$

$\left.+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\right\}dx$

$=\frac{1}{3}\left\{\log|x+1|-\frac{1}{2}\log|x^2-x+1|\right\}$

$+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$

$=\frac{1}{6}\left(2\log|x+1|-\log|x^2-x+1|\right)$

$+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$

$=\frac{1}{6}\left\{\log(x+1)^2-\log(x^2-x+1)\right\}$

$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\boldsymbol{\frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}$

198　**例題**の結果を用います．

（1）　$\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$ であるから

与式 $=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$

$=\int\frac{2\,dt}{2(1+t^2)+(1-t^2)}$

$=\int\frac{2}{t^2+3}\,dt$

$=2\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2}$

$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}$

$=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)}$

（2）　$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ であるから

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}\,dt}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}+1}\\&=\int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}\,dt}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}+1}\\&=\int\frac{2\,dt}{(1-t^2)+2t+(1+t^2)}\\&=\int\frac{2}{2t+2}\,dt\\&=\int\frac{1}{t+1}\,dt\\&=\log|t+1|=\boldsymbol{\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|}\end{aligned}$$

（3）　$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ であるから

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}\,dt}{3+2\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\\&=\int\frac{2\,dt}{3(1+t^2)+2(1-t^2)}\\&=\int\frac{2}{t^2+5}\,dt\\&=2\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{5})^2}\\&=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{5}}\\&=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\tan\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

（4）　$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ であり，$-\pi<x<\pi$ より，$-1<\sin x<1$，すなわち，$1+\sin x>0$ なので

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\int\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{2}{1+t^2}\,dt}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\\&=\int\frac{4t}{(1+t^2)^2+2t(1+t^2)}\,dt\\&=\int\frac{4t}{(t^2+1)\{(t^2+1)+2t\}}\,dt\\&=\int\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2}\,dt\end{aligned}$$

$\dfrac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2}=\dfrac{a}{t^2+1}+\dfrac{b}{t+1}+\dfrac{c}{(t+1)^2}$ とおき，両辺に $(t^2+1)(t+1)^2$ をかけると

$$4t=a(t+1)^2+b(t^2+1)(t+1)+c(t^2+1)$$

ここで

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=a(t^2+2t+1)+b(t^3+t^2+t+1)+ct^2+c\\&=at^2+2at+a+bt^3+bt^2+bt+b+ct^2+c\\&=bt^3+(a+b+c)t^2+(2a+b)t+a+b+c\end{aligned}$$

よって，$\begin{cases}b=0 & \cdots① \\ a+b+c=0 & \cdots② \\ 2a+b=4 & \cdots③ \\ a+b+c=0 & \cdots④\end{cases}$

※ ② と ④ は同値.

① を ③ に代入すると，$2a=4$ であるから，$a=2$

$a=2,\ b=0$ を ② に代入すると，$2+c=0$ であるから，$c=-2$

したがって

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\int\left\{\frac{2}{t^2+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right\}dt\\&=2\tan^{-1}t-2\cdot\left(-\frac{1}{t+1}\right)\\&=2\tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}\\&=2\cdot\frac{x}{2}+\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}\\&=\boldsymbol{x+\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}}\end{aligned}$$

※ 以下の 2 問は，**例題**のシュワルツの不等式を用います.

199　区間［0,　1］において，$f(x)>0$ であるから，関数 $\sqrt{f(x)}$，$\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ が定義できるので，この 2 つの関数にシュワルツの不等式を適用すると

$$\left\{\int_0^1\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,dx\right\}^2\leqq\int_0^1\left\{\sqrt{f(x)}\right\}^2dx\cdot\int_0^1\left\{\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right\}^2dx$$

よって

$$\left(\int_0^1 1\,dx\right)^2\leqq\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx$$

$$\left(\Big[\,x\,\Big]_0^1\right)^2\leqq\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx$$

$$1^2\leqq\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx$$

したがって，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\geqq 1$

200　$f(x)=1$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$ として，この 2 つの関数にシュワルツの不等式を適用すると

$$\left(\int_a^b 1\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)^2\leqq\int_a^b 1^2\,dx\cdot\int_a^b\left(\frac{1}{x}\right)^2dx$$

よって

$$\left(\int_a^b\frac{1}{x}\,dx\right)^2\leqq\int_a^b 1\,dx\cdot\int_a^b\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\left(\Big[\log x\Big]_a^b\right)^2\leqq\Big[\,x\,\Big]_a^b\cdot\Big[-\frac{1}{x}\Big]_a^b$$

$$(\log b-\log a)^2\leqq(b-a)\cdot\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$$

$$\left(\log\frac{b}{a}\right)^2\leqq(b-a)\cdot\frac{-a+b}{ab}$$

したがって，$\left(\log\dfrac{b}{a}\right)^2\leqq\dfrac{(b-a)^2}{ab}$

∎