4章　積分の応用

§1　面積・曲線の長さ・体積 (p.52〜p.)

BASIC

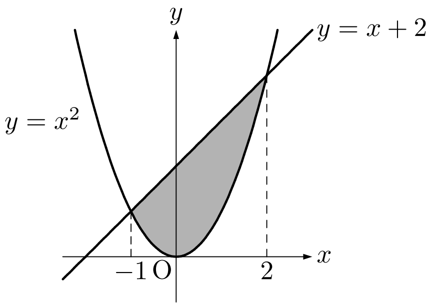
201 (1)　曲線と直線の交点の x 座標を求めると

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 4$

$x = -1,\ 2$

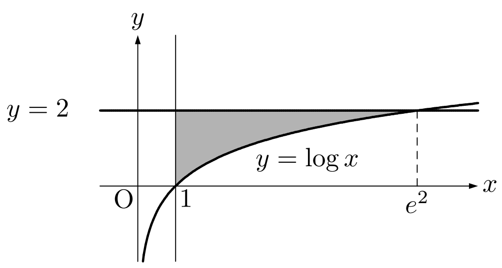


$-1 \leqq x \leqq 2$ において，$x + 2 \geqq x^2$ であるから，求める面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2\right) - \left\{-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)\right\}$$
$$= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)$$
$$= -\frac{9}{3} - \frac{1}{2} + 8$$
$$= \frac{-6 - 1 + 16}{2} = \boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

(2)　$y = \log x$ において，$x = 1$ のとき，$y = \log 1 = 0$

$y = 2$ のとき，$2 = \log x$ より，$x = e^2$



よって，積分範囲は $1 \leqq x \leqq e^2$ となり，この範囲において，$2 \geqq \log x$ であるから，求める面積を S とすると

$$S = \int_{1}^{e^2} (2 - \log x)\,dx$$
$$= \Big[2x - (x\log x - x)\Big]_{1}^{e^2}$$
$$= \Big[3x - x\log x\Big]_{1}^{e^2}$$
$$= (3e^2 - e^2\log e^2) - (3 - 1\log 1)$$
$$= (3e^2 - e^2\cdot 2) - (3 - 0) = \boldsymbol{e^2 - 3}$$

202 (1)　2曲線の交点の x 座標を求めると

$x^2 + x = x^3 - x$

$x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

$x(x+1)(x-2) = 0$

よって，$x = -1,\ 0,\ 2$

$-1 \leqq x \leqq 0$ において，$x^3 - x \geqq x^2 + x$

$0 \leqq x \leqq 2$ において，$x^2 + x \geqq x^3 - x$

であるから，y 軸の左側の部分の面積は

$$\int_{-1}^{0} \{(x^3 - x) - (x^2 + x)\}\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$= 0 - \left\{\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 - \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - (-1)^2\right\}$$
$$= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right)$$
$$= \frac{-3 - 4 + 12}{12} = \boldsymbol{\frac{5}{12}}$$

また，y 軸の右側の部分の面積は

$$\int_{0}^{2} \{(x^2 + x) - (x^3 - x)\}\,dx$$
$$= \int_{0}^{2} (-x^3 + x^2 + 2x)\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left(-\frac{1}{4}\cdot 2^4 + \frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2^2\right) - 0$$
$$= -\frac{16}{4} + \frac{8}{3} + 4$$
$$= \frac{-12 + 8 + 12}{3} = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

(2)　円と放物線の交点の x 座標を求めると

$x^2 + (x^2)^2 = 2$

$(x^2)^2 + x^2 - 2 = 0$

$(x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0$

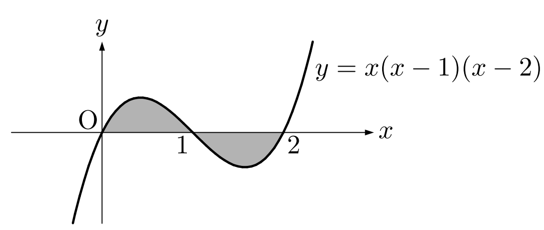
$x^2 + 2 = 0$ の解は虚数解なので，$x = \pm 1$

$x^2 + y^2 = 2$ より，$y \geqq 0$ において，$y = \sqrt{2 - x^2}$

$-1 \leqq x \leqq 1$ において，$\sqrt{2 - x^2} \geqq x^2$ であるから，求める面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^{1} (\sqrt{2 - x^2} - x^2)\,dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} (\sqrt{2 - x^2} - x^2)\,dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{2 - x^2} + 2\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1}$$
$$= \left(1\cdot\sqrt{2 - 1} + 2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2}{3}\cdot 1^3 - 0$$
$$= 1 + 2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}}$$

203 (1)　曲線と x 軸との交点の x 座標は，$x = 0,\ 1,\ 2$



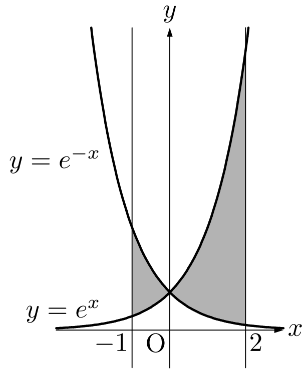
$0 \leqq x \leqq 1$ において，$y \geqq 0$

$1 \leqq x \leqq 2$ において，$y \leqq 0$

であるから，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\,dx + \int_1^2 \{-x(x-1)(x-2)\}\,dx$$
$$= \int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx - \int_1^2 (x^3-3x^2+2x)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_1^2$$
$$= \left\{\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-0\right\}$$
$$-\left\{\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2^3 + 2^2\right) - \left(\frac{1}{4}-1+1\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4} - \left(\frac{16}{4} - 8 + 4\right) + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（2）　2 曲線の交点の x 座標は，$e^x = e^{-x}$ より，$e^{2x} = 1$ すなわち，$x = 0$



$-1 \leqq x \leqq 0$ において，$e^{-x} \geqq e^x$

$0 \leqq x \leqq 2$ において，$e^x \leqq e^{-x}$

であるから，求める面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^0 (e^{-x} - e^x)\,dx + \int_0^2 (e^x - e^{-x})\,dx$$
$$= \left[-e^{-x} - e^x\right]_{-1}^0 + \left[e^x + e^{-x}\right]_0^2$$
$$= \{(-e^0 - e^0) - (-e^{-(-1)} - e^{-1})\}$$
$$+\{(e^2 + e^{-2}) - (e^0 + e^0)\}$$
$$= \{(-1-1) - (-e - e^{-1})\} + \{(e^2 + e^{-2}) - (1+1)\}$$
$$= -2 + e + \frac{1}{e} + e^2 + \frac{1}{e^2} - 2$$
$$= \boldsymbol{e^2 + e + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} - 4}$$

204　$y' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

$$= \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}$$

よって

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2$$
$$= 1 + \frac{1}{4}\{(e^{\frac{x}{2}})^2 - 2\cdot e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{-\frac{x}{2}} + (e^{-\frac{x}{2}})^2\}$$
$$= 1 + \frac{1}{4}(e^x - 2 + e^{-x})$$
$$= \frac{1}{4}(e^x + 2 + e^{-x})$$
$$= \frac{1}{4}\{(e^{\frac{x}{2}})^2 + 2\cdot e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{-\frac{x}{2}} + (e^{-\frac{x}{2}})^2\}$$
$$= \frac{1}{4}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2$$

したがって，曲線の長さを l とすると

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$
$$= \int_0^2 \sqrt{\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left|e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right|dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})\,dx \qquad (e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} > 0 \text{ より})$$
$$= \frac{1}{2}\left[2e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^2$$
$$= \left[e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^2$$
$$= (e^1 - e^{-1}) - (e^0 - e^0)$$
$$= \boldsymbol{e - \frac{1}{e}}$$

205（1）　$y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+1)'$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

よって

$$1 + (y')^2 = 1 + \left\{\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$
$$= 1 + \frac{1}{4}(x+1)$$
$$= \frac{4}{4} + \frac{1}{4}(x+1) = \frac{1}{4}(x+5)$$

したがって，曲線の長さを l とすると

$$l = \int_{-1}^4 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$
$$= \int_{-1}^4 \sqrt{\frac{1}{4}(x+5)}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^4 (x+5)^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^4$$
$$= \frac{1}{3}\left[(x+5)\sqrt{x+5}\right]_{-1}^4$$
$$= \frac{1}{3}\left\{(4+5)\sqrt{4+5} - (-1+5)\sqrt{-1+5}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}(9\cdot 3 - 4\cdot 2)$$
$$= \frac{1}{3}(27-8)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 19 = \boldsymbol{\frac{19}{3}}$$

（2）　$y' = x^2 - \frac{1}{4x^2}$

よって

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2$$
$$= 1 + (x^2)^2 - 2\cdot x^2\cdot\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{16(x^2)^2}$$
$$= 1 + (x^2)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16(x^2)^2}$$
$$= (x^2)^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16(x^2)^2}$$
$$= \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2$$

したがって，曲線の長さを l とすると

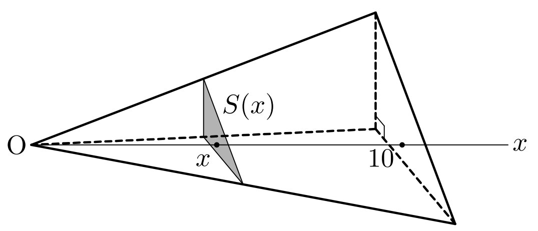
$$l=\int_1^3\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$
$$=\int_1^3\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^3\left|x^2+\frac{1}{4x^2}\right|dx$$
$$=\int_1^3\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx\qquad\left(x^2+\frac{1}{4x^2}>0\text{ より}\right)$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4x}\right]_1^3$$
$$=\left(\frac{1}{3}\cdot3^3-\frac{1}{4\cdot3}\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot1^3-\frac{1}{4\cdot1}\right)$$
$$=\left(9-\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{108-1-4+3}{12}$$
$$=\frac{106}{12}=\boldsymbol{\frac{53}{6}}$$

206　$3^2+4^2=5^2$ であるから，底面は，3 と 4 を直角をはさむ 2 辺とする直角三角形である．よって，底面積は，$\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=6$

よって

$$V=\frac{1}{3}\cdot6\cdot10=\mathbf{20}$$

〔別解〕



図のように，頂点 O を通り，底面と垂直な直線を x 軸にとり，点 x において，底面と平行な平面でこの立体を切ったときの切り口の面積を $S(x)$ とする．

切り口と底面は相似であり，相似比は $x:10$ であるから，面積比は $x^2:10^2=x^2:100$ となる．

底面の面積は 6 であるから，$S(x):6=x^2:100$

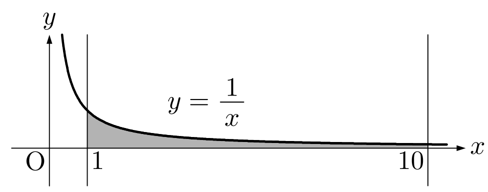
これより，$S(x)=\frac{3}{50}x^2$ であるから

$$V=\int_0^{10}S(x)\,dx$$
$$=\int_0^{10}\frac{3}{50}x^2\,dx$$
$$=\frac{3}{50}\int_0^{10}x^2\,dx$$
$$=\frac{3}{50}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{10}$$
$$=\frac{1}{50}\left[x^3\right]_0^{10}$$
$$=\frac{1}{50}\left(10^3-0\right)$$
$$=\frac{1}{50}\cdot1000=\mathbf{20}$$

207　切り口の面積は，$x\sin x$ であるから，求める面積は

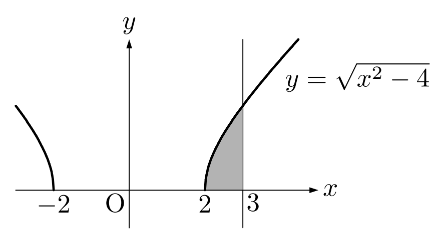
$$\int_0^\pi x\sin x\,dx$$
$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)\,dx$$
$$=(-\pi\cos\pi-0)+\Big[\sin x\Big]_0^\pi$$
$$=-\pi\cdot(-1)+(\sin\pi-\sin0)=\boldsymbol{\pi}$$

208（1）



$$V=\pi\int_1^{10}y^2\,dx$$
$$=\pi\int_1^{10}\left(\frac{1}{x}\right)^2dx$$
$$=\pi\int_1^{10}\frac{1}{x^2}\,dx$$
$$=\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{10}$$
$$=-\pi\left(\frac{1}{10}-1\right)$$
$$=-\pi\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)=\boldsymbol{\frac{9}{10}\pi}$$

（2）　$y=\sqrt{x^2-4}$ と x 軸との交点は，$0=\sqrt{x^2-4}$ より，$x^2=4$，すなわち，$x=\pm2$

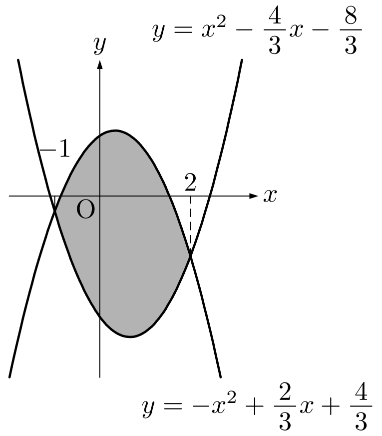


$$V=\pi\int_2^3y^2\,dx$$
$$=\pi\int_2^3(\sqrt{x^2-4})^2\,dx$$
$$=\pi\int_2^3(x^2-4)\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_2^3$$
$$=\pi\left\{\left(\frac{1}{3}\cdot3^3-4\cdot3\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot2^3-4\cdot2\right)\right\}$$
$$=\pi\left\{(9-12)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right\}$$
$$=\pi\left(5-\frac{8}{3}\right)$$
$$=\pi\cdot\frac{7}{3}=\boldsymbol{\frac{7}{3}\pi}$$

CHECK

209（1）　2 曲線の交点の x 座標を求めると

$$x^2-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}=-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$$
$$2x^2-2x-4=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x+1)(x-2)=4$$
$$x=-1,\ 2$$

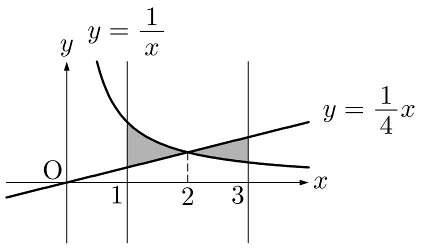


$-1\leqq x\leqq 2$ において，$-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\geqq x^2-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{2}\left\{\left(-x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\right)-\left(x^2-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}\right)\right\}dx\\&=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx\\&=-2\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)\,dx\\&=-2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{2}\\&=-2\left\{\left(\frac{8}{3}-2-4\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right\}\\&=-2\left(\frac{16+2+3}{6}-8\right)\\&=-2\left(\frac{21}{6}-8\right)\\&=-2\left(\frac{7}{2}-8\right)\\&=-7+16=\mathbf{9}\end{aligned}$$

（2）　曲線と直線の交点の x 座標を求めると

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{4}x$$
$$4=x^2$$
$$x=\pm 2$$



$1\leqq x\leqq 2$ において，$\frac{1}{x}\geqq\frac{1}{4}x$，$2\leqq x\leqq 3$ において，$\frac{1}{4}x\geqq\frac{1}{x}$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}x\right)dx+\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{x}\right)dx\\&=\left[\log|x|-\frac{1}{8}x^2\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{8}x^2-\log|x|\right]_{2}^{3}\\&=\left\{\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)-\left(\log 1-\frac{1}{8}\right)\right\}\\&\qquad+\left\{\left(\frac{9}{8}-\log 3\right)-\left(\frac{1}{2}-\log 2\right)\right\}\\&=\log 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{9}{8}-\log 3-\frac{1}{2}+\log 2\\&=2\log 2-\log 3-1+\frac{5}{4}\\&=\mathbf{2\log 2-\log 3+\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

210（1）　$y'=\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$

よって

$$\begin{aligned}1+(y')^2&=1+\left\{\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}\right\}^2\\&=1+\frac{9}{4}(x-1)\\&=\frac{1}{4}(4+9x-9)=\frac{1}{4}(9x-5)\end{aligned}$$

したがって，曲線の長さを l とすると

$$\begin{aligned}l&=\int_{1}^{6}\sqrt{1+(y')^2}\,dx\\&=\int_{1}^{6}\sqrt{\frac{1}{4}(9x-5)}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_{1}^{6}(9x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\left[(9x-5)^{\frac{3}{2}}\right]\\&=\frac{1}{27}\left[(9x-5)\sqrt{9x-5}\right]_{1}^{6}\\&=\frac{1}{27}(49\sqrt{49}-4\sqrt{4})\\&=\frac{1}{27}(49\cdot 7-4\cdot 2)\\&=\frac{1}{27}(343-8)=\mathbf{\frac{335}{27}}\end{aligned}$$

（2）　$y'=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})'}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}\\&=\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}1+(y')^2&=1+\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2\\&=1+\frac{1}{x^2-1}\\&=\frac{x^2-1+1}{x^2-1}=\frac{x^2}{x^2-1}\end{aligned}$$

したがって，曲線の長さを l とすると

$$\begin{aligned}l&=\int_{2}^{3}\sqrt{1+(y')^2}\,dx\\&=\int_{2}^{3}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}\,dx\\&=\int_{2}^{3}\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\,dx\\&=\int_{2}^{3}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx\quad(\leftarrow 2\leqq x\leqq 3\ で，x>0)\end{aligned}$$

ここで，$\sqrt{x^2-1}=t$ とおくと，$x^2-1=t^2$ より，

$2x\,dx=2t\,dt$，すなわち，$x\,dx=t\,dt$

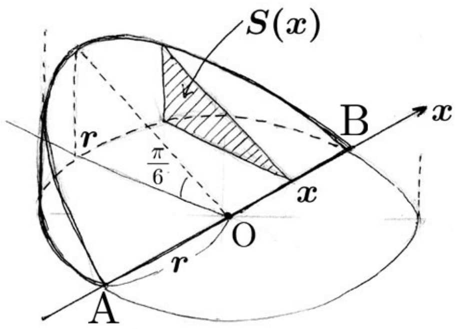
また，x と t の対応は

x	2	$\to$	3
t	$\sqrt{3}$	$\to$	$\sqrt{8}$

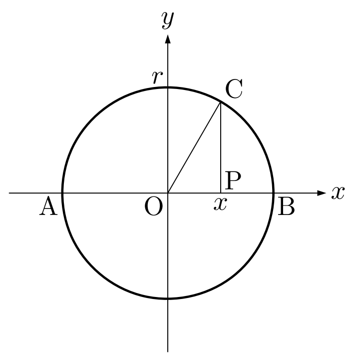
よって

$$l=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{1}{t}\cdot t\,dt$$
$$=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}dt$$
$$=\Big[\,t\,\Big]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}$$
$$=\mathbf{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

211　※ 現時点で，この問題の図を TEX で描くスキルがないので，手書きです。



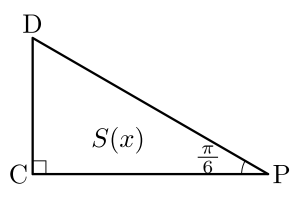
直円柱の底面について，円の中心を原点として図のように座標軸を定める．



$\mathrm{P}(x,\ 0)$　$(-r\leqq x\leqq r)$ とすれば，$\mathrm{OC}=r$ であるから

$\mathrm{CP}=\sqrt{r^2-|x|^2}=\sqrt{r^2-x^2}$

線分 CP を通り，底面に垂直な平面でこの立体を切ったときの切断面を $\triangle\mathrm{DCP}$ とし，この面積を $S(x)$ とする．



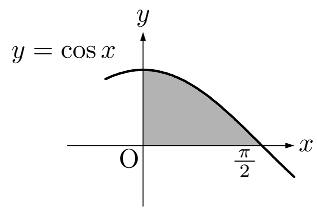
$\mathrm{CD}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{CP}=\dfrac{\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{3}}$ であるから

$\triangle\mathrm{DCP}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}\cdot\dfrac{\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{r^2-x^2}{2\sqrt{3}}$

したがって，求める体積を V とすると

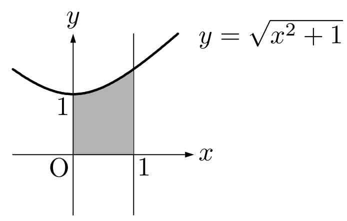
$$V=\int_{-r}^{r}\frac{r^2-x^2}{2\sqrt{3}}\,dx$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 2\int_0^r(r^2-x^2)\,dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^r$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}r^3=\boldsymbol{\frac{2}{3\sqrt{3}}r^3}$$

212（1）



$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-0\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}$$

（2）



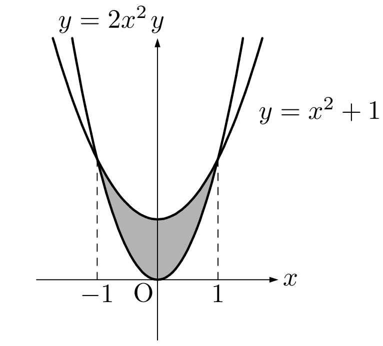
$$V=\pi\int_0^1y^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^1(\sqrt{x^2+1})^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^1(x^2+1)\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=\pi\left(\frac{1}{3}+1\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi}$$

213（1）　2 曲線の交点の x 座標を求めると

$x^2+1=2x^2$

$x^2-1=0$

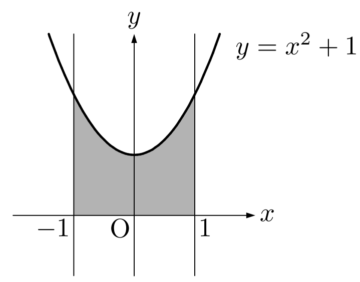
$x\pm1$



$-1 \leqq x \leqq 1$ において，$x^2+1 \geqq 2x^2$ であるから，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^2+1)-2x^2\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx$$
$$=-2\int_{0}^{1}(x^2-1)\,dx$$
$$=-2\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1$$
$$=-2\left(\frac{1}{3}-1-0\right)$$
$$=-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

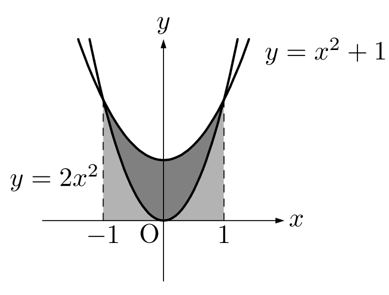
（2）



求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_{-1}^{1}y^2\,dx$$
$$=\pi\int_{-1}^{1}(x^2+1)^2\,dx$$
$$=2\pi\int_{0}^{1}(x^2+1)^2\,dx$$
$$=2\pi\int_{0}^{1}(x^4+2x^2+1)\,dx$$
$$=2\pi\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=2\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)$$
$$=2\pi\cdot\frac{3+10+15}{15}$$
$$=2\pi\cdot\frac{28}{15}=\boldsymbol{\frac{56}{15}\pi}$$

（3）



求める体積を V とし，（2）の結果を利用すると

$$V=\frac{56}{15}\pi-\pi\int_{-1}^{1}(2x^2)^2\,dx$$
$$=\frac{56}{15}\pi-\pi\int_{-1}^{1}4x^4\,dx$$
$$=\frac{56}{15}\pi-2\cdot4\pi\int_{0}^{1}x^4\,dx$$
$$=\frac{56}{15}\pi-8\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$=\frac{56}{15}\pi-8\pi\cdot\frac{1}{5}$$
$$=\frac{56}{15}\pi-\frac{8}{5}\pi$$
$$=\frac{56-24}{15}\pi=\boldsymbol{\frac{32}{15}\pi}$$

STEP UP

214（1）　$y'=3x^2-4$

よって，接線の方程式は

$$y-(-3)=(3\cdot1^2-4)(x-1)$$
$$y+3=-(x-1)$$
$$\boldsymbol{y=-x-2}$$

（2）　曲線の方程式と接線の方程式を連立させて

$$\begin{cases} y=x^3-4x \\ y=-x-2 \end{cases}$$

これを解くと

$$x^3-4x=-x-2$$
$$x^3-3x+2=0$$

これは，$x=1$ を重解にもつから，左辺は $(x-1)^2$ で割り切れる．

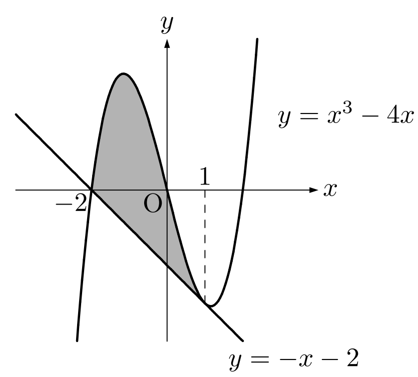
$$\begin{array}{rrrrr}
 & & x & +2 & \\ \hline
x^2-2x+1\,) & x^3 & & -3x & +2 \\
 & x^3 & -2x^2 & +x & \\ \hline
 & & 2x^2 & -4x & +2 \\
 & & 2x^2 & -4x & +2 \\ \hline
 & & & & 0
\end{array}$$

よって，$(x-1)^2(x+2)=0$ であるから，$x=-2$

これより，$y=-(-2)-2=0$

したがって，交点Bの座標は，$\boldsymbol{(-2,\ 0)}$

（3）　曲線と接線で囲まれた部分は，$-2 \leqq x \leqq 1$ であり，この範囲で $x^3-4x \geqq -x-2$ となる．



求める面積を S とすると

$$S=\int_{-2}^{1}\{x^3-4x-(-x-2)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-(4-6-4)$$
$$=\frac{1-6}{4}+2-(-6)$$
$$=-\frac{5}{4}+8=\frac{-5+32}{4}=\boldsymbol{\frac{27}{4}}$$

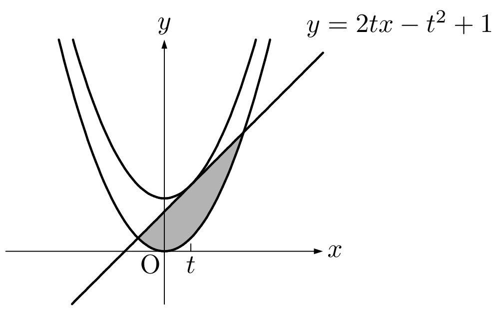
215　$y'=2x$ であるから，放物線 $y=x^2+1$ 上の点 $(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は

$y-(t^2+1)=2t(x-t)$

整理すると

$y=2tx-2t^2+(t^2+1)$

すなわち，$y=2tx-t^2+1$



放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2tx-t^2+1$ の交点の座標を求めると

$x^2=2tx-t^2+1$ より，$x^2-2tx+t^2-1=0$

これを解くと

$x^2-2tx+(t+1)(t-1)=0$

$\{x-(t+1)\}\{x-(t-1)\}=0$

よって，$x=t-1,\ t+1$

$t-1\leqq x\leqq t+1$ において，$2tx-t^2+1\geqq x^2$ であるから，放物線 $y=x^2$ と接線で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\int_{t-1}^{t+1}(2tx-t^2+1-x^2)\,dx$$
$$=\int_{t-1}^{t+1}\{-x^2+2tx-(t^2-1)\}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+tx^2-(t^2-1)x\right]_{t-1}^{t+1}$$
$$=\left\{-\frac{1}{3}(t+1)^3+t(t+1)^2-(t^2-1)(t+1)\right\}$$
$$\qquad-\left\{-\frac{1}{3}(t-1)^3+t(t-1)^2-(t^2-1)(t-1)\right\}$$
$$=-\frac{1}{3}(t+1)\{(t+1)^2-3t(t+1)+3(t^2-1)\}$$
$$\qquad+\frac{1}{3}(t-1)\{(t-1)^2-3t(t-1)+3(t^2-1)\}$$
$$=-\frac{1}{3}(t+1)(t^2+2t+1-3t^2-3t+3t^2-3)$$
$$\qquad+\frac{1}{3}(t-1)(t^2-2t+1-3t^2+3t+3t^2-3)$$
$$=-\frac{1}{3}(t+1)(t^2-t-2)+\frac{1}{3}(t-1)(t^2+t-2)$$
$$=\frac{1}{3}\{-(t+1)(t^2-t-2)+(t-1)(t^2+t-2)\}$$
$$=\frac{1}{3}\{-(t^3-t^2-2t+t^2-t-2)$$
$$\qquad+(t^3+t^2-2t-t^2-t+2)\}$$
$$=\frac{1}{3}\{-(t^3-3t-2)+(t^3-3t+2)\}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 4=\frac{4}{3}$$

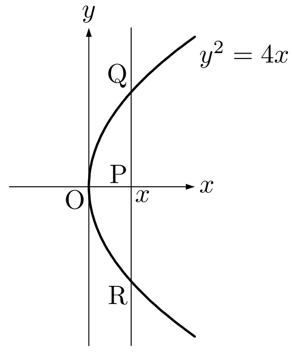
よって，S は t に関係なく一定である．

※ この問題の定積分の計算は，上のようにまともにやるとえらく手間がかかります．2 次関数の定積分の公式で，俗に $\boldsymbol{\frac{1}{6}}$**公式** と呼ばれているものがありますので，それを使って計算してみます．

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

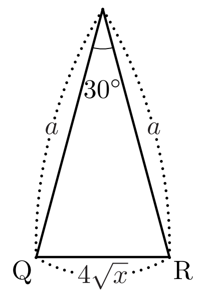
$$S=\int_{t-1}^{t+1}(2tx-t^2+1-x^2)\,dx$$
$$=\int_{t-1}^{t+1}\{-x^2+2tx-(t^2-1)\}\,dx$$
$$=-\int_{t-1}^{t+1}\{x^2-2tx+(t^2-1)\}\,dx$$
$$=-\int_{t-1}^{t+1}\{x-(t-1)\}\{x-(t+1)\}\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{(t+1)-(t-1)\}^3$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{1}{6}\cdot 8=\frac{4}{3}$$

216　点 P の座標を $(x,\ 0)$ とする．



Q，R の y 座標は，$y^2=4x$ より，$y=\pm 2\sqrt{x}$

これより，$\mathrm{QR}=2\sqrt{x}-(-2\sqrt{x})=4\sqrt{x}$



二等辺三角形の等辺の長さを a とすると，余弦定理より

$$a^2+a^2-2a^2\cos 30^\circ=(4\sqrt{x})^2$$

$$2a^2-2a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=16x$$

$$(2-\sqrt{3})a^2=16x$$

よって，$a^2=\dfrac{16x}{2-\sqrt{3}}$

したがって，二等辺三角形の面積 $S(x)$ とすれば

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 30^\circ\\&=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{16x}{2-\sqrt{3}}\\&=\frac{4x}{2-\sqrt{3}}\\&=\frac{4(2+\sqrt{3})x}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=4(2+\sqrt{3})x\end{aligned}$$

以上より，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 S(x)\,dx\\&=\int_0^1 4(2+\sqrt{3})x\,dx\\&=4(2+\sqrt{3})\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\\&=4(2+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{2(2+\sqrt{3})}\end{aligned}$$

217（1）　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より，$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$

これより，$y=(1-\sqrt{x})^2=1-2\sqrt{x}+x$ であるから，図形 F の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^1(x-2\sqrt{x}+1)\,dx&=\left[\frac{1}{2}x^2-2\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+1\\&=\frac{3-8+6}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

（2）　$$\begin{aligned}y^2&=(x-2\sqrt{x}+1)^2\\&=x^2+4x+1-4x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+2x\\&=x^2+6x-4x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+1\end{aligned}$$

よって，求める立体の体積は

$$\begin{aligned}\pi\int_0^1 y^2&=\pi\int_0^1(x^2+6x-4x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}+1)\,dx\\&=\pi\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2-4\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-4\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1\\&=\pi\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2-\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1\\&=\pi\left(\frac{1}{3}+3-\frac{8}{5}-\frac{8}{3}+1\right)\\&=\pi\cdot\frac{5+45-24-40+15}{15}=\boldsymbol{\frac{1}{15}\pi}\end{aligned}$$

218（1）　$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ より

$$\begin{aligned}1+\{f'(x)\}^2&=1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\\&=\frac{4+e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\\&=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}\\&=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}h(\alpha)&=\int_\alpha^{\alpha+1}\sqrt{\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_\alpha^{\alpha+1}|\,e^x+e^{-x}\,|\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_\alpha^{\alpha+1}(e^x+e^{-x})\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_\alpha^{\alpha+1}\\&=\frac{1}{2}\{(e^{\alpha+1}-e^{-\alpha-1})-(e^\alpha-e^{-\alpha})\}\\&=\frac{1}{2}\{(e^{\alpha+1}-e^{\alpha})-(e^{-\alpha-1}-e^{-\alpha})\}\\&=\frac{1}{2}\{(e^{\alpha}(e-1)-e^{-\alpha-1}(1-e)\}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}(e-1)(e^\alpha+e^{-\alpha-1})}\end{aligned}$$

（2）　$$\begin{aligned}h'(\alpha)&=\frac{1}{2}(e-1)(e^\alpha+e^{-\alpha-1})'\\&=\frac{1}{2}(e-1)(e^\alpha-e^{-\alpha-1})\end{aligned}$$

$h'(\alpha)=0$ となるのは，$e^\alpha-e^{-\alpha-1}=0$ より

$$e^\alpha=\frac{1}{e^{\alpha+1}}$$

$$e^\alpha\cdot e^{\alpha+1}=1$$

$$e^{\alpha+(\alpha+1)}=1$$

これより，$2\alpha+1=0$ であるから，$\alpha=-\dfrac{1}{2}$

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$ のときの $h(\alpha)$ の値は

$$\begin{aligned}h\left(-\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{2}(e-1)\left\{e^{-\frac{1}{2}}+e^{-(-\frac{1}{2})-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}(e-1)(e^{-\frac{1}{2}}+e^{-\frac{1}{2}})\\&=\frac{1}{2}(e-1)\cdot 2e^{-\frac{1}{2}}\\&=(e-1)e^{-\frac{1}{2}}\\&=e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{e}-\frac{1}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$

$h(\alpha)$ の増減表は次のようになる．

α	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$h'(\alpha)$	$-$	0	$+$
$h(\alpha)$	$\searrow$	$\sqrt{e}-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$

よって，最小値は，$\boldsymbol{\sqrt{e}-\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$　$\left(\alpha=-\dfrac{1}{2}\right)$

219 ※ 直線と放物線の交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とし，例題の結果を利用する。

（1）　$2x^2+3x-1=0$ を解くと

$$\begin{aligned}x&=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{4}\\&=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}\end{aligned}$$

よって，$\beta-\alpha=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}-\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

したがって，求める面積は

$$\frac{1}{6}\cdot 2\cdot\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^3=\frac{1}{3}\cdot\frac{17\sqrt{17}}{8}$$
$$=\boldsymbol{\frac{17\sqrt{17}}{24}}$$

〔別解〕

$2x^2+3x-1=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2&=\beta^2-2\beta\alpha+\alpha^2\\&=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\\&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2\alpha\beta\\&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{9}{4}+2=\frac{17}{4}\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^3&=\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}\\&=\sqrt{\{(\beta-\alpha)^2\}^3}\\&=\sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^3}\\&=\frac{17}{4}\sqrt{\frac{17}{4}}\\&=\frac{17}{4}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{17}=\frac{17\sqrt{17}}{8}\end{aligned}$$

よって，求める面積は

$$\frac{1}{6}\cdot 2\cdot\frac{17\sqrt{17}}{8}=\boldsymbol{\frac{17\sqrt{17}}{24}}$$

（2）　放物線と直線の交点の x 座標は，$(x+3)(x-1)=-\frac{1}{2}x+2$ の解であるから，これを整理して

$$x^2+2x-3=-\frac{1}{2}x+2$$
$$2x^2+4x-6=-x+4$$
$$2x^2+5x-10=0$$

これを解くと

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+80}}{4}$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{105}}{4}$$

よって，$\beta-\alpha=\frac{5+\sqrt{105}}{4}-\frac{5-\sqrt{105}}{4}=\frac{\sqrt{105}}{2}$

したがって，求める面積は

$$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot\left(\frac{\sqrt{105}}{2}\right)^3=\frac{1}{6}\cdot\frac{105\sqrt{105}}{8}$$
$$=\boldsymbol{\frac{35\sqrt{105}}{16}}$$

〔別解〕

$2x^2+5x-10=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{2},\quad \alpha\beta=-5$$

よって

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4\cdot(-5)\\&=\frac{25}{4}+20=\frac{105}{4}\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^3&=\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}\\&=\sqrt{\{(\beta-\alpha)^2\}^3}\\&=\sqrt{\left(\frac{105}{4}\right)^3}\\&=\frac{105}{4}\sqrt{\frac{105}{4}}\\&=\frac{105}{4}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{105}=\frac{105\sqrt{105}}{8}\end{aligned}$$

よって，求める面積は

$$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot\frac{105\sqrt{105}}{8}=\boldsymbol{\frac{35\sqrt{105}}{16}}$$

220　放物線と直線の交点の x 座標は，$x^2=mx+1$ の解であるから，これを整理して

$$x^2-mx-1=0$$

これを解くと，$x=\frac{m\pm\sqrt{m^2+4}}{2}$

$m^2+4>0$ より，この解は異なる 2 つの実数解となるので，放物線と直線は異なる 2 点で交わる．

2 つの交点の x 座標を α，β　$(\alpha<\beta)$ とすると，

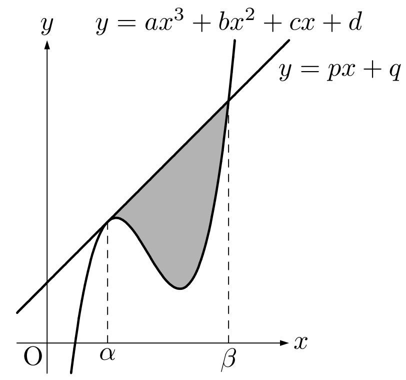
$$\beta-\alpha=\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}-\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}=\sqrt{m^2+4}$$

よって，求める面積は

$$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot(\sqrt{m^2+4})^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}(m^2+4)\sqrt{m^2+4}}$$

221　接線の方程式を $y=px+q$ とする．

ｉ）$\alpha<\beta$ のとき



$\alpha\leqq x\leqq\beta$ で，$px+q\geqq ax^3+bx^2+cx+d$ で，

$$(px+q)-(ax^3+bx^2+cx+d)=-a(x-\alpha)^2(x-\beta)$$

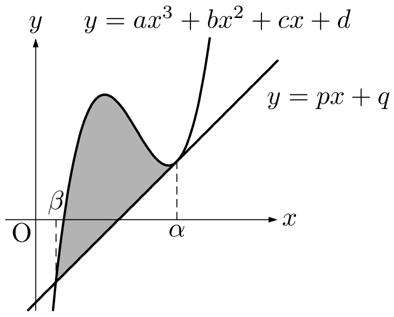
である．

また，$x-\beta=x-\alpha+\alpha-\beta=(x-\alpha)+(\alpha-\beta)$ と変形できるので，求める面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta \{(px+q)-(ax^3+bx^2+cx+d)\}\,dx$$
$$=-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx$$
$$=-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}\,dx$$
$$=-a\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^3+(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\}\,dx$$
$$=-a\left\{\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4\right]_\alpha^\beta+(\alpha-\beta)\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta\right\}$$
$$=-a\left\{\left(\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4-0\right)\right.$$
$$\left.+(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-0\right)\right\}$$
$$=-a\left\{\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4+\frac{1}{3}(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^3\right\}$$
$$=-a\left\{\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^4\right\}$$
$$=-a\left\{-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4\right\}=\frac{1}{12}a(\beta-\alpha)^4$$

※ 問題集の解答は，部分積分を用いていますが，ここでは別の方法を使いました．部分積分の方が計算量は少ないです．

ii）$\alpha>\beta$ のとき

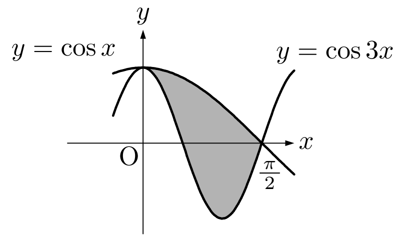


$\beta\leqq x\leqq\alpha$ で，$ax^3+bx^2+cx+d\geqq px+q$ で，

$(ax^3+bx^2+cx+d)-(px+q)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ であるから，求める面積を S とすると

$$S=\int_\beta^\alpha \{(ax^3+bx^2+cx+d)-(px+q)\}\,dx$$
$$=a\int_\beta^\alpha (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx$$
$$=a\int_\beta^\alpha (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}\,dx$$
$$=a\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^3+(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\}\,dx$$
$$=a\left\{\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4\right]_\beta^\alpha+(\alpha-\beta)\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\beta^\alpha\right\}$$
$$=a\left\{\left(0-\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4\right)\right.$$
$$\left.+(\alpha-\beta)\left(0-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3\right)\right\}$$
$$=a\left\{-\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4-\frac{1}{3}(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^3\right\}$$
$$=a\left\{-\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^4\right\}$$
$$=a\cdot\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4=\frac{1}{12}a(\beta-\alpha)^4$$

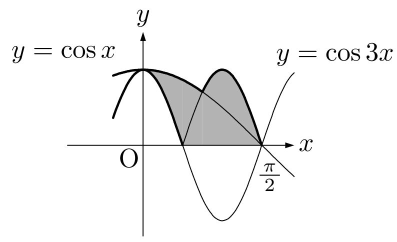
222（1）



$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos x\geqq\cos 3x$ であるから，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\cos 3x)\,dx$$
$$=\left[\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\pi-0$$
$$=1-\frac{1}{3}\cdot(-1)$$
$$=1+\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

（2）　下の図の，影をつけた部分を回転させたときの回転体の体積を求めればよい．



$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $y=\cos 3x$ と x 軸との交点の x 座標は，$\cos 3x=0$ $\left(0\leqq 3x\leqq\dfrac{3}{2}\pi\right)$ より，$3x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

これより，$x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$

また，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $y=\cos x$ と $y=-\cos 3x$ との交点の x 座標は，$\cos x=-\cos 3x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，

$\cos x=-(4\cos^3 x-3\cos x)$　※ 3 倍角の公式より

$4\cos^3 x-2\cos x=0$

$2\cos x(2\cos^2 x-1)=0$

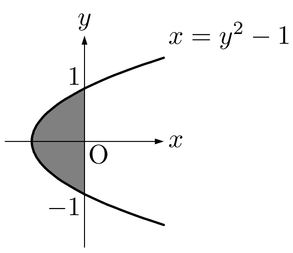
よって，$\cos x=0$，$\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}$

以上より，求める回転体の体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x)^2\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 3x)^2\,dx$$
$$-\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 3x)^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 6x}{2}\,dx$$
$$-\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6x}{2}\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{6}\sin 6x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$-\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{6}\sin 6x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0\right)$$
$$+\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}\sin 3\pi\right)-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}\sin\frac{3}{2}\pi\right)\right\}$$
$$-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{6}\sin\pi-0\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3\pi-\pi+3+1}{6}$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\pi+4}{6}=\boldsymbol{\frac{\pi(\pi+2)}{6}}$$

223　放物線と y 軸との交点の y 座標は，$y^2-1=0$ より，$y=\pm1$

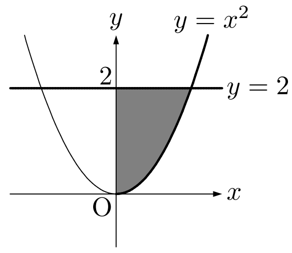


求める面積を S とすると
$$S=-\int_{-1}^{1}(y^2-1)\,dy$$
$$=-2\int_0^1(y^2-1)\,dy$$
$$=-2\left[\frac{1}{3}y^3-y\right]_0^1$$
$$=-2\left(\frac{1}{3}-1\right)$$
$$=-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

〔別解〕

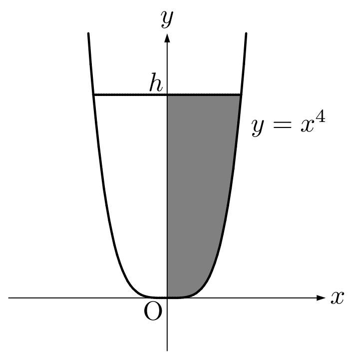
$y^2-1=0$ の 2 つの解は $y=\pm1$ であるから，求める面積を S とすると
$$S=\frac{1}{6}\cdot1\cdot\{1-(-1)\}^3$$
$$=\frac{1}{6}\cdot2^3$$
$$=\frac{8}{6}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

224　$y=x^2$ のグラフは，y 軸に関して対称であるから，下の図の影をつけた部分を y 軸のまわりに回転させたときの回転体の体積を求めればよい．



$y=x^2$ より，$x=\sqrt{y}\ \ (x\geqq0)$ であるから，求める体積を V とすると
$$V=\pi\int_0^2 x^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^2(\sqrt{y})^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^2 y\,dy$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^2$$
$$=\pi\,(2-0)=\boldsymbol{2\pi}$$

225　水面の高さが h のときの水量を V とする．



$y=x^4$ より，$x=\sqrt[4]{y}$ であるから，
$$V=\pi\int_0^h x^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^h(\sqrt[4]{y})^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^h\sqrt{y}\,dy$$
$$=\pi\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^h$$
$$=\frac{2}{3}\pi h^{\frac{3}{2}}$$
一方，8 秒後の水量は，$60.75\pi\times8=486\pi$ であるから
$$\frac{2}{3}\pi h^{\frac{3}{2}}=486\pi$$
$$h^{\frac{3}{2}}=486\times\frac{3}{2}=729$$
ここで，$729=9^3=(9^2)^{\frac{3}{2}}$

よって，$h^{\frac{3}{2}}=(9^2)^{\frac{3}{2}}$ であるから，$h=9^2=\boldsymbol{81}$

∎