4章　積分の応用

BASIC

226　求める面積を S とする.

（1）　$\dfrac{dx}{dt} = 2t$

$0 < t < 1$ において，$2t > 0$ で，符号は一定であるから

$$S = \int_0^1 \left| (t^2 - 2t + 1) \cdot 2t \right| dt$$
$$= 2\int_0^1 \left| t(t-1)^2 \right| dt$$

$0 \leqq t \leqq 1$ において，$t(t-1)^2 \geqq 0$ であるから

$$S = 2\int_0^1 t(t-1)^2\, dt$$
$$= 2\int_0^1 (t^3 - 2t^2 + t)\, dt$$
$$= 2\left[\frac{1}{4}t^3 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right)$$
$$= 2 \cdot \frac{3 - 8 + 6}{12} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

（2）　$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

$0 < t < \dfrac{\pi}{4}$ において，$\dfrac{1}{\cos^2 t} > 0$ で，符号は一定であるから

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| (\sin t + 1) \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \right| dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{\sin t + 1}{\cos^2 t} \right| dt$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において, $\dfrac{\sin t + 1}{\cos^2 t} \geqq 0$ であるから

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t + 1}{\cos^2 t}\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t} \right) dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t}\, dt$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dx$ において，$\cos t = u$ とおくと，$-\sin t\, dt = du$ であるから，$\sin t\, dt = -du$

また，t と u の対応は

t	$0 \to \frac{\pi}{4}$
u	$1 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dx = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u^2} \cdot (-du)$$
$$= -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u^2}\, du$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{u^2}\, du$$
$$= \left[-\frac{1}{u} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$
$$= -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \sqrt{2} - 1$$

したがって

$$S = (\sqrt{2} - 1) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t}\, dt$$
$$= (\sqrt{2} - 1) + \Big[\tan t \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= (\sqrt{2} - 1) + \left(\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 \right)$$
$$= (\sqrt{2} - 1) + 1 = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

〔別解〕　（積分計算の途中から）

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t} \right) dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{-(\cos t)'}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t} \right\} dt$$
$$= \left[-\left(-\frac{1}{\cos t} \right) + \tan t \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \left[\frac{1}{\cos t} + \tan t \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} + \tan \frac{\pi}{4} \right) - \left(\frac{1}{\cos 0} + \tan 0 \right)$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 1 - \frac{1}{1}$$
$$= \sqrt{2} + 1 - 1 = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

（3）　$\dfrac{dx}{dt} = -\sin t$

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において，$-\sin t < 0$ で，符号は一定であるから

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| (\cos 2t + 1) \cdot (-\sin t) \right| dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| -\sin t(1 - 2\sin^2 t + 1) \right| dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| -2(\sin t - \sin^3 t) \right| dt$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin t - \sin^3 t \right| dt$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において, $\sin t - \sin^3 t = \sin t(1 - \sin^2 t) \geqq 0$ であるから

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \sin^3 t)\, dt$$
$$= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, dt \right)$$
$$= 2\left(\Big[-\cos t \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3} \right)$$
$$= 2\left\{ -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) - \frac{2}{3} \right\}$$
$$= 2\left\{ -(0 - 1) - \frac{2}{3} \right\}$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

227　求める曲線の長さを l とする.

（1）　$\dfrac{dx}{dt} = 6t$

$\dfrac{dy}{dt} = 3 - 3t^2$

よって

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(6t)^2 + (3-3t^2)^2}\, dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{36t^2 + 9 - 18t^2 + 9t^4}\, dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{9t^4 + 18t^2 + 9}\, dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{9(t^2+1)^2}\, dt \\
&= 3\int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1)\, dt \\
&= 3\left[\frac{1}{3}t^3 + t\right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= 3\left\{\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{3})^3 + \sqrt{3} - 0\right\} \\
&= 3\cdot 2\sqrt{3} = \boldsymbol{6\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

（2）
$$
\frac{dx}{dt} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t
$$
$$
\frac{dy}{dt} = \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t
$$

よって

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{\pi} \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2}\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{t^2}\, dt \\
&= \int_0^{\pi} t\, dt \qquad \leftarrow 0 \leqq t \leqq \pi \text{で，} t \geqq 0 \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\pi^2}
\end{aligned}
$$

（3）
$$
\frac{dx}{dt} = -2\sin t - (-\sin 2t\cdot 2) = 2(\sin 2t - \sin t)
$$
$$
\frac{dy}{dt} = 2\cos t - \cos 2t\cdot 2 = 2(\cos t - \cos 2t)
$$

よって

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^{\pi} \sqrt{\{2(\sin 2t - \sin t)\}^2 + \{2(\cos t - \cos 2t)\}^2}\, dt \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{4\{(\cos^2 2t + \sin^2 2t) + (\cos^2 t + \sin^2 t) - (2\sin 2t\sin t + 2\cos t\cos 2t)\}}\, dt \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 1 - 2(\cos 2t\cos t + \sin 2t\sin t)}\, dt \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos(2t - t)}\, dt \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt \\
&= 4\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt \qquad \leftarrow 0 \leqq t \leqq \pi \text{で，} \sin\frac{t}{2} \geqq 0 \\
&= 4\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} \\
&= -8\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) \\
&= -8\cdot(-1) = \boldsymbol{8}
\end{aligned}
$$

※　根号内の計算の別解

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\{2(\sin 2t - \sin t)\}^2 + \{2(\cos t - \cos 2t)\}^2} \\
&= \sqrt{4\left(2\cos\frac{2t+t}{2}\sin\frac{2t-t}{2}\right)^2 + 4\left(-2\sin\frac{t+2t}{2}\sin\frac{t-2t}{2}\right)^2} \\
&= 2\sqrt{4\left(\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)^2 + 4\left(\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{-t}{2}\right)^2} \\
&= 4\sqrt{\cos^2\frac{3t}{2}\sin^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{3t}{2}\left(-\sin\frac{t}{2}\right)^2} \\
&= 4\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}\left(\cos^2\frac{3t}{2} + \sin^2\frac{3t}{2}\right)} \\
&= 4\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}
\end{aligned}
$$

228（1）　この楕円は，x 軸，y 軸について対称であるから，求める面積は，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における部分の面積の 4 倍である．

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t \leqq 0$ で，符号は一定であるから，求める面積を S とすると

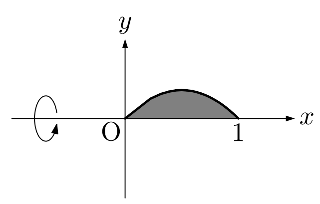
$$
\begin{aligned}
S &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\,b\sin t(-a\sin t)\,|\, dt \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |-ab\sin^2 t|\, dt \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin^2 t\, dt \qquad \leftarrow -ab\sin^2 t \leqq 0 \\
&= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt \\
&= 4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\pi ab}
\end{aligned}
$$

（2）　この楕円は，x 軸，y 軸について対称であり，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t \leqq 0$ で，符号は一定であるから，求める体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (b\sin t)^2|-a\sin t|\, dt \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab^2\sin^3 t\, dt \\
&= 2\pi ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, dt \\
&= 2\pi ab^2\cdot\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi ab^2}
\end{aligned}
$$

229　求める体積を V とする．

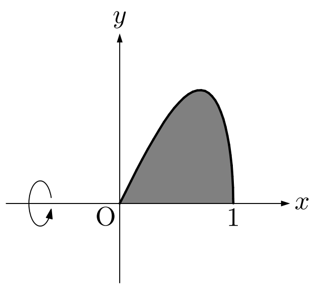
（1）



$0 < t < 1$ において，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} > 0$ で，符号は一定である．

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2\left|\frac{1}{2\sqrt{t}}\right| dt \\
&= \frac{1}{2}\pi\int_0^1 (t - 2t\sqrt{t} + t^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\pi\int_0^1 (t^{\frac{1}{2}} - 2t + t^{\frac{3}{2}})\, dt \\
&= \frac{1}{2}\pi\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t} - t^2 + \frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{10 - 15 + 6}{15} = \boldsymbol{\frac{1}{30}\pi}
\end{aligned}
$$

（2）



$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{dx}{dt} = \cos t > 0$ で，符号は一定である．

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 |\cos t|\, dt \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cdot \cos t\, dt \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t\cos t)^2 \cos t\, dt \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t\, dt \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^3 t\, dt \\
&= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t - \cos^5 t)\, dt \\
&= 4\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) \\
&= 4\pi\cdot\frac{10-8}{15} \\
&= 4\pi\cdot\frac{2}{15} = \boldsymbol{\frac{8}{15}\pi}
\end{aligned}
$$

230（1）　$x = 2\cdot\cos\dfrac{3}{4}\pi$

$= 2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$

$y = 2\cdot\sin\dfrac{3}{4}\pi$

$= 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

よって，$\boldsymbol{(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})}$

（2）　$x = 3\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}$

$= 3\cdot 0 = 0$

$y = 3\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}$

$= 3\cdot 1 = 3$

よって，$\boldsymbol{(0,\ 3)}$

（3）　$x = 4\cdot\cos\dfrac{4}{3}\pi$

$= 4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$

$y = 4\cdot\sin\dfrac{4}{3}\pi$

$= 4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$

よって，$\boldsymbol{(-2,\ -2\sqrt{3})}$

231（1）　$r = \sqrt{1^2+1^2}$

$= \sqrt{2}$

また，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$

よって，$\boldsymbol{\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)}$

（2）　$r = \sqrt{(-2)^2+0^2}$

$= 2$

また，$\cos\theta = \dfrac{-2}{2} = -1$，　$\sin\theta = \dfrac{0}{2} = 0$ より

$\theta = \pi$

よって，$\boldsymbol{(2,\ \pi)}$

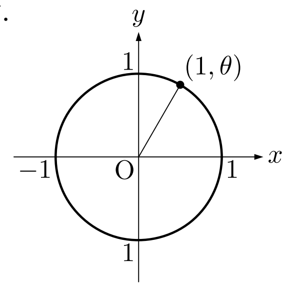
（3）　$r = \sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

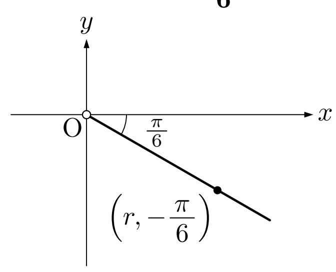
また，$\cos\theta = \dfrac{-3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$\sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$ より，$\theta = \dfrac{7}{6}\pi$

よって，$\boldsymbol{\left(2\sqrt{3},\ \dfrac{7}{6}\pi\right)}$

232（1）　任意の θ について，$r = 1$ であるから，**原点を中心とする半径 1 の円**を表す．



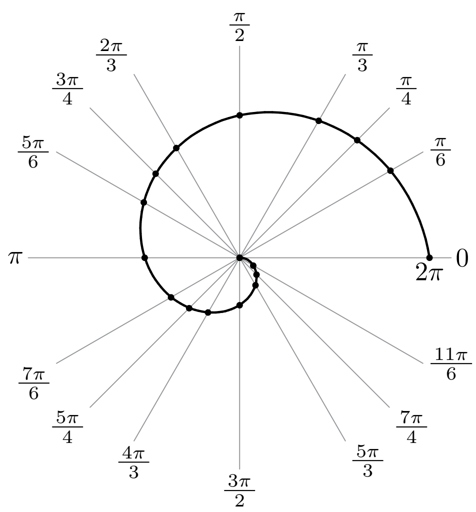
（2）　任意の $r\,(>0)$ について，$\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ であるから，**原点を通り x 軸の正の向きとのなす角が $-\dfrac{\pi}{6}$ である半直線**を表す．



233（1）　θ のいろいろな値に対する r の値を求めると

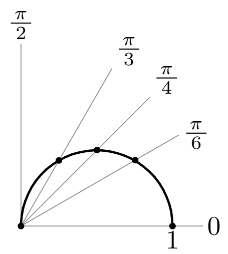
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	2π	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	π
	6.28	5.76	5.50	5.23	4.71	4.19	3.93	3.66	3.14

θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0
	2.62	2.36	2.09	1.57	1.05	0.79	0.52	0



（2）　θ のいろいろな値に対する r の値を求めると

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



※ 直交座標に変換してみると

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を代入して

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

これより，$x^2+y^2=x$ であるから，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$x\geqq 0,\ y\geqq 0$

234　それぞれの図形の面積を S とする．

（1）
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\theta^2)^2\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^4\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\theta^5\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^5\\&=\frac{1}{10}\cdot\frac{\pi^5}{32}=\boldsymbol{\frac{\pi^5}{320}}\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos\theta+2)^2\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+4\cos\theta+4)\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}+4\cos\theta+4\right)d\theta\\&=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta+8\cos\theta+8)\,d\theta\\&=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos 2\theta+8\cos\theta+9)\,d\theta\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+8\sin\theta+9\theta\right]_0^{2\pi}\\&=\frac{1}{4}\{(0+0+9\cdot 2\pi)-0\}=\boldsymbol{\frac{9}{2}\pi}\end{aligned}$$

235 それぞれの曲線の長さを l とする．

（1）　$r'=e^\theta$ であるから
$$\begin{aligned}r^2+(r')^2&=(e^\theta)^2+(e^\theta)^2\\&=e^{2\theta}+e^{2\theta}=2e^{2\theta}\end{aligned}$$
よって
$$\begin{aligned}l&=\int_0^\pi\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta\\&=\int_0^\pi\sqrt{2e^{2\theta}}\,d\theta\\&=\sqrt{2}\int_0^\pi\sqrt{(e^\theta)^2}\,d\theta\\&=\sqrt{2}\int_0^\pi e^\theta\,d\theta\\&=\sqrt{2}\left[e^\theta\right]_0^\pi\\&=\sqrt{2}(e^\pi-e^0)=\boldsymbol{\sqrt{2}(e^\pi-1)}\end{aligned}$$

（2）　$r'=-\sin\theta$ であるから
$$\begin{aligned}r^2+(r')^2&=(\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2\\&=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\end{aligned}$$
よって
$$\begin{aligned}l&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\\&=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

236（1）
$$\begin{aligned}与式&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{2+\varepsilon}^3\frac{dx}{\sqrt{x-2}}\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x-2}\right]_{2+\varepsilon}^3\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}2(\sqrt{1}-\sqrt{2+\varepsilon-2})\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}2(1-\sqrt{\varepsilon})\\&=2(1-0)=\boldsymbol{2}\end{aligned}$$

〔別解〕
$$\begin{aligned}与式&=\left[2\sqrt{x-2}\right]_2^3\\&=2(\sqrt{1}-\sqrt{0})\\&=2(1-0)=\boldsymbol{2}\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}与式&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{3-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^{3-\varepsilon}\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sin^{-1}\frac{3-\varepsilon}{3}-\sin^{-1}0\right)\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\sin^{-1}\frac{3-\varepsilon}{3}\\&=\sin^{-1}1=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

〔別解〕
$$\begin{aligned}与式&=\left[\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^3\\&=\sin^{-1}1-\sin^{-1}0\\&=\frac{\pi}{2}-0=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

（3）　与式 $= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-\frac{1}{4}}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} \right]_{\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} \right]_{\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{4}{3} (\sqrt[4]{1^3} - \sqrt[4]{\varepsilon^3})$$

$$= \frac{4}{3}(1 - 0) = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

〔別解〕

与式 $= \left[\frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} \right]_{0}^{1}$

$$= \frac{4}{3}(\sqrt[4]{1^3} - \sqrt[4]{0^3})$$

$$= \frac{4}{3}(1 - 0) = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

（4）　与式 $= \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ \varepsilon' \to +0}} \left(\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^4} + \int_{0+\varepsilon'}^{1} \frac{dx}{x^4} \right)$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^4} + \lim_{\varepsilon' \to +0} \int_{\varepsilon'}^{1} \frac{dx}{x^4}$$

ここで，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-4}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[-\frac{1}{3} x^{-3} \right]_{-1}^{-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_{-1}^{-\varepsilon}$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{1}{x^3} \right]_{-1}^{-\varepsilon}$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \to +0} \left(-\frac{1}{\varepsilon^3} + 1 \right)$$

この極限値は存在しないので，広義積分も存在しない．

237　求める面積を S とすると

$$S = \int_{-a}^{a} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{2b}{a} \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{2b}{a} \left[\frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) \right]_{0}^{a}$$

$$= \frac{b}{a}(a^2 \sin^{-1} 1 - a^2 \sin^{-1} 0)$$

$$= ab \cdot \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\pi ab}$$

238（1）　与式 $= \lim_{b \to \infty} \int_{2}^{b} x^{-5}\,dx$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{4x^4} \right]_{2}^{b}$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{b^4} - \frac{1}{16} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \left(0 - \frac{1}{16} \right) = \boldsymbol{\frac{1}{64}}$$

〔別解〕

与式 $= \left[-\frac{1}{4x^4} \right]_{2}^{\infty}$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{64} \right) = \boldsymbol{\frac{1}{64}}$$

（2）　与式 $= \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} e^{-2x}\,dx$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{0}^{b}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} (e^{-2b} - e^0)$$

$$= -\frac{1}{2}(0 - 1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

〔別解〕

与式 $= \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{0}^{\infty}$

$$= -\frac{1}{2}(0 - e^0)$$

$$= -\frac{1}{2}(0 - 1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（3）　与式 $= \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[3x^{\frac{1}{3}} \right]_{0}^{b}$$

$$= 3 \lim_{b \to \infty} (\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{0})$$

$$= 3 \lim_{b \to \infty} \sqrt[3]{b}$$

この極限値は存在しないので，広義積分も存在しない．

（4）　与式 $= \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} xe^{-x}\,dx$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\left[-xe^{-x} \right]_{0}^{b} + \int_{0}^{b} e^{-x}\,dx \right)$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-be^{b} - \left[e^{-x} \right]_{0}^{b} \right)$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{b}{e^b} - e^{-b} + e^0 \right)$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e^b} + 1 \right)$$

$$= -0 - 0 + 1 = \mathbf{1}$$

※ $\lim_{b \to \infty} \frac{b}{e^b} = \lim_{b \to \infty} \frac{b'}{(e^b)'} = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{e^b} = 0$

239　時刻 t における点 P の速度を $v(t)$，位置を $x(t)$ とする．

（1）　$v(t) = v(0) + \int_{0}^{t} \alpha(t)\,dt$

$$= 0 + \int_{0}^{t} \left\{ -18 \sin \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) \right\} dt$$

$$= -18 \left[-\frac{1}{3} \cos \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) \right]_{0}^{t}$$

$$= 6 \left\{ \cos \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$= 6 \left\{ \cos \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$\boldsymbol{= 6 \cos \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) - 3\sqrt{2}}$$

（2）　$x(t) = x(0) + \int_{0}^{t} v(t)\,dt$

$$= 0 + \int_{0}^{t} \left\{ 6 \cos \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) - 3\sqrt{2} \right\} dt$$

$$= \left[6 \cdot \frac{1}{3} \sin \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) - 3\sqrt{2}t \right]_{0}^{t}$$

$$= 2 \sin \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) - 3\sqrt{2}t - 2 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{= 2 \sin \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) - 3\sqrt{2}t - \sqrt{2}}$$

240　$-x'(t)$ が $x(t)$ に比例するので

$$-x'(t) = kx(t)$$

$x(t)$ は物質の質量だから，$x(t) > 0$ なので，両辺を $-x(t)$ で割ると

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -k$$

この両辺を t で積分すると

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}\,dt = -\int k\,dt$$

$$\log x(t) = -kt + C$$

よって

$$x(t) = e^{-kt+C}$$
$$= e^C e^{-kt}$$

e^C は定数なので，これを C' とおくと，$x(t) = C'e^{-kt}$

$t = 0$ のとき，$x(0) = x_0$ であるから

$$x_0 = C'e^0$$
$$x_0 = C'$$

よって，$\boldsymbol{x(t) = x_0 e^{-kt}}$

CHECK

241　求める面積を S とする．

（1）　$\dfrac{dx}{dt} = 3t^2$

$0 < t < 2$ において，$3t^2 > 0$ で，符号は一定であるから

$$S = \int_0^2 |\,(t-2)^2 \cdot 3t^2\,|\,dt$$
$$= 3\int_0^2 |\,t^2(t-2)^2\,|\,dt$$

$t^2(t-2)^2 \geqq 0$ であるから

$$S = 3\int_0^2 t^2(t-2)^2\,dt$$
$$= 3\int_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2)\,dt$$
$$= 3\left[\frac{1}{5}t^5 - t^4 + \frac{4}{3}t^3\right]_0^2$$
$$= 3\left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}\right)$$
$$= 3 \cdot \frac{96 - 240 + 160}{15} = \boldsymbol{\frac{16}{5}}$$

（2）　$\dfrac{dx}{dt} = e^t$

$e^t > 0$ で，符号は一定であるから

$$S = \int_0^1 |\,(e^{2t}+1) \cdot e^t\,|\,dt$$
$$= \int_0^1 |\,e^{3t} + e^t\,|\,dt$$

$e^{3t} + e^t \geqq 0$ であるから

$$S = \int_0^1 (e^{3t} + e^t)\,dt$$
$$= \left[\frac{1}{3}e^{3t} + e^t\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{3}e^3 + e\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}e^3 + e - \frac{4}{3}}$$

242　求める曲線の長さを l とする．

（1）　$\dfrac{dx}{dt} = 3t^2$

$\dfrac{dy}{dt} = 6t$

よって

$$l = \int_0^1 \sqrt{(3t^2)^2 + (6t)^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 36t^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 \sqrt{9t^2(t^2+4)}\,dt$$
$$= \int_0^1 |\,3t\,|\sqrt{t^2+4}\,dt$$
$$= 3\int_0^1 t\sqrt{t^2+4}\,dt \qquad \leftarrow\ 0 \leqq t \leqq 1 \text{ で，} t \geqq 0$$

$t^2 + 4 = u$ とおくと，$2t\,dt = du$ であるから，$t\,dt = \dfrac{1}{2}\,du$

また，t と u の対応は

t	$0 \to 1$
u	$4 \to 5$

よって

$$l = 3\int_4^5 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2}\,du$$
$$= \frac{3}{2}\int_4^5 u^{\frac{1}{2}}\,du$$
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_4^5$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 4\sqrt{4})$$
$$= \boldsymbol{5\sqrt{5} - 8}$$

（2）　$\dfrac{dx}{dt} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$

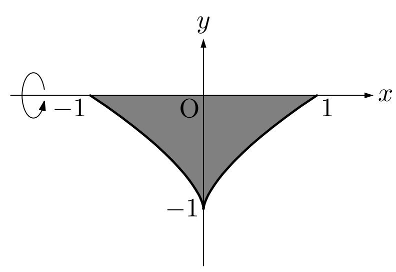
$\dfrac{dy}{dt} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t)$

よって

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\{-e^{-t}(\cos t + \sin t)\}^2 + \{e^{-t}(\cos t - \sin t)\}^2}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\{e^{-2t}(1 + 2\cos t \sin t)\} + \{e^{-2t}(1 - 2\cos t \sin t)\}}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{-2t}}\,dt$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} e^{-t}\,dt$$
$$= \sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^{2\pi}$$
$$= -\sqrt{2}(e^{-2\pi} - e^0)$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{e^{2\pi}}\right)}$$

243　求める体積を V とする．

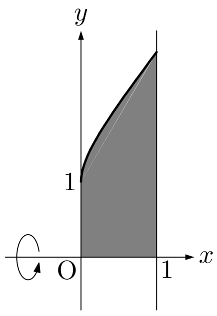
（1）



$-1 < t < 1$ において，$\dfrac{dx}{dt} = 3t^2 > 0$ で，符号は一定である．

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^{1}(t^2-1)^2|\,3t^2\,|\,dt\\
&= 3\pi\int_{-1}^{1}t^2(t^4-2t^2+1)\,dt\\
&= 6\pi\int_{0}^{1}(t^6-2t^4+t^2)\,dt\\
&= 6\pi\left[\frac{1}{7}t^6-\frac{2}{5}t^4+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1\\
&= 6\pi\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)\\
&= 6\pi\cdot\frac{15-42+35}{7\cdot5\cdot3}\\
&= 2\pi\cdot\frac{8}{35}=\boldsymbol{\frac{16}{35}\pi}
\end{aligned}
$$

（2）



$0<t<1$ において，$\dfrac{dx}{dt}=2t>0$ で，符号は一定である．

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{0}^{1}(e^t)^2|\,2t\,|\,dt\\
&= 2\pi\int_{0}^{1}te^{2t}\,dt\\
&= 2\pi\left(\left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2t}\,dt\right)\\
&= 2\pi\left\{\frac{1}{2}(e^2-0)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1\right\}\\
&= 2\pi\left\{\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2-e^0)\right\}\\
&= 2\pi\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}\right)\\
&= 2\pi\left(\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}\right)\\
&= 2\pi\cdot\frac{e^2+1}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(e^2+1)}
\end{aligned}
$$

244（1）

$$
\begin{aligned}
x &= 4\cdot\cos\frac{5}{4}\pi\\
&= 4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2\sqrt{2}\\
y &= 4\cdot\sin\frac{5}{4}\pi\\
&= 4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

よって，$\boldsymbol{(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})}$

（2）

$$
\begin{aligned}
x &= 2\cdot\cos\frac{5}{6}\pi\\
&= 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}\\
y &= 2\cdot\sin\frac{5}{6}pi\\
&= 2\cdot\frac{1}{2}=1
\end{aligned}
$$

よって，$\boldsymbol{(-\sqrt{3},\ 1)}$

（3）

$$
\begin{aligned}
x &= 1\cdot\cos\frac{3}{2}\pi\\
&= 1\cdot0=0\\
y &= 1\cdot\sin\frac{3}{2}\pi\\
&= 1\cdot(-1)=-1
\end{aligned}
$$

よって，$\boldsymbol{(0,\ -1)}$

245（1）

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{(-2)^2+2^2}\\
&= \sqrt{8}=2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

また，$\cos\theta=\dfrac{-2}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$\sin\theta=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

よって，$\boldsymbol{\left(2\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)}$

（2）

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{3^2+0^2}\\
&= 3
\end{aligned}
$$

また，$\cos\theta=\dfrac{3}{3}=1$，　$\sin\theta=\dfrac{0}{3}=0$ より

$\theta=0$

よって，$\boldsymbol{(3,\ 0)}$

（3）

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}\\
&= \sqrt{4}=2
\end{aligned}
$$

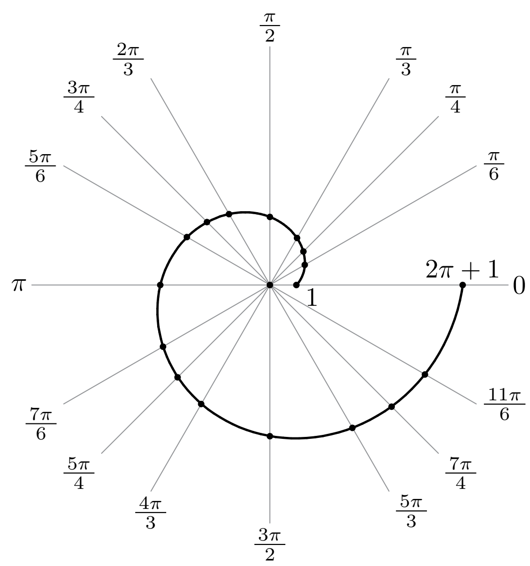
また，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，　$\sin\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ より，$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$

よって，$\boldsymbol{\left(2,\ -\frac{\pi}{3}\right)}$ または，$\boldsymbol{\left(2,\ \frac{5}{3}\pi\right)}$

246（1）　θ のいろいろな値に対する r の値を求めると

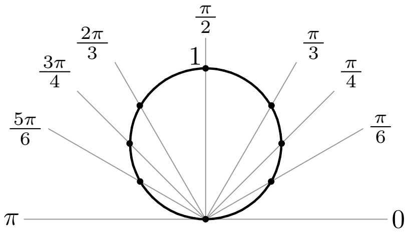
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	1	$\frac{\pi}{6}+1$	$\frac{\pi}{4}+1$	$\frac{\pi}{3}+1$	$\frac{\pi}{2}+1$	$\frac{2\pi}{3}+1$	$\frac{3\pi}{4}+1$	$\frac{5\pi}{6}+1$	$\pi+1$
	1	1.52	1.79	2.05	2.57	3.09	3.36	3.62	4.14

θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	$\frac{7\pi}{6}+1$	$\frac{5\pi}{4}+1$	$\frac{4\pi}{3}+1$	$\frac{3\pi}{2}+1$	$\frac{5\pi}{3}+1$	$\frac{7\pi}{4}+1$	$\frac{11\pi}{6}+1$	$2\pi+1$
	4.66	4.93	5.19	5.71	6.23	6.50	6.76	7.28



（2）　θ のいろいろな値に対する r の値を求めると

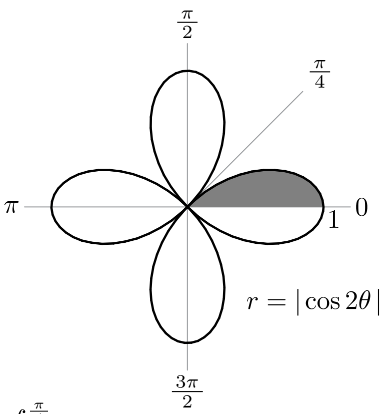
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	0.5	0.71	0.87	1	0.87	0.71	0.5	0



247　それぞれの図形の面積を S とする．

（1）
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\theta)^2\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\theta+\theta^2)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[\theta+\theta^2+\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^3}{8}\right)-0\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{24}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^3}{48}}$$

（2）　求める面積は，曲線と，$\theta = 0$，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分の面積の 8 倍である．



$$S = 8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos 2\theta|^2\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta, d\theta$$

$2\theta = t$ とおくと，$2d\theta = dt$ より，$d\theta = \dfrac{1}{2}dt$

また，θ と t の対応は

θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

よって
$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\cdot\frac{1}{2}\,dt$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

248　それぞれの曲線の長さを l とする．

（1）　$r' = -\sin\theta$ であるから
$$r^2+(r')^2 = (\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2$$
$$= \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$$
よって
$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1}\,d\theta$$
$$= \Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2}-0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

（2）　$r' = 4\sin^3\dfrac{\theta}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\cos\dfrac{\theta}{4} = \sin^3\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{4}$ であるから
$$r^2+(r')^2 = \left(\sin^4\frac{\theta}{4}\right)^2+\left(\sin^3\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}\right)^2$$
$$= \sin^8\frac{\theta}{4}+\sin^6\frac{\theta}{4}\cos^2\frac{\theta}{4}$$
$$= \sin^6\frac{\theta}{4}\left(\sin^2\frac{\theta}{4}+\cos^2\frac{\theta}{4}\right)$$
$$= \sin^6\frac{\theta}{4}$$
よって
$$l = \int_0^{4\pi} \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$
$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{\sin^6\frac{\theta}{4}}\,d\theta$$
$$= \int_0^{4\pi} \left|\sin^3\frac{\theta}{4}\right|d\theta$$

$0 \leqq \theta \leqq 4\pi$ のとき，$0 \leqq \dfrac{\theta}{4} \leqq \pi$ であるから，$\sin\dfrac{\pi}{4} \geqq 0$

したがって
$$l = \int_0^{4\pi} \sin^3\frac{\theta}{4}\,d\theta$$
$$= \int_0^{4\pi} \sin\frac{\theta}{4}\cdot\sin^2\frac{\theta}{4}\,d\theta$$
$$= \int_0^{4\pi} \sin\frac{\theta}{4}\left(1-\cos^2\frac{\theta}{4}\right)\,d\theta$$

$\cos\dfrac{\theta}{4} = t$ とおくと，$-\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{\theta}{4}\,d\theta = dt$ であるから，$\sin\dfrac{\theta}{4}\,d\theta = -4\,dt$

また，θ と t の対応は

θ	0	$\to$	4π
t	1	$\to$	-1

以上より
$$l = \int_1^{-1}(1-t^2)\cdot(-4\,dt)$$
$$= 4\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt$$
$$= 8\int_0^{1}(1-t^2)\,dt$$
$$= 8\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$= 8\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$= 8\cdot\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{16}{3}}$$

249（1）

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{0+\varepsilon}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \\
&= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{8} x^{-\frac{1}{3}}\, dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_{\varepsilon}^{8} \\
&= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to +0} (\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{\varepsilon^2}) \\
&= \frac{3}{2} (\sqrt[3]{(2^2)^3} - 0) \\
&= \frac{3}{2} \cdot 2^2 = \mathbf{6}
\end{aligned}
$$

〔別解〕

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_0^8 \\
&= \frac{3}{2} (\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{0^2}) \\
&= \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{(2^2)^3} \\
&= \frac{3}{2} \cdot 4 = \mathbf{6}
\end{aligned}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{b \to \infty} \int_1^b x^{-4}\, dx \\
&= \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_1^b \\
&= -\frac{1}{3} \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{1^3} \right) \\
&= -\frac{1}{3}(0 - 1) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

〔別解〕

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_1^{\infty} \\
&= 0 - \left(-\frac{1}{3} \right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

（3）

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{dx}{3 + x^2} \\
&= \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_0^b \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{b \to \infty} \left(\tan^{-1} \frac{b}{\sqrt{3}} - \tan^{-1} 0 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}
\end{aligned}
$$

〔別解〕

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}
\end{aligned}
$$

250

（1）　$0 \leqq t \leqq 2$ において，$e^{-t} > 0$ で，v の符号は一定なので，移動距離を s とすれば

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^2 |\, v(t) \,|\, dt \\
&= \int_0^2 e^{-t}\, dt \\
&= \left[-e^{-t} \right]_0^2 \\
&= -(e^{-2} - e^0) = \mathbf{1} - \boldsymbol{\frac{1}{e^2}}
\end{aligned}
$$

（2）　$1 \leqq t \leqq 2$ において，$\sin \pi t < 0$ で，v の符号は一定なので，移動距離を s とすれば

$$
\begin{aligned}
s &= \int_1^2 |\, v(t) \,|\, dt \\
&= \int_1^2 |\, 2 \sin \pi t \,|\, dt \\
&= -2 \int_1^2 \sin \pi t\, dt \\
&= -2 \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_1^2 \\
&= \frac{2}{\pi} (\cos 2\pi - \cos \pi) \\
&= \frac{2}{\pi} \{ 1 - (-1) \} = \boldsymbol{\frac{4}{\pi}}
\end{aligned}
$$

STEP UP

251　時刻 t における点 P の速度を $v(t)$ とする．このとき，題意より，$v(0) = 0$

（1）

$$
\begin{aligned}
v(t) &= v(0) + \int_0^t (1 - \sqrt{t})\, dt \\
&= 0 + \left[t - \frac{2}{3} t \sqrt{t} \right]_0^t \\
&= t - \frac{2}{3} t \sqrt{t} \\
&= -\frac{2}{3} t \left(\sqrt{t} - \frac{3}{2} \right)
\end{aligned}
$$

これより，$v(t) = 0$ となるのは，$t = 0$ または，$\sqrt{t} = \dfrac{3}{2}$ のときである．

$\sqrt{t} = \dfrac{3}{2}$ より，$t = \dfrac{9}{4}$ であるから

$0 \leqq t \leqq \dfrac{9}{4}$ のとき，$v(t) \geqq 0$

$\dfrac{9}{4} < t \leqq 9$ のとき，$v(t) < 0$

以上より，動いた道のりは

$$
\begin{aligned}
\int_0^9 |\, v(t) \,|\, dt &= \int_0^{\frac{9}{4}} \left(t - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) dt - \int_{\frac{9}{4}}^9 \left(t - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) dt \\
&= \left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^{\frac{9}{4}} \\
&\qquad - \left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_{\frac{9}{4}}^9 \\
&= \left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{4}{15} t^2 \sqrt{t} \right]_0^{\frac{9}{4}} - \left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{4}{15} t^2 \sqrt{t} \right]_{\frac{9}{4}}^9 \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{81}{16} - \frac{4}{15} \cdot \frac{81}{16} \sqrt{\frac{9}{4}} \right) - 0 \\
&\qquad - \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot 81 - \frac{4}{15} \cdot 81 \sqrt{9} \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{81}{16} - \frac{4}{15} \cdot \frac{81}{16} \sqrt{\frac{9}{4}} \right) \right\} \\
&= \frac{81}{32} - \frac{27}{20} \cdot \frac{3}{2} \\
&\qquad - \left\{ \left(\frac{81}{2} - \frac{12}{5} \cdot 3 \right) - \left(\frac{81}{32} - \frac{27}{20} \cdot \frac{3}{2} \right) \right\} \\
&= 2 \left(\frac{81}{32} - \frac{81}{40} \right) - \left(\frac{81}{2} - \frac{324}{5} \right) \\
&= \frac{81}{16} - \frac{81}{20} - \frac{81}{2} + \frac{324}{5} \\
&= \frac{405 - 324 - 3240 + 5184}{80} \\
&= \frac{2025}{80} = \boldsymbol{\frac{405}{16}}
\end{aligned}
$$

（2） $v(t) = v(0) + \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt$

$$= 0 + \left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^t$$

$$= \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

これより，$0 \leqq t \leqq 3$，すなわち，$0 \leqq \frac{\pi}{2}t \leqq \frac{3}{2}\pi$ において，$v(t) = 0$ となるのは，$\frac{\pi}{2}t = 0$ または，$\frac{\pi}{2}t = \pi$ のときである．

$\frac{\pi}{2}t = \pi$ より，$t = 2$ であるから

$0 \leqq t \leqq 2$ のとき，$v(t) \geqq 0$

$2 < t \leqq 3$ のとき，$v(t) < 0$

以上より，動いた道のりは

$$\int_0^9 |v(t)|\,dt = \int_0^2 \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt - \int_2^3 \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_0^2 - \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_2^3$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}(\cos\pi - \cos 0) + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\frac{3}{2}\pi - \cos\pi\right)$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}\{(-1-1) - (0-(-1))\}$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}\cdot(-3) = \boldsymbol{\frac{12}{\pi^2}}$$

252　t 時間後の細菌の数を，$N = N(t)$ とすると，増加率は $\frac{dN}{dt}$ であり，これが現在の数に比例するので，比例定数を $k\ (>0)$ とすれば

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

両辺を N で割ると

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = k$$

両辺を t で積分すると

$$\int \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}\,dt = \int k\,dt$$

$$\int \frac{1}{N}\,dN = kt + C$$

これより，$\log|N| = kt + C$　（C は積分定数）

$N > 0$ であるから，$\log N = kt + C$ となるので

$$N(t) = e^{kt+C} = e^C \cdot e^{kt}$$

ここで，e^C は定数であるから，改めて $e^C = C'$ とおけば，$N(t) = C'e^{kt}$

題意より，$N(3) = 10000$，$N(5) = 40000$ なので

$$\begin{cases} C'e^{3k} = 10000 & \cdots① \\ C'e^{5k} = 40000 & \cdots② \end{cases}$$

①，② の辺々を割ると

$$\frac{C'e^{5k}}{C'e^{3k}} = \frac{40000}{10000}$$

$$e^{2k} = 4$$

$$(e^k)^2 = 4$$

$e^k > 0$ なので，$e^k = 2$

これを，① に代入して，$C'2^3 = 10000$

これより，$C' = \frac{10000}{8} = 1250$

以上より，$N(t) = 1250e^{2t} \cdots ③$ となる．

最初の細菌の数は，③ において，$t = 0$ として

$$N(0) = 1250 \cdot e^0 = 1250$$

よって，**1250 個**

253　時刻 t における水の深さの変化率（減少率）は $\frac{dx}{dt}$ であり，このときの流れ出る水の量は，$-\pi r^2 \cdot \frac{dx}{dt}$ となる．

よって，$-\pi r^2 \cdot \frac{dx}{dt} = k\sqrt{x}$

両辺を $\sqrt{x}$ で割ると

$$-\pi r^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{dx}{dt} = k$$

両辺を t で積分すると

$$-\pi r^2 \int \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{dx}{dt}\,dt = \int k\,dt$$

$$-\pi r^2 \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = kt + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$-\pi r^2 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} = kt + C$$

$$-2\pi r^2\sqrt{x} = kt + C$$

ここで，題意より，$t = 0$ のとき，$x = h$ であるから

$$-2\pi r^2\sqrt{h} = C$$

よって，$-2\pi r^2\sqrt{x} = kt - 2\pi r^2\sqrt{h}$

これより，$\sqrt{x} = -\frac{k}{2\pi r^2}t + \sqrt{h}$

よって，$\boldsymbol{x = \left(-\frac{k}{2\pi r^2}t + \sqrt{h}\right)^2}$

254　　左辺 $= \int_0^\infty x^{n-1}\cdot xe^{-x^2}\,dx$

$$= \int_0^\infty x^{n-1}\cdot(xe^{-x^2})\,dx$$

$\int xe^{-x^2}\,dx$ は，$-x^2 = t$ とおくことによって，$-2x\,dx = dt$ であるから

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{1}{2}e^t = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

よって

$$\text{左辺} = \left[-\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^{n-1})'e^{-x^2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty (n-1)x^{n-2}e^{-x^2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2}\right]_0^\infty + \frac{n-1}{2}\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x^2}\,dx$$

ここで，

$$\left[-\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2}\right]_0^b$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{b^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{(x^{n-1})'}{(e^{b^2})'}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{2xe^{x^2}}$$

$$= -\frac{n-1}{4}\lim_{b\to\infty}\frac{x^{n-3}}{e^{x^2}}$$

$$= \cdots\cdots = 0$$

以上より，$\int_0^\infty x^n e^{-x^2}\,dx = \frac{n-1}{2}\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x^2}\,dx$

255（1）　$\triangle$OAB において，OA $= r_1$，OB $= r_2$，$\angle$AOB $= \theta_2 - \theta_1$ であるから

$$\triangle\text{OAB} = \frac{1}{2}\text{OA}\cdot\text{OB}\cdot\sin\angle\text{AOB}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_2 - \theta_1)}$$

（2）　直交座標と極座標の関係より

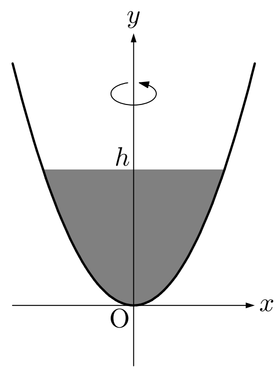
$x_1 = r_1 \cos\theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin\theta_1$

$x_2 = r_2 \cos\theta_2, \quad y_2 = r_2 \sin\theta_2$

したがって

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{OAB} &= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\
&= \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\theta_2 \cos\theta_1 - \cos\theta_2 \sin\theta_1) \\
&= \frac{1}{2} (r_1 r_2 \sin\theta_2 \cos\theta_1 - r_1 r_2 \cos\theta_2 \sin\theta_1) \\
&= \frac{1}{2} (r_1 \cos\theta_1 \cdot r_2 \sin\theta_2 - r_1 \sin\theta_1 \cdot r_2 \cos\theta_2) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)}
\end{aligned}$$

256（1）



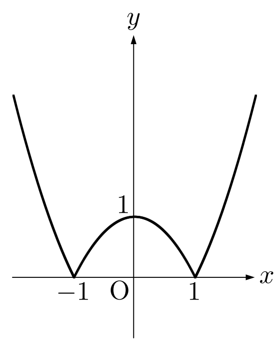
求める水量は

$$\begin{aligned}
\pi \int_0^h x^2\,dy &= \pi \int_0^h y\,dy \\
&= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^h \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2} \pi h^2} \quad (\mathrm{cm}^3)
\end{aligned}$$

（2）$x^2 - 1 \geqq 0$，すなわち，$x \leqq -1$，$1 \leqq x$ のとき，$y = x^2 - 1$

$x^2 - 1 < 0$，すなわち，$-1 < x < 1$ のとき，$y = -(x^2 - 1)$

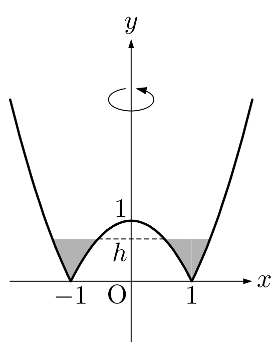
よって，$y = |x^2 - 1|$ のグラフは，次のようになる．



$y = x^2 - 1$ のとき，$x^2 = y + 1$

$y = -x^2 + 1$ のとき，$x^2 = -y + 1$

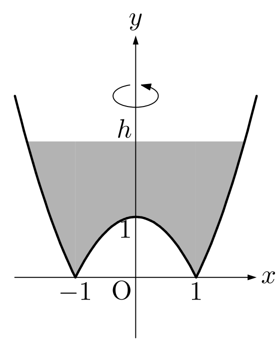
ｉ）$0 \leqq h \leqq 1$ のとき



求める水量は

$$\begin{aligned}
&\pi \int_0^h (y+1)\,dy - \pi \int_0^h (-y+1)\,dy \\
&= \pi \int_0^h (y+1)\,dy + \pi \int_0^h (y-1)\,dy \\
&= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 + y \right]_0^h + \pi \left[\frac{1}{2} y^2 - y \right]_0^h \\
&= \pi \left\{ \left(\frac{1}{2} h^2 + h - 0 \right) + \left(\frac{1}{2} h^2 - h - 0 \right) \right\} \\
&= \boldsymbol{\pi h^2} \quad (\mathrm{cm}^3)
\end{aligned}$$

ii）$h > 1$ のとき



求める水量は

$$\begin{aligned}
&\pi \int_0^h (y+1)\,dy - \pi \int_0^1 (-y+1)\,dy \\
&= \pi \int_0^h (y+1)\,dy + \pi \int_0^h (y-1)\,dy \\
&= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 + y \right]_0^h + \pi \left[\frac{1}{2} y^2 - y \right]_0^1 \\
&= \pi \left\{ \left(\frac{1}{2} h^2 + h - 0 \right) + \left(\frac{1}{2} - 1 - 0 \right) \right\} \\
&= \pi \left(\frac{1}{2} h^2 + h - \frac{1}{2} \right) \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}(h^2 + 2h - 1)} \quad (\mathrm{cm}^3)
\end{aligned}$$

（3）　t 秒後の，注がれた水の量は，Vt であり，水の上昇速度は，$\dfrac{dh}{dt}$ で表される．

ｉ）$0 \leqq h \leqq 1$ のとき

$Vt = \pi h^2$ であるから，この両辺を t で微分すると

$V = \pi \cdot 2h \cdot \dfrac{dh}{dt}$

これより，$\boldsymbol{\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{V}{2\pi h}}$

ii）$h > 1$ のとき

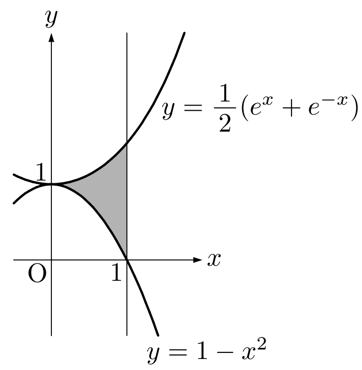
$Vt = \dfrac{\pi}{2}(h^2 + 2h - 1)$ であるから，この両辺を t で微分すると

$V = \dfrac{\pi}{2}(2h + 2) \cdot \dfrac{dh}{dt}$

$V = \pi(h + 1) \cdot \dfrac{dh}{dt}$

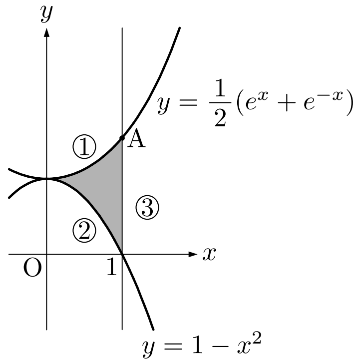
これより，$\boldsymbol{\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{V}{\pi(h+1)}}$

257（1）



$$S = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - (1 - x^2) \right\} dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$
$$= \left\{ \frac{1}{2}(e - e^{-1}) - 1 + \frac{1}{3} \right\} - \left\{ \frac{1}{2}(e^0 - e^0) - 0 \right\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) - \frac{2}{3}}$$

（2）



i）　$0 \leqq x \leqq 1$ における，$y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の曲線の長さ

$y' = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ より

$$1 + (y')^2 = 1 + \left\{ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right\}^2$$
$$= 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$
$$= \frac{1}{4}(4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$$
$$= \left\{ \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right\}^2$$

したがって，① の部分の曲線の長さを l_1 とすると

$$l_1 = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{\left\{ \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right\}^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x} \right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\{(e - e^{-1}) - (e^0 - e^0)\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

ii）　$0 \leqq x \leqq 1$ における，$y = 1 - x^2$ の曲線の長さ

$y' = -2x$ より

$$1 + (y')^2 = 1 + (-2x)^2$$
$$= 1 + 4x^2$$

したがって，② の部分の曲線の長さを l_2 とすると

$$l_2 = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)}\, dx$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\log\left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right| \right]_0^1$$
$$= 1\sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{4}\log\left| 1 + \sqrt{\frac{5}{4}} \right| - \frac{1}{4}\log\left| \sqrt{\frac{1}{4}} \right|$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\left\{ \log\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - \log\frac{1}{2} \right\}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\left\{ \log\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - \log 2^{-1} \right\}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\left\{ \log\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + \log 2 \right\}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log\left\{ \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \times 2 \right\}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2 + \sqrt{5})$$

iii）点 A の y 座標は，$y = \dfrac{1}{2}(e^1 + e^{-1}) = \dfrac{1}{2}\left(e + \dfrac{1}{e}\right)$

よって，③ の部分の線分の長さを l_3 とすれば

$$l_3 = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$$

以上より

$$L = l_1 + l_2 + l_3$$
$$= \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) + \left\{ \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2 + \sqrt{5}) \right\} + \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$$
$$= \boldsymbol{e + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\log(2 + \sqrt{5})}$$

258　$x = \dfrac{5}{2}$ のとき，$t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2}$ より，$2t^2 - 5t + 2 = 0$

これを解くと，$(2t-1)(t-2) = 0$ より，$t = \dfrac{1}{2}$，2

$1 \leqq t \leqq 3$ であるから，$t = 2$

曲線と x 軸との交点に対応する t の値は，$y = t - \dfrac{1}{t} = 0$ として，これを解くと，$t^2 - 1 = 0$ より，$t = \pm 1$

$1 \leqq t \leqq 3$ であるから，$t = 1$

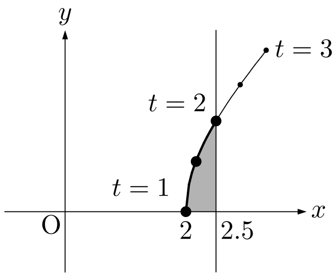
また，$1 < t < 3$ において，$\dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{1}{t^2} > 0$ で符号は一定である．

〔補足〕

※ これだけではイメージがつかみにくい（かもしれない）ので，どのようなグラフになるのかを調べてみます．

まずは，$1 \leqq t \leqq 3$ のいろいろな t の値に対応する x，y の値を実際に求めてグラフを描く方法です．

t	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
x	2	$\frac{13}{6}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{29}{10}$	$\frac{10}{3}$
	2	2.17	2.5	2.9	3.33
y	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{8}{3}$
	0	0.83	1.5	2.1	2.67



次に，媒介変数 t を消去する方法です．

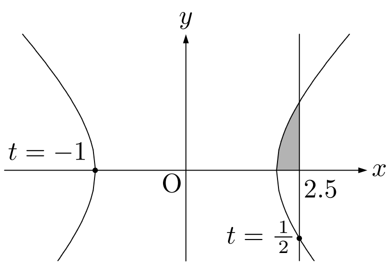
$x = t + \dfrac{1}{t}$ より，$x^2 = t^2 + 2 + \dfrac{1}{t^2}$　$\cdots$①

$y = t - \dfrac{1}{t}$ より，$y^2 = t^2 - 2 + \dfrac{1}{t^2}$　$\cdots$②

① − ② より，$x^2 - y^2 = 4$ であるから，$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

すなわち，双曲線であることがわかります．

$x = \dfrac{5}{2}$ や，$y = 0$ として t を求めたとき，条件に合わなかった t の値は，下図のような位置にあります．



〔補足終了〕

$1 \leqq t \leqq 3$ において，$y = t - \dfrac{1}{t} \geqq 0$ であるから，求める面積は

$$\int_0^{\frac{5}{2}} y\,dx = \int_1^2 \left| y\frac{dx}{dt} \right| dt$$
$$= \int_1^2 \left| \left(t - \frac{1}{t}\right)\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \right| dt$$
$$= \int_1^2 \left(t - \frac{1}{t}\right)\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt$$
$$= \int_1^2 \left(t - \frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$
$$= \int_1^2 \left(t - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - 2\log|t| - \frac{1}{2t^2}\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 4 - 2\log 2 - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2 - 2\log 2 - \frac{1}{8}$$
$$= \frac{16-1}{8} - 2\log 2 = \boldsymbol{\frac{15}{8} - 2\log 2}$$

259　※ 極限を用いた解法は省略しました。

（1）　$\log r = t$ とおくと，$\dfrac{1}{r}\,dr = dt$

また，r と t の対応は

r	$1 \to e$
t	$0 \to 1$

以上より

$$\text{与式} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$
$$= \Big[2\sqrt{t}\Big]_0^1$$
$$= 2\sqrt{1} - 0 = \mathbf{2}$$

（2）　$\log r = t$ とおくと，$\dfrac{1}{r}\,dr = dt$

また，r と t の対応は

r	$e \to \infty$
t	$1 \to \infty$

以上より

$$\text{与式} = \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$$
$$= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^\infty$$
$$= 0 - (-1) = \mathbf{1}$$

PLUS

260（1）　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を代入すると

$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 9$

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 9$

$r^2 = 9$

$r \geqq 0$ より，$\boldsymbol{r = 3}$

（2）　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を代入すると

$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 - 2\cdot r\cos\theta - 2\cdot r\sin\theta = 0$

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2r(\cos\theta + \sin\theta) = 0$

$r^2 - 2r(\cos\theta + \sin\theta) = 0$

$r\{r - 2(\cos\theta + \sin\theta)\} = 0$

これより，$r = 0$　または　$r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$

$r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$ において，$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ とすると，$r = 0$ が得られるので，$\boldsymbol{r = 2(\cos\theta + \sin\theta)}$

（3）　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を代入すると

$r\cos\theta + r\sin\theta = 2$

$r(\cos\theta + \sin\theta) = 2$

$\boldsymbol{r = \dfrac{2}{\cos\theta + \sin\theta}}$

（4）　$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を代入すると

$(r\sin\theta)^2 - 4\cdot r\cos\theta - 4 = 0$

$r^2\sin^2\theta - 4r\cos\theta - 4 = 0$

$(1 - \cos^2\theta)r^2 - 4r\cos\theta - 4 = 0$

$(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)r^2 - 4r\cos\theta - 4 = 0$

$(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)$	-4		$-4\cos\theta$
$1 + \cos\theta$	2	$\longrightarrow$	$2 - 2\cos\theta$
$1 - \cos\theta$	-2	$\longrightarrow$	$-2 - 2\cos\theta$

$\{(1 + \cos\theta)r + 2\}\{(1 - \cos\theta)r - 2\} = 0$

$r \geqq 0$ より，$\boldsymbol{r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}}$

261（1）　$\dfrac{2}{1 - 2\cos\theta} \neq 0$ より，$r \neq 0$ であるから，$r > 0$

両辺に $1 - 2\cos\theta$ をかけると

$r - 2r\cos\theta = 2$

$rcos\theta = x,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を代入すると

$\sqrt{x^2 + y^2} - 2x = 2$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 2x + 2$

ここで，$r = 2x + 2 > 0$ より，$x > -1$

$x^2 + y^2 = (2x + 2)^2$

$x^2 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4$

よって，$\boldsymbol{3x^2 - y^2 + 8x + 4 = 0}$ $(x > -1)$

（2）　$\dfrac{1}{2-\cos\theta} \fallingdotseq 0$ より，$r \fallingdotseq 0$ であるから，$r > 0$

両辺に $2 - \cos\theta$ をかけると

$2r - r\cos\theta = 1$

$rcos\theta = x$，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ を代入すると

$2\sqrt{x^2+y^2} - x = 1$

$2\sqrt{x^2+y^2} = x + 1$

ここで，$r = x + 1 > 0$ より，$x > -1$

$4(x^2+y^2) = (x+1)^2$

$4x^2 + 4y^2 = x^2 + 2x + 1$

よって，$\boldsymbol{3x^2 + 4y^2 - 2x - 1 = 0}$ $(x > -1)$

（3）　両辺に $\cos\theta$ をかけると

$r\cos\theta = 1$

$r\cos\theta = x$ を代入すると，$\boldsymbol{x = 1}$

262（1）　両辺に r をかけると

$r^2 = 2r\sin\theta$

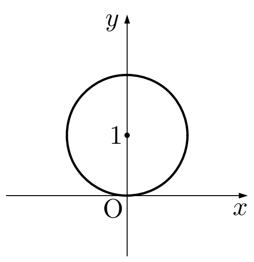
$r\sin\theta = y$，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ を代入すると

$x^2 + y^2 = 2y$

$x^2 + y^2 - 2y = 0$

$x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$



（2）　両辺に r をかけると

$r^2 = 4r\cos\theta$

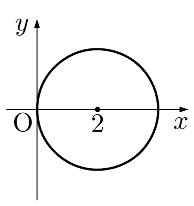
$r\cos\theta = x$，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ を代入すると

$x^2 + y^2 = 4x$

$x^2 - 4x + y^2 = 0$

$(x-2)^2 - 4 + y^2 = 0$

$(x-2)^2 + y^2 = 4$



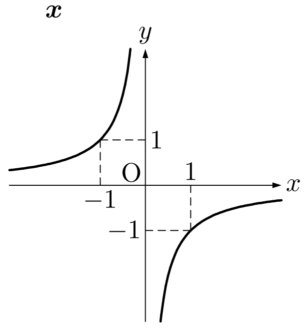
（3）　$r^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta + 2 = 0$

$2(r\cos\theta)(r\sin\theta) + 2 = 0$

$r\cos\theta = x$，$r\sin\theta = y$ を代入すると

$2xy + 2 = 0$

これより，$\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{x}}$



263　それぞれの回転面の面積を S とする．

（1）　$y' = 3x^2$ より

$$S = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx$$

$1 + 9x^4 = t$ とおくと，$36x^3\,dx = dt$ より，$x^3 = \dfrac{1}{36}\,dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 10$

よって

$$S = 2\pi\int_1^{10} \sqrt{t}\cdot\frac{1}{36}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{18}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^{10}$$

$$= \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1\sqrt{1}) = \boldsymbol{\frac{(10\sqrt{10}-1)\pi}{27}}$$

（2）　$y' = -\dfrac{r}{h}$ より

$$S = 2\pi\int_0^h \left(r - \frac{r}{h}x\right)\sqrt{1+\left(-\frac{r}{h}\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\left[rx - \frac{r}{2h}x^2\right]_0^h$$

$$= 2\pi\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\left(rh - \frac{r}{2h}\cdot h^2 - 0\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\left(rh - \frac{rh}{2}\right)$$

$$= 2\pi\cdot\frac{rh}{2}\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}$$

$$= \pi r\sqrt{h^2\left(1+\frac{r^2}{h^2}\right)}$$

$$= \boldsymbol{\pi r\sqrt{h^2+r^2}}$$

（3）　$y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ より

$$S = 2\pi\int_{-1}^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \pi\int_{-1}^1 (e^x+e^{-x})\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$

$$= \pi\int_{-1}^1 (e^x+e^{-x})\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$

$$= \pi\int_{-1}^1 (e^x+e^{-x})\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \pi\int_{-1}^1 (e^x+e^{-x})\left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right|dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 (e^x+e^{-x})^2\,dx$$

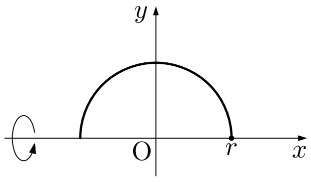
$$= \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^1 (e^{2x}+2+e^{-2x})\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$$

$$= \pi\left\{\left(\frac{1}{2}e^2 + 2 - \frac{1}{2}e^{-2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0\right)\right\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}(e^2 + 4 - e^{-2})}$$

264　半径 r の球を，図のような半円 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ を x 軸のまわりに回転してできる立体と考える．



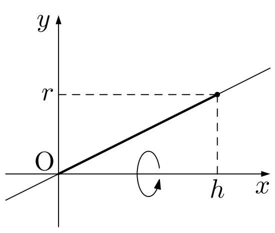
この回転体の回転面の面積が球の表面積となるので，これを S とする．

$$y' = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx \\
&= 2\pi\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx \\
&= 2\pi\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx \\
&= 2\pi\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx \\
&= 2\pi\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2}\, dx = 2\pi\int_{-r}^{r} |\,r\,|\, dx \\
&= 4\pi\int_{0}^{r} r\, dx \\
&= 4\pi\Big[rx\Big]_0^r \\
&= 4\pi \cdot r^2 = 4\pi r^2
\end{aligned}$$

265　図のように，直線 $y = \dfrac{r}{h}x$　$(0 \leqq x \leqq h)$ を x 軸のまわりに回転させれば，高さ h，底面の半径 r の円錐ができる．

ただし，$l^2 = r^2 + h^2$



円すいの体積を V とすれば

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^h y^2\, dx \\
&= \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\, dx \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h \\
&= \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3}h^3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^2 h}
\end{aligned}$$

$y' = \dfrac{r}{h}$ であるから，円すいの側面積を S' とすれば

$$\begin{aligned}
S' &= 2\pi\int_0^h \frac{r}{h}x\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}\, dx \\
&= 2\pi \cdot \frac{r}{h}\sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}}\int_0^h x\, dx \\
&= \frac{2\pi r}{h}\sqrt{\frac{l^2}{h^2}}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^h \\
&= \frac{2\pi r}{h} \cdot \frac{l}{h} \cdot \frac{1}{2}h^2 \\
&= \pi r l
\end{aligned}$$

底面積は，πr^2 であるから

$$S = \pi r l + \pi r^2 = \boldsymbol{\pi r(l + r)}$$

266　$x = 0,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4},\ 1$ に対する $\dfrac{1}{1+x^2}$ の値を，y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 とし，それぞれの値を小数第 4 位まで求めると

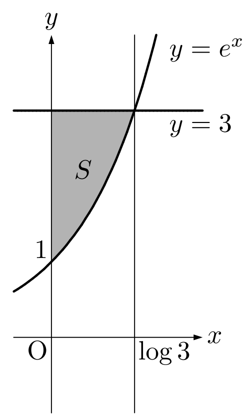
$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1}{1+0} = 1 \\
y_1 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\frac{17}{16}} = \frac{16}{17} = 0.9412 \\
y_2 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} = 0.8000 \\
y_3 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\frac{25}{16}} = \frac{16}{25} = 0.6400 \\
y_4 &= \frac{1}{1 + 1^2} \\
&= \frac{1}{2} = 0.5000
\end{aligned}$$

台形公式より，求める近似値は

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\fallingdotseq \frac{\frac{1}{4}}{2}\{1 + 0.5 + 2(0.9412 + 0.8 + 0.64)\} \\
&= \frac{1}{8}(1.5 + 2 \times 2.3812) \\
&= \frac{1}{8} \times 6.2624 = 0.7828
\end{aligned}$$

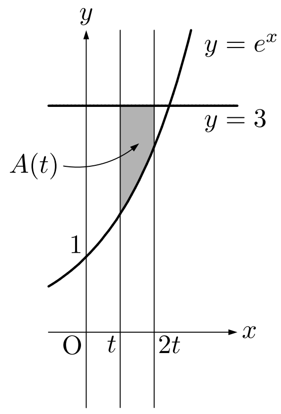
よって，**0.783**

267（1）　曲線と直線の交点の x 座標は，$e^x = 3$ より，$x = \log 3$



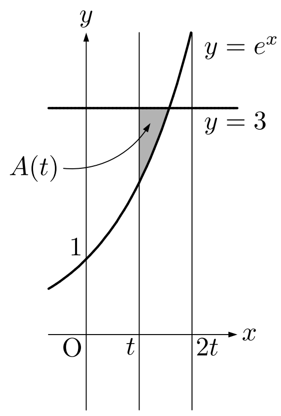
$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\log 3} (3 - e^x)\, dx \\
&= \Big[3x - e^x\Big]_0^{\log 3} \\
&= 3\log 3 - e^{\log 3} - (0 - e^0) \\
&= 3\log 3 - 3 + 1 = \boldsymbol{3\log 3 - 2}
\end{aligned}$$

（2）　i）　$2t \leqq \log 3$，すなわち，$0 < t \leqq \dfrac{\log 3}{2}$ のとき



$$A(t)=\int_t^{2t}(3-e^x)\,dx$$
$$=\Big[3x-e^x\Big]_t^{2t}$$
$$=3\cdot 2t-e^{2t}-(3t-e^t)$$
$$=3t-e^{2t}+e^t$$

ii）　$2t>\log 3$，すなわち，$\dfrac{\log 3}{2}<t<\log 3$ のとき



$$A(t)=\int_t^{\log 3}(3-e^x)\,dx$$
$$=\Big[3x-e^x\Big]_t^{\log 3}$$
$$=3\log 3-e^{\log 3}-(3t-e^t)$$
$$=3\log 3-3-3t+e^t$$

以上より

$$\boldsymbol{A(t)=}\begin{cases}\boldsymbol{3t-e^{2t}+e^t} & \left(0<t\leqq\dfrac{\log 3}{2}\right)\\[2ex] \boldsymbol{3\log 3-3-3t+e^t} & \left(\dfrac{\log 3}{2}<t<\log 3\right)\end{cases}$$

（3）　i）　$0<t\leqq\dfrac{\log 3}{2}$ のとき

$$A'(t)=3-2e^{2t}+e^t$$
$$=-\{2(e^t)^2-e^t-3\}$$
$$=-(2e^t-3)(e^t+1)$$

$0<t\leqq\dfrac{\log 3}{2}$ において，$A'(t)=0$ となるのは，$e^t=\dfrac{3}{2}$ より，$t=\log\dfrac{3}{2}$

また，このとき

$$A\left(\log\frac{3}{2}\right)=3\cdot\log\frac{3}{2}-e^{2\cdot\log\frac{3}{2}}+e^{\log\frac{3}{2}}$$
$$=3\log\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$
$$=3\log\frac{3}{2}-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}$$
$$=3\log\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$$

ii）　$\dfrac{\log 3}{2}<t<\log 3$ のとき

$$A'(t)=-3+e^t$$

ここで，$\dfrac{\log 3}{2}<t<\log 3$ のとき，$3^{\frac{1}{2}}<e^t<3$ であるから

$$A'(t)=-3+e^t<0$$

以上より

t	0	$\cdots$	$\log\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{\log 3}{2}$	$\cdots$	$\log 3$
$A'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
$A(t)$		↗		↘		↘	

$\uparrow$
$3\log\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4}$

したがって，$A(t)$ の最大値は，$\boldsymbol{3\log\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4}}$ $\left(t=\log\dfrac{3}{2}\right)$

268（1）　$\dfrac{dx}{dt}=2\sin t\cos t$

$0\leqq t\leqq\pi$ において，$\dfrac{dx}{dt}=0$ となるのは

$\sin t=0$ より，$t=0$，π のとき

$\cos t=0$ より，$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{dy}{dt}=\cos t(1+\cos t)+\sin t\cdot(-\sin t)$$
$$=\cos t+\cos^2 t-\sin^2 t$$
$$=\cos t+\cos^2 t-(1-\cos^2 t)$$
$$=2\cos^2 t+\cos t-1$$
$$=(2\cos t-1)(\cos t+1)$$

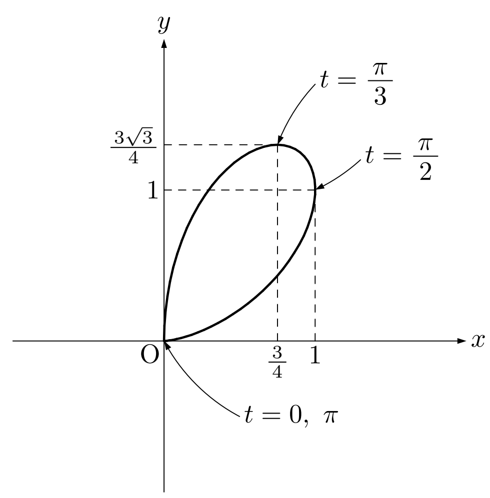
$0\leqq t\leqq\pi$ において，$\dfrac{dy}{dt}=0$ となるのは

$\cos t=\dfrac{1}{2}$，-1 より，$t=\dfrac{\pi}{3}$，π のとき

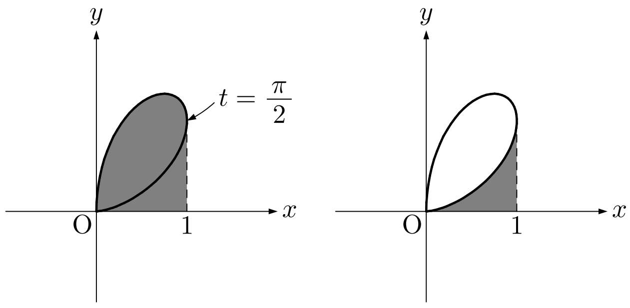
これらについての増減表を書くと

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0
x	0	$\rightarrow$	$\frac{3}{4}$	$\rightarrow$	1	$\leftarrow$	0
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	0	$\uparrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\downarrow$	1	$\downarrow$	0
$\frac{dy}{dx}$	(∞)	$+$	0	$-$	$(-\infty)$	$+$	0
(x,y)		↗		↘		↙	

したがって，曲線の概形は次のようになる．



（2）　求める面積は，左図の面積から右図の面積を引けば得られる．



$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\dfrac{dx}{dt} > 0$，$\dfrac{\pi}{2} < t < \pi$ で，$\dfrac{dx}{dt} < 0$ であるから，

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| y\frac{dx}{dt} \right| dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| y\frac{dx}{dt} \right| dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\left(-\frac{dx}{dt}\right)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \{\sin t(1+\cos t)\}\cdot 2\sin t\cos t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin^2 t\cos t(1+\cos t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{\pi} (\sin^2 t\cos t + \sin^2 t\cos^2 t)\,dt$$

$$= 2\left(\int_0^{\pi} \sin^2 t\cos t\,dt + \int_0^{\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt\right)$$

※ 左の積分

$$\int_0^{\pi} \sin^2 t\cos t\,dt = \int_0^{\pi} \sin^2 t(\sin t)'\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\pi} = 0$$

※ 右の積分

$$\int_0^{\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} (1-\cos^2 2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1+\cos 4t}{2}\right)\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} (1-\cos 4t)\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[t - \frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}$$

よって，$S = 2\left(0 + \dfrac{\pi}{8}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

269（1）　$\dfrac{dx}{dt} = 2t$，　$\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 1$

よって，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2-1}{2t}$，　$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2t}{3t^2-1}$

x 軸に平行な接線

$\dfrac{dy}{dx} = 0$ より，$3t^2 - 1 = 0$

これより，$t^2 = \dfrac{1}{3}$，すなわち，$t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

このとき

$$x = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = -\frac{2}{3}$$

$$y = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{（複号同順）}$$

$$= \pm\frac{1}{3\sqrt{3}} \mp \frac{1}{\sqrt{3}} = \mp\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

よって，接点の座標は，$\boldsymbol{\left(-\dfrac{2}{3},\ \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)}$

y 軸に平行な接線

$\dfrac{dx}{dy} = 0$ より，$2t = 0$，すなわち，$t = 0$

このとき

$x = 0^2 - 1 = -1$

$y = 0^3 - 0 = 0$

よって，接点の座標は，$\boldsymbol{(-1,\ 0)}$

（2）　交差する点に対応する 2 つの t の値を，t_1，t_2　$(t_1 \neq t_2)$ とすると

$$\begin{cases} {t_1}^2 - 1 = {t_2}^2 - 1 & \cdots ① \\ {t_1}^3 - t_1 = {t_2}^3 - t_2 & \cdots ② \end{cases}$$

② より，$t_1({t_1}^2-1) = t_2({t_2}^2-1)$

これに ① を代入して

$t_1({t_1}^2-1) = t_2({t_1}^2-1)$

$(t_1-t_2)({t_1}^2-1) = 0$

$t_1 \neq t_2$ より，${t_1}^2 - 1 = 0$ であるから，${t_1}^2 = 1$

これと ① より，${t_2}^2 = 1$

すなわち，${t_1}^2 = {t_2}^2 = 1$ となるので，$t = -1,\ 1$ に対応する点で曲線 C は交差する．

このとき

$x = t^2 - 1 = 0$

$y = t(t^2-1) = 0$

よって，求める点の座標は，$\boldsymbol{(0,\ 0)}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2-1}{2t}$ より，$t = -1$ のときの接線の傾きは

$\dfrac{3\cdot 1 - 1}{2\cdot(-1)} = -1$

また，$t = 1$ のときの接線の傾きは

$\dfrac{3\cdot 1 - 1}{2\cdot 1)} = 1$

よって，2 本の接線の傾きは，$\boldsymbol{-1}$，$\boldsymbol{1}$

（3）　$\dfrac{dx}{dt} = 0$ となるのは，$2t = 0$ より，$t = 0$

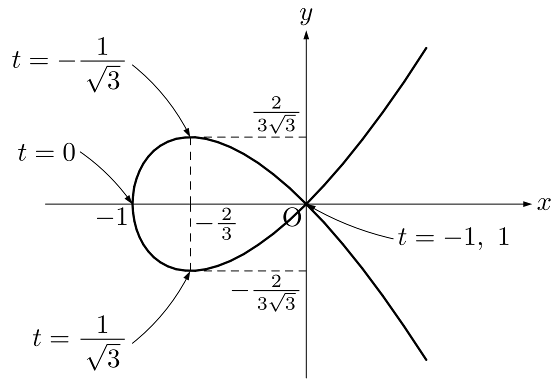
$\dfrac{dy}{dt} = 0$ となるのは，$3t^2 - 1 = 0$ より，$t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

t	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$\leftarrow$	$-\frac{2}{3}$	$\leftarrow$	-1	$\rightarrow$	$-\frac{2}{3}$	$\rightarrow$
$\frac{dy}{dt}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\uparrow$
$\frac{dy}{dx}$	$-$	0	$+$	$(-\infty)$	$-$	0	
(x,y)	$\nwarrow$		$\swarrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$t \to \infty$ のとき，$x \to \infty$，　$y \to \infty$

$t \to -\infty$ のとき，$x \to \infty$，　$y \to -\infty$

以上より，曲線 C の概形は次のようになる．



（4）　$x=f(t)=t^2-1,\quad y=g(t)=t^3-t$ とおくと

$f(-t)=(-t)^2-1=t^2-1=f(t)$

$g(-t)=(-t)^3-(-t)=-t^3+t=-(t^3-t)=-g(t)$

これより，曲線 C は，x 軸に関して対称である．

$0<t<1$ において，$y=t^3-t<0,\ \dfrac{dx}{dt}>0$ であるから，求める面積は

$$\begin{aligned}S&=2\int_0^1\left|y\frac{dx}{dt}\right|dt\\&=2\int_0^1\left|(t^3-t)\cdot 2t\right|dt\\&=2\int_0^1 2t(t-t^3)\,dt\\&=4\int_0^1(t^2-t^4)\,dt\\&=4\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right]_0^1\\&=4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\&=4\cdot\frac{2}{15}=\boldsymbol{\frac{8}{15}}\end{aligned}$$

270（1）　$x=e^{-\frac{\pi}{6}}\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}$

$y=e^{-\frac{\pi}{6}}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}$

よって，$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}},\ \dfrac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}}\right)$

（2）
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-e^{-t}\cos t+e^{-t}\cdot(-\sin t)\\&=-e^{-t}(\cos t+\sin t)\\\frac{dy}{dt}&=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cdot\cos t\\&=e^{-t}(\cos t-\sin t)\end{aligned}$$

これらに，$t=\dfrac{\pi}{3}$ を代入して

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\frac{\pi}{3}}&=-e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=-e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,e^{-\frac{\pi}{3}}\\\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=\frac{\pi}{3}}&=e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=e^{-\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\,e^{-\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

よって，求める速度ベクトルは

$$\boldsymbol{\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,e^{-\frac{\pi}{3}},\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\,e^{-\frac{\pi}{3}}\right)}$$

（3）
$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\\&=\{-e^{-t}(\cos t+\sin t)\}^2+\{e^{-t}(\cos t-\sin t)\}^2\\&=e^{-2t}(\cos t+\sin t)^2+e^{-2t}(\cos t-\sin t)^2\\&=e^{-2t}(1+2\cos t\sin t)+e^{-2t}(1-2\cos t\sin t)\\&=2e^{-2t}\end{aligned}$$

よって，$0\leqq t\leqq 4\pi$ の間に点 P が動く長さは

$$\begin{aligned}\int_0^{4\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt&=\int_0^{4\pi}\sqrt{2e^{-2t}}\,dt\\&=\sqrt{2}\int_0^{4\pi}e^{-t}\,dt\\&=\sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^{4\pi}\\&=-\sqrt{2}(e^{-4\pi}-e^0)\\&=\boldsymbol{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{e^{4\pi}}\right)}\end{aligned}$$

※ 問題文に「距離」と書いてあるが気になりますが，上の解答例では曲線の長さを求めてあります．文字通り「距離」ならば，以下のようになります．

$t=0$ のとき，$x=1,\quad y=0$

$t=4\pi$ のとき，$x=e^{-4\pi},\quad y=0$

よって，2 点 $(1,\ 0),\ (e^{-4\pi},\ 0)$ の距離は，$1-e^{-4\pi}=1-\dfrac{1}{e^{4\pi}}$