2章　微分の応用

練習問題 1-A

1. （1） $y = f(x)$ とする．

$f'(x) = 3x^2 + 1$

よって

$f(1) = 2$

$f'(1) = 4$

したがって，$x = 1$ における接線の方程式は

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y - 2 = 4(x - 1)$$

$$\boldsymbol{y = 4x - 2}$$

（2）　$x = 1$ における法線の方程式は

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + 2$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}}$$

2. （1）　$y' = 6x^5 - 12x^3$

$= 6x^3(x^2 - 2)$

$= 6x^3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

$y' = 0$ とすると，$x = 0,\ \pm\sqrt{2}$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$ のときの y の値は

$y = (\pm\sqrt{2})^6 - 3\cdot(\pm\sqrt{2})^4 + 2$

$= 8 - 3\cdot 4 + 2$

$= 8 - 12 + 2 = -2$

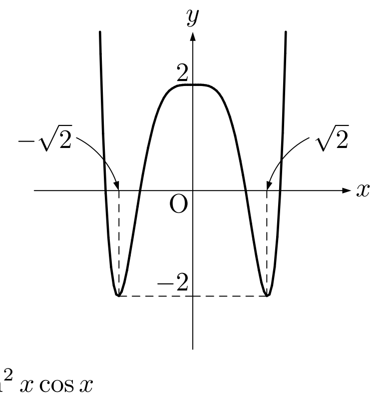
y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗

よって

極大値　2　$(x = 0)$

極小値　-2　$(x = \pm\sqrt{2})$



（2）　$y' = 3\sin^2 x\cos x$

$y' = 0$ とすると，$\sin x = 0,\ \cos x = 0$ より，$x = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi$

$x = 0,\ \pi,\ 2\pi$ のとき，$y = 0$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y = 1^3 = 1$

$x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき，$y = (-1)^3 = -1$

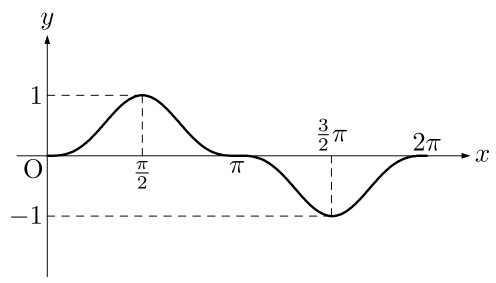
y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
y	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

よって

極大値　1　$\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$

極小値　-1　$\left(x = \dfrac{3}{2}\pi\right)$



3. （1）　$y' = 15x^4 - 15x^2$

$= 15x^2(x^2 - 1)$

$= 15x^2(x + 1)(x - 1)$

$y' = 0$ とすると，$x = 0,\ \pm 1$

$x = 0$ のとき，$y = 1$

$x = -1$ のときの y の値は

$y = 3\cdot(-1)^5 - 5\cdot(-1)^3 + 1$

$= -3 + 5 + 1 = 3$

$x = 1$ のときの y の値は

$y = 3\cdot 1^5 - 5\cdot 1^3 + 1$

$= 3 - 5 + 1 = -1$

$x = 2$ のときの y の値は

$y = 3\cdot 2^5 - 5\cdot 2^3 + 1$

$= 96 - 40 + 1 = 57$

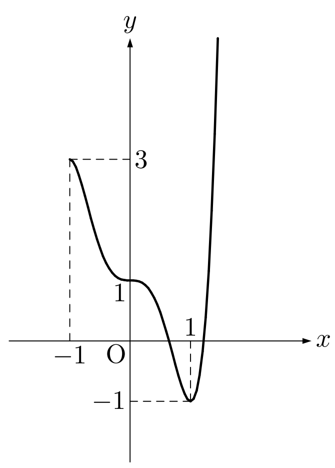
y の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
y	3	↘	1	↘	-1	↗	57

よって

最大値　57　$(x = 2)$

最小値　-1　$(x = 1)$



（2） $y' = 2x - 8 \cdot \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{2x^2 - 8}{x}$

$= \dfrac{2(x^2 - 4)}{x}$

$= \dfrac{2(x + 2)(x - 2)}{x}$

$y' = 0$ とすると，$x = \pm 2$

$x = 1$ のときの y の値は

$y = 1^2 - 8 \log 1$

$= 1 - 0 = 1$

$x = 2$ のときの y の値は

$y = 2^2 - 8 \log 2$

$= 4 - 8 \log 2$

$x = e$ のときの y の値は

$y = e^2 - 8 \log e$

$= e^2 - 8$

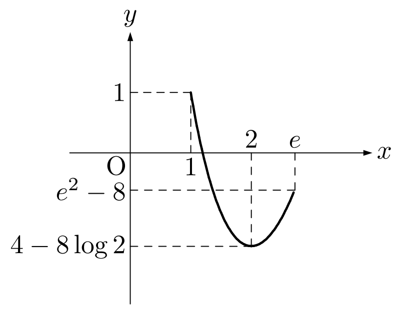
y の増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	e
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	$4 - 8 \log 2$	↗	$e^2 - 8$

よって

最大値　1　$(x = 1)$

最小値　$4 - 8 \log 2$　$(x = 2)$



（3） $y' = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$

$y' = 0$ とすると，$x = 0$

$x = 0$ のとき，$y = \dfrac{1}{0 - 1} = -1$

また

$\displaystyle\lim_{x \to -1+0} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$

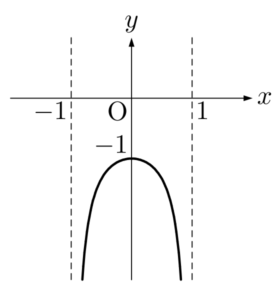
y の増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	-1	↘	

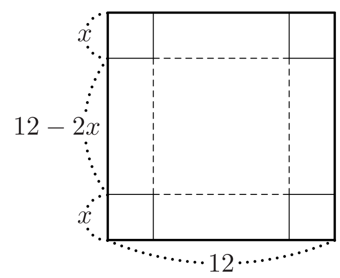
よって

最大値　-1　$(x = 0)$

最小値　なし



4. （1）



底面になる部分の正方形の 1 辺の長さは，$12 - 2x$ (cm)，また，容器の高さは x (cm) であるから

$V = (12 - 2x)^2 \cdot x$

$= x\{2(6 - x)\}^2$

$= 4x(6 - x)^2$

また，$x > 0$，$12 - 2x > 0$ より，$0 < x < 6$

よって，$\boldsymbol{V = 4x(6 - x)^2 \quad (0 < x < 6)}$

（2） $V' = 4(6 - x)^2 + 4x \cdot 2(6 - x) \cdot (-1)$

$= 4(6 - x)^2 - 8x(6 - x)$

$= 4(6 - x)\{(6 - x) - 2x\}$

$= 4(6 - x)(6 - 3x)$

$= 12(x - 2)(x - 6)$

$V' = 0$ とすると，$0 < x < 6$ において，$x = 2$

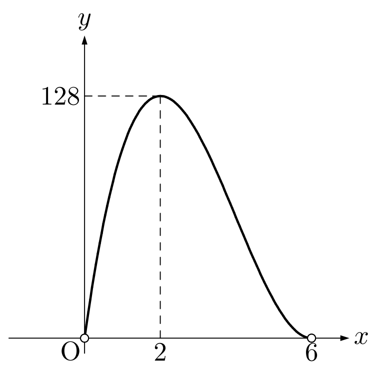
$x = 2$ のときの V の値は

$V = 4 \cdot 2(6 - 2)^2$

$= 4 \cdot 2 \cdot 4^2 = 128$

V の増減表は次のようになる．

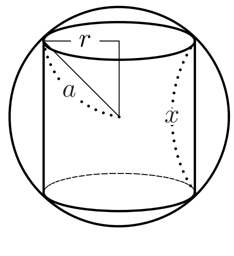
x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	128	↘	



よって $\boldsymbol{x = 2}$ のとき，V は最大値 128 (cm^2) をとる．

5.

（1）



底面の半径を r とすると

$r^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = a^2$ より，$r^2 = a^2 - \dfrac{x^2}{4}$

よって

$$
\begin{aligned}
V &= \pi r^2 x \\
&= \pi\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right)x \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}x(4a^2 - x^2) \quad (0 < x < 2a)}
\end{aligned}
$$

（2）
$$
\begin{aligned}
V' &= \frac{\pi}{4}\{(4a^2 - x^2 + x\cdot(-2x))\} \\
&= \frac{\pi}{4}(4a^2 - 3x^2) \\
&= -\frac{3}{4}\pi\left(x^2 - \frac{4}{3}a^2\right)
\end{aligned}
$$

$V' = 0$ とすると

$$
x^2 - \frac{4}{3}a^2 = 0
$$

$$
x^2 = \frac{4}{3}a^2
$$

$$
x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}a^2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}a \quad (a > 0 \text{ より})
$$

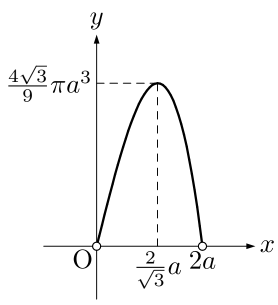
, $0 < x < 2a$ であるから, $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}a$

$x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}a$ のときの V の値は

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}a\left\{4a^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}a\right)^2\right\} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}a\left(4a^2 - \frac{4}{3}a^2\right) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}a\cdot\frac{8}{3}a^2 \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}a^3 = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3
\end{aligned}
$$

V の増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}a$	$\cdots$	$2a$
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$	$\searrow$	



よって $\boldsymbol{x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}a}$ のとき, V は最大値 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$ をとる.

6. $y = x - e\log x$ とおく.

$$
\begin{aligned}
y' &= 1 - e\cdot\frac{1}{x} \\
&= \frac{x-e}{x}
\end{aligned}
$$

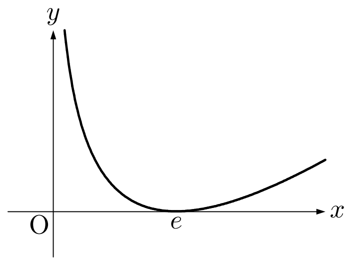
$y' = 0$ とすると, $x = e$

$x = e$ のときの y の値は

$$
\begin{aligned}
y &= e - e\log e \\
&= e - e = 0
\end{aligned}
$$

y の増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	0	$\nearrow$



よって, $x > 0$ において, $y \geqq 0$ であるから

$x - e\log x \geqq 0$, すなわち, $x \geqq e\log x$

7. （1） $\dfrac{0}{0}$ の不定形である.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)'}{(x^2+2x)'} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2x+2} \\
&= \frac{\frac{1}{1}}{2\cdot 0 + 2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

〔別解〕

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x(x+2)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{x+2} \\
&= 1\cdot\frac{1}{0+2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

（2） $\dfrac{0}{0}$ の不定形である.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sin\pi x)'}{(x-1)'} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\pi\cdot\cos\pi x}{1} \\
&= \pi\cdot\cos\pi \\
&= \pi\cdot(-1) = \boldsymbol{-\pi}
\end{aligned}
$$

〔別解〕

$x - 1 = t$ とおくと, $x \to 1$ のとき, $t \to 0$

また, $x = t + 1$

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi(t+1)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t + \pi)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{-\sin\pi t}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\left(-\pi\cdot\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right) \\
&= -\pi\cdot 1 = \boldsymbol{-\pi}
\end{aligned}
$$

($t \to 0$ のとき, $\pi t \to 0$ より)

（3） $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形である.

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x^2)'} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2} = \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

練習問題 1-B

1. 接点の座標を $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ とする．$y'=2x$ であるから，点 P における接線の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)$$
$$y=2tx-2t^2+t^2$$
$$y=2tx-t^2$$

これが，点 $(-1,\ -3)$ を通るので

$$-3=2t\cdot(-1)-t^2$$
$$-3=-2t-t^2$$
$$t^2+2t-3=0$$
$$(t+3)(t-1)=0$$

よって，$t=-3,\ 1$

i) $t=-3$ のとき

$$y=2\cdot(-3)x-(-3)^2$$
$$y=-6x-9$$

ii) $t=1$ のとき

$$y=2\cdot 1x-1^2$$
$$y=2x-1$$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-6x+9,\ \ y=2x-1}$$

2. 直円柱の表面積を S とすると

$$S=\pi r^2\times 2+2\pi r\times x$$
$$=2\pi r^2+2\pi rx\cdots①$$

また，体積が 1 であるから

$$\pi r^2 x=1$$

$\pi r^2\fallingdotseq 0$ なので，$x=\dfrac{1}{\pi r^2}$

これを①に代入して

$$S=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{1}{\pi r^2}$$
$$=2\pi r^2+\frac{2}{r}$$
$$S'=4\pi r-\frac{2}{r^2}$$
$$=\frac{4\pi r^3-2}{r^2}$$

$S'=0$ とすると，$4\pi r^3-2=0$，すなわち $2\pi r^3=1$

$r^3=\dfrac{1}{2\pi}$ を満たす実数 r は，$r=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$ ただ 1 つであるから，$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}=\alpha$ とおくと，S の増減表は次のようになり，$r=\alpha$ のとき，表面積は最小となる．

r	0	$\cdots$	α	$\cdots$
S'		$-$	0	$+$
S		$\searrow$		$\nearrow$

S が最小となるとき, $2\pi r^3=1$ が成り立つから, これと $\pi r^2 x=1$ より

$$\pi r^2 x=2\pi r^3$$
$$\boldsymbol{\frac{x}{r}=2}$$

3. 定義域は，$x\fallingdotseq 0$

$$y'=1-\frac{a}{x^2}$$
$$=\frac{x^2-a}{x^2}$$
$$=\frac{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{x^2}\quad (a>0\text{ より})$$

$y'=0$ とすると，$x=\pm\sqrt{a}$

$x=-\sqrt{a}$ のときの y の値は

$$y=-\sqrt{a}+\frac{a}{-\sqrt{a}}$$
$$=-\sqrt{a}-\sqrt{a}=-2\sqrt{a}$$

$x=\sqrt{a}$ のときの y の値は

$$y=\sqrt{a}+\frac{a}{\sqrt{a}}$$
$$=\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-2\sqrt{a}$	$\searrow$		$\searrow$	$2\sqrt{a}$	$\nearrow$

増減表より，$x=\pm\sqrt{a}$ で極値をもつ．

また，極小値は $2\sqrt{a}$ であるから

$$2\sqrt{a}=6$$
$$\sqrt{a}=3$$
$$\boldsymbol{a=9}$$

4. (1) $y'=3x^2-6x-9$

$$=3(x^2-2x-3)$$
$$=3(x+1)(x-3)$$

$y'=0$ とすると，$x=-1,\ 3$

$x=-1$ のときの y の値は

$$y=(-1)^3-3\cdot(-1)^2-9\cdot(-1)$$
$$=-1-3+9=5$$

$x=3$ のときの y の値は

$$y=3^3-3\cdot 3^2-9\cdot 3$$
$$=27-27-27=-27$$

y の増減表は次のようになる．

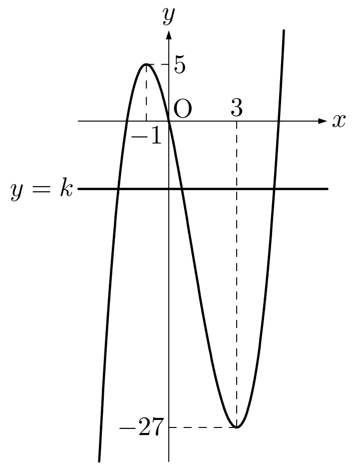
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

よって

極大値　5　($\boldsymbol{x=-1}$)

極小値　$\boldsymbol{-27}$　($\boldsymbol{x=3}$)

(2) $\begin{cases} y=x^3-3x^2-9x \\ y=k \end{cases}$ とする．



方程式の実数解の個数は，2 つのグラフの交点の個数であるから

$$k < -27 \text{ のとき} \quad 1\text{ 個}$$
$$k = -27 \text{ のとき} \quad 2\text{ 個}$$
$$-27 < k < 5 \text{ のとき} \quad 3\text{ 個}$$
$$k = 5 \text{ のとき} \quad 2\text{ 個}$$
$$k > 5 \text{ のとき} \quad 1\text{ 個}$$

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{k < -27,\ k > 5} \textbf{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{k = -27,\ k = 5} \textbf{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{-27 < k < 5} \textbf{ のとき} & \textbf{3 個} \end{cases}$$

5. 　接点の座標を $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{a}{t}\right)$ とする．$y' = -\dfrac{a}{x^2}$ であるから，点 P における接線の方程式は

$$y - \frac{a}{t} = -\frac{a}{t^2}(x - t)$$
$$y = -\frac{a}{t^2}x + \frac{a}{t} + \frac{a}{t}$$
$$y = -\frac{a}{t^2}x + \frac{2a}{t} \cdots ①$$

①において，$y = 0$ とおけば

$$0 = -\frac{a}{t^2}x + \frac{2a}{t}$$
$$\frac{a}{t^2}x = \frac{2a}{t}$$
$$x = 2t$$

よって，点 A の座標は，$(2t,\ 0)$

また，①において，$x = 0$ とおけば

$$y = \frac{2a}{t}$$

よって，点 B の座標は，$\left(0,\ \dfrac{2a}{t}\right)$

ここで，線分 AB の中点の座標を求めると

$$\left(\frac{2t+0}{2},\ \frac{0+\frac{2a}{t}}{2}\right) = \left(t,\ \frac{a}{t}\right)$$

これは，点 P の座標に等しいので，点 P は線分 AB の中点である．よって，$\mathrm{PA} = \mathrm{PB}$

6. （1）　$y' = \dfrac{1}{x}$ であるから，点 P における接線の方程式は

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t)$$
$$y = \frac{x}{t} - 1 + \log t \cdots ①$$

①において，$y = 0$ とおけば

$$0 = \frac{x}{t} - 1 + \log t$$
$$-\frac{x}{t} = -1 + \log t$$
$$x = t(1 - \log t)$$

よって，点 A の座標は，$(t(1 - \log t),\ 0)$

また，①において，$x = 0$ とおけば

$$y = -1 + \log t$$

よって，点 B の座標は，$(0,\ -1 + \log t)$

以上より

$$S = \frac{1}{2}|\,t(1 - \log t)\,||-1 + \log t\,|$$
$$= \frac{1}{2}t|\,1 - \log t\,||\,1 - \log t\,|$$
$$(|-a| = |\,a\,|,\quad t > 0 \text{ より})$$
$$= \frac{1}{2}t|\,1 - \log t\,|^2$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}t(1 - \log t)^2} \quad (0 < t < 1)$$

（2）$S' = \dfrac{1}{2}\left\{(1 - \log t)^2 + t \cdot 2(1 - \log t) \cdot \left(-\dfrac{1}{t}\right)\right\}$

$$= \frac{1}{2}\{(1 - \log t)^2 - 2(1 - \log t)\}$$
$$= \frac{1}{2}(1 - \log t)\{(1 - \log t) - 2\}$$
$$= \frac{1}{2}(\log t + 1)(\log t - 1)$$

$S' = 0$ とすると，$\log t = \pm 1$ より，$t = e,\ \dfrac{1}{e}$

$0 < t < 1$ であるから，$t = \dfrac{1}{e}$

$t = \dfrac{1}{e}$ のときの S の値は

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e}\left(1 - \log \frac{1}{e}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2e}\{1 - (-1)\}^2$$
$$= \frac{1}{2e} \cdot 4 = \frac{2}{e}$$

S の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	

$t = \dfrac{1}{e}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{2}{e}$ をとるので，このときの点 P の座標は

$$(t,\ \log t) = \left(\frac{1}{e},\ \log \frac{1}{e}\right)$$
$$= \boldsymbol{\left(\frac{1}{e},\ -1\right)}$$

∎