2章　微分の応用

§1　関数の変動 (p.45〜p.58)

問1　$y=f(x)$ とする.

（1）　$f'(x)=4x+3$

よって

$f(0)=1$

$f'(0)=3$

したがって，$x=0$ における接線の方程式は

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$
$$y-1=3x$$
$$\boldsymbol{y=3x+1}$$

（2）　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

よって

$f(1)=\log 1=0$

$f'(1)=1$

したがって，$x=1$ における接線の方程式は

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$
$$y-0=1\cdot(x-1)$$
$$\boldsymbol{y=x-1}$$

（3）　$f'(x)=e^x$

よって

$f(2)=e^2$

$f'(2)=e^2$

したがって，$x=2$ における接線の方程式は

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)$$
$$y-e^2=e^2(x-2)$$
$$y=e^2x-2e^2+e^2$$
$$\boldsymbol{y=e^2x-e^2}$$

（4）　$f'(x)=\cos x$

よって

$f(\pi)=\sin\pi=0$

$f'(\pi)=\cos\pi=-1$

したがって，$x=\pi$ における接線の方程式は

$$y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)$$
$$y-0=-1\cdot(x-\pi)$$
$$\boldsymbol{y=-x+\pi}$$

問2　$y=f(x)$ とする.

（1）　$f'(x)=3x^2$

よって

$f(1)=1^3=1$

$f'(1)=3\cdot1^2=3$

したがって，$x=1$ における法線の方程式は

$$y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)$$
$$y-1=-\frac{1}{3}(x-1)$$
$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}+1$$
$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}}$$

（2）　$f'(x)=(x^{-1})'=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$

よって

$f(2)=\dfrac{1}{2}$

$f'(2)=-\dfrac{1}{2^2}=-\dfrac{1}{4}$

したがって，$x=2$ における法線の方程式は

$$y-f(2)=-\frac{1}{f'(2)}(x-2)$$
$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{-\frac{1}{4}}(x-2)$$
$$y=4(x-2)+\frac{1}{2}$$
$$y=4x-8+\frac{1}{2}$$
$$\boldsymbol{y=4x-\frac{15}{2}}$$

（3）　$f'(x)=2x-2$

よって

$f(1)=1^2-2\cdot1=-1$

$f'(1)=2\cdot1-2=0$

$f'(1)=0$ なので，$x=1$ における法線の方程式は

$\boldsymbol{x=1}$

問3

（1）　$f'(x)=x^2-x+2$

$$=(x-1)^2-1+2$$
$$=(x-1)^2+1$$

$(x-1)^2\geqq 0$ なので，$(x-1)^2+1>0$

よって，すべての実数 x について，$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は区間 I で単調に増加する.

（2）　$f'(x)=\cos x-1$

区間 $(0,\ 2\pi)$ の x について

$-1\leqq\cos x<1$

であるから

$-2\leqq\cos x-1<0$

すなわち，$f'(x)<0$ であるから，$f(x)$ は区間 I で単調に減少する.

問4

（1）　$y'=2x-6$

$=2(x-3)$

$y'=0$ とすると，$x=3$

$x=3$ のときの y の値は

$$y=3^2-6\cdot3+3$$
$$=9-18+3$$
$$=-6$$

y の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-6	$\nearrow$

よって

$x>3$ のとき　増加

$x < 3$ のとき　減少

（2）　$y' = 6x^2 - 18x$

$= 6x(x-3)$

$y' = 0$ とすると，$x = 0,\ 3$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = 12$

$x = 3$ のときの y の値は

$y = 2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 12$

$= 54 - 81 + 12$

$= -15$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	12	$\searrow$	-15	$\nearrow$

よって

$x < 0$，$x > 3$ のとき　増加

$0 < x < 3$ のとき　減少

（3）　$y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x$

$= 12x(x^2 + x - 2)$

$= 12x(x+2)(x-1)$

$y' = 0$ とすると，$x = -2,\ 0,\ 1$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = 11$

$x = -2$ のときの y の値は

$y = 3 \cdot (-2)^4 + 4 \cdot (-2)^3 - 12 \cdot (-2)^2 + 11$

$= 48 - 32 - 48 + 11$

$= -21$

$x = 1$ のときの y の値は

$y = 3 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 11$

$= 3 + 4 - 12 + 11$

$= 6$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-21	$\nearrow$	11	$\searrow$	6	$\nearrow$

よって

$-2 < x < 0$，$x > 1$ のとき　増加

$x < -2$，$0 < x < 1$ のとき　減少

問 5

$(f(x) - x^2)' = 0$ より，$f(x) - x^2$ は，定数関数なので，C を定数として

$f(x) - x^2 = C$

とおくことができる．これより

$f(x) = x^2 + C$

ここで，$f(1) = 5$ であるから

$1^2 + C = 5$，すなわち，$C = 5 - 1 = 4$

よって，$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 4}$

問 6

（1）　$y' = -3x^2 + 3$

$= -3(x^2 - 1)$

$= -3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると，$x = -1,\ 1$

$x = -1$ のときの y の値は

$y = -(-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 1$

$= 1 - 3 - 1$

$= -3$

$x = 1$ のときの y の値は

$y = -1^3 + 3 \cdot 1 - 1$

$= -1 + 3 - 1$

$= 1$

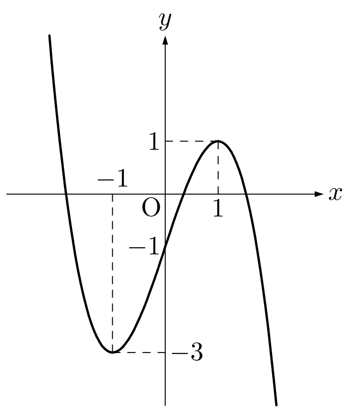
y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$

よって

極大値　1　$(x = 1)$

極小値　-3　$(x = -1)$



（2）　$y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

$= 4x(x^2 - 3x + 2)$

$= 4x(x-1)(x-2)$

$y' = 0$ とすると，$x = 0,\ 1,\ 2$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = 0$

$x = 1$ のときの y の値は

$y = 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2$

$= 1 - 4 + 4$

$= 1$

$x = 2$ のときの y の値は

$y = 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2$

$= 16 - 32 + 16$

$= 0$

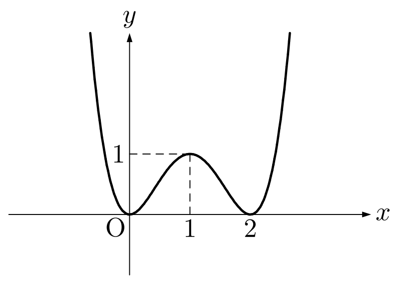
y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって

極大値　1　$(x = 1)$

極小値　0　($x=0,\ 2$)



（3）　$y' = 12x^3 - 18x^2x$

$= 6x^2(2x-3)$

$y'=0$ とすると，$x=0,\ \dfrac{3}{2}$

$x=0$ のときの y の値は

$y=4$

$x=\dfrac{3}{2}$ のときの y の値は

$$y = 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 4$$

$$= \frac{243}{16} - \frac{162}{8} + 4$$

$$= \frac{243-324+64}{16} = -\frac{17}{16}$$

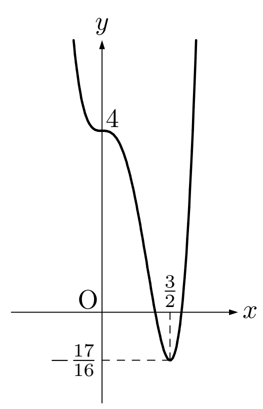
y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	4	↘	$-\frac{17}{16}$	↗

よって

極大値　なし

極小値　$-\dfrac{17}{16}$　$\left(x=\dfrac{3}{2}\right)$



問 7

$y' = 3x^2 - 6x$

$= 3x(x-2)$

$y'=0$ とすると，$x=0,\ 2$

$x=0$ のときの y の値は

$y=a$

$x=2$ のときの y の値は

$y = 2^3 - 3\cdot 2^2 + a$

$= 8 - 12 + a$

$= a - 4$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	a	↘	$a-4$	↗

極大値が，a，極小値が，$a-4$ であるから

$$\begin{cases} a > 0 & \cdots ① \\ a - 4 < 0 & \cdots ② \end{cases}$$

②より，$a<4$，これと①より

$0 < a < 4$

問 8

（1）　$y' = -3x^2 + 6x$

$= -3x(x-2)$

$y'=0$ とすると，$x=0,\ 2$

$x=0$ のときの y の値は

$y=-2$

$x=2$ のときの y の値は

$y = -2^3 + 3\cdot 2^2 - 2$

$= -8 + 12 - 2 = 2$

$x=3$ のときの y の値は

$y = -3^3 + 3\cdot 3^2 - 2$

$= -27 + 27 - 2 = -2$

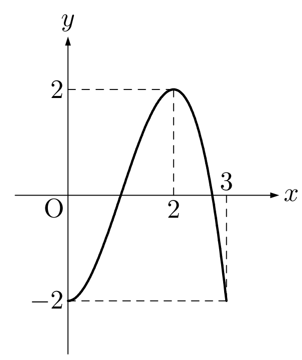
y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'	0	$+$	0	$-$	
y	-2	↗	2	↘	-2

よって

最大値　2　($x=2$)

最小値　-2　($x=0,\ 3$)



（2）　$y' = 2\cos x - 1$

$y'=0$ とすると

$\cos x = \dfrac{1}{2}$ より，$x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

$x=0$ のときの y の値は

$y = 2\sin 0 - 0 = 0$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のときの y の値は

$y = 2\sin\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3}$

$= \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$

$x=\dfrac{5}{3}\pi$ のときの y の値は

$y = 2\sin\dfrac{5}{3}\pi - \dfrac{5}{3}\pi$

$= -\sqrt{3} - \dfrac{5}{3}\pi$

$x=2\pi$ のときの y の値は

$y = 2\sin 2\pi - 2\pi$

$= -2\pi$

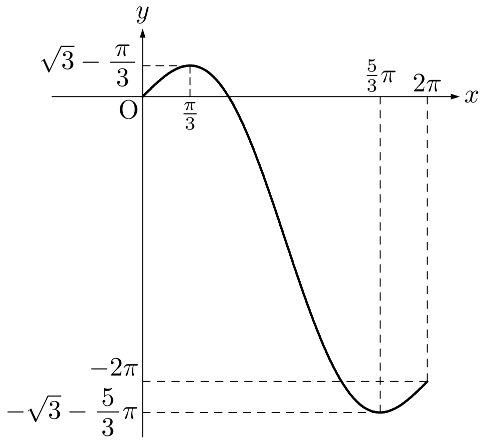
y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	-2π

よって

最大値　$\boldsymbol{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}$　$\boldsymbol{\left(x=\frac{\pi}{3}\right)}$

最小値　$\boldsymbol{-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi}$　$\boldsymbol{\left(x=\frac{5}{3}\pi\right)}$



（3）　$y' = e^x + xe^x$

$= e^x(1+x)$

$y'=0$ とすると，$x=-1$

$x=-2$ のときの y の値は

$y=-2\cdot e^{-2}$

$=-\dfrac{2}{e^2}$

$x=-1$ のときの y の値は

$y=-1\cdot e^{-1}$

$=-\dfrac{1}{e}$

$x=0$ のときの y の値は

$y=0$

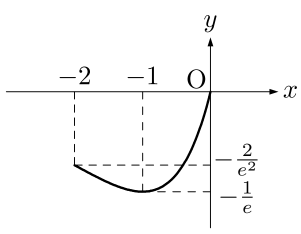
y の増減表は次のようになる．

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
y'		$-$	0	$+$	
y	$-\frac{2}{e^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

よって

最大値　$\boldsymbol{0}$　$\boldsymbol{(x=0)}$

最小値　$\boldsymbol{-\frac{1}{e}}$　$\boldsymbol{(x=-1)}$



※　y 軸方向にスケールを拡大してあります．

（4）　$y' = 1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

$y'=0$ とすると，$2\sqrt{x}-1=0$ より，$x=\dfrac{1}{4}$

$x=0$ のときの y の値は

$y=0$

$x=\dfrac{1}{4}$ のときの y の値は

$y=\dfrac{1}{4}-\sqrt{\dfrac{1}{4}}$

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$

$x=4$ のときの y の値は

$y=4-\sqrt{4}$

$=4-2=2$

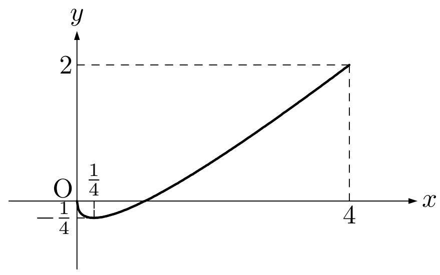
y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	2

よって

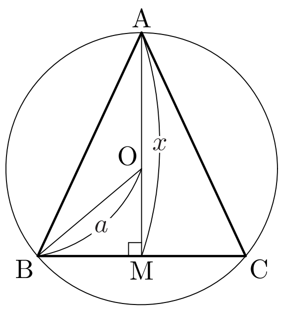
最大値　$\boldsymbol{2}$　$\boldsymbol{(x=4)}$

最小値　$\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$　$\boldsymbol{\left(x=\frac{1}{4}\right)}$



問 9

図のように点を定める．



（1）　$\mathrm{OM}=|x-a|$ であるから，$\mathrm{BM}=l$ とおくと，$\triangle\mathrm{OBM}$ において三平方の定理より

$l^2+|x-a|^2=a^2$

よって

$l^2=a^2-(x-a)^2$

$=\{a+(x-a)\}\{a-(x-a)\}$

$=x(2a-x)$

$=2ax-x^2$

$l>0$ であるから，$l=\sqrt{2ax-x^2}$

$\mathrm{BC}=2l=2\sqrt{2ax-x^2}$ となるので

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2ax-x^2}\cdot x$

$\boldsymbol{=x\sqrt{2ax-x^2}}$

また，$x>0$，$2ax-x^2>0$ より，x の変域は

$\boldsymbol{0<x<2a}$

（2）　$S'=\sqrt{2ax-x^2}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2ax-x^2}}\cdot(2a-2x)$

$=\dfrac{2(2ax-x^2)+x(2a-2x)}{2\sqrt{2ax-x^2}}$

$=\dfrac{-4x^2+6ax}{2\sqrt{2ax-x^2}}$

$=\dfrac{-x(2x-3a)}{\sqrt{2ax-x^2}}$

$S' = 0$ とすると，$x = \dfrac{3}{2}a$

$x = \dfrac{3}{2}a$ のときの S の値は

$$S = \frac{3}{2}a\sqrt{2a \cdot \frac{3}{2}a - \left(\frac{3}{2}a\right)^2}$$
$$= \frac{3}{2}a\sqrt{3a^2 - \frac{9}{4}a^2}$$
$$= \frac{3}{2}a\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$
$$= \frac{3}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|a| = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \quad (a > 0 \text{ より})$$

S の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}a$	$\cdots$	$2a$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$	$\searrow$	

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{3}{2}a}$ のとき，S は最大となる．

また, このとき, $\triangle$ABC は正三角形となり, S の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

〔別解〕

$S = \sqrt{2ax^3 - x^4}$ であるから，$f(x) = 2ax^3 - x^4$ とおくと，$f(x)$ が最大となるとき，S も最大となるので，$0 < x < 2a$ における $f(x)$ の最大値を求める．

$f'(x) = -6ax^2 - 4x^3 = -2x^2(2x - 3a)$

$f'(x) = 0$ とすると，$x = \dfrac{3}{2}a$

$x = \dfrac{3}{2}a$ のときの $f(x)$ の値は

$$f\left(\frac{3}{2}a\right) = 2a \cdot \left(\frac{3}{2}a\right)^3 - \left(\frac{3}{2}a\right)^4$$
$$= \frac{27}{4}a^4 - \frac{81}{16}a^4$$
$$= \frac{27}{16}a^4$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}a$	$\cdots$	$2a$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{27}{16}a^4$	$\searrow$	

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{3}{2}a}$ のとき，$f(x)$ が最大となる．

また，このとき，$\triangle$ABC は正三角形となり，S の最大値は，$\sqrt{\dfrac{27}{16}a^4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

問 10

（1） $y = \tan x - x$ とおく．

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$
$$= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

$y' = 0$ とすると，$x = 0$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = \tan 0 - 0 = 0$

また，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$y' \geqq 0$

y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	

よって，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x = 0$ で，最小値 0 をとるから

$y = \tan x - x \geqq 0$

すなわち，$\boldsymbol{\tan x \geqq x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

（2） $y = x - 1 - \log x$ とおく．

$$y' = 1 - \frac{1}{x}$$
$$= \frac{x - 1}{x}$$

$y' = 0$ とすると，$x = 1$

$x = 1$ のときの y の値は

$y = 1 - 1 - \log 1 = 0$

y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，$x > 0$ のとき，$x = 1$ で最小値 0 をとるから

$y = x - 1 - \log x \geqq 0$

すなわち，$\boldsymbol{\log x \leqq x - 1}$ $(x > 0)$

問 11

（1） $\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$\text{与式} = \lim_{x\to1} \frac{(x^5 + x^3 - 2)'}{(x^4 + x^2 - 2)'}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{5x^4 + 3x^2}{4x^3 + 2x}$$
$$= \frac{5 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^2}{4 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1}$$
$$= \frac{8}{6} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2)}{(x-1)(x^3 + x^2 + 2x + 2)}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$$
$$= \frac{1^4 + 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 2}{1^3 + 1^2 + 2 \cdot 1 + 2}$$
$$= \frac{8}{6} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

（2） $\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$\text{与式} = \lim_{x\to0} \frac{(e^x - \cos x)'}{x'}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{e^x + \sin x}{1}$$
$$= e^0 + \sin 0 = \boldsymbol{1}$$

（3） $\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$\text{与式} = \lim_{x\to0} \frac{(\sin 3x)'}{(\sin x)'}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{3\cos 3x}{\cos x}$$
$$= \frac{3}{1} = \boldsymbol{3}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = \lim_{x\to0} 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{x}{\sin x}$$
$$= 3 \cdot 1 \cdot 1 = \boldsymbol{3}$$

問 12

（1） $\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to1}\frac{(x^4-4x+3)'}{(x^3-3x+2)'}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{4x^3-4}{3x^2-3} \qquad \left(\text{まだ} \quad \frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to1}\frac{(4x^3-4)'}{(3x^2-3)'}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{12x^2}{6x}\\
&= \lim_{x\to1}2x = 2\cdot1 = \mathbf{2}
\end{aligned}
$$

〔別解〕

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x-3)}{(x-1)(x^2+x-2)}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2+x-3}{x^2+x-2}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{(x-1)(x+2)}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{x^2+2x+3}{x+2}\\
&= \frac{1^2+2\cdot1+3}{1+2}\\
&= \frac{6}{3} = \mathbf{2}
\end{aligned}
$$

（2） $\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to0}\frac{(\sin x-x)'}{(x^3)'}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2} \qquad \left(\text{まだ} \quad \frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)'}{(3x^2)'}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x}\\
&= \lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)\\
&= -\frac{1}{6}\cdot1 = \boldsymbol{-\frac{1}{6}}
\end{aligned}
$$

問 13

（1） $\dfrac{\infty}{-\infty}$ の不定形である．

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2-2x+3)'}{(-x^2+3x-1)'}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4x-2}{-2x+3} \qquad \left(\text{まだ} \quad \frac{\infty}{-\infty}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(4x-2)'}{(-2x+3)'}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4}{-2}\\
&= \mathbf{-2}
\end{aligned}
$$

〔別解〕

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{-1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}\\
&= \frac{2-0+0}{-1+0-0} = \mathbf{-2}
\end{aligned}
$$

（2） 与式を，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}$ と変形すれば，$\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{2}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{\dfrac{1}{x^2}+1}\right)\\
&= -\frac{1}{0+1} = \mathbf{-1}
\end{aligned}
$$

問 14

（1）

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(e^{2x})'}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2e^{2x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(e^{2x})'}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{2x\cdot e^{2x}-x^2\cdot2e^{2x}}{(e^{2x})^2}\\
&= \frac{2xe^{2x}(1-x)}{(e^{2x})^2} = \frac{2x(1-x)}{e^{2x}}
\end{aligned}
$$

$y'=0$ とすると，$x=0,\ 1$

$x=0$ のときの y の値は

$$y=\frac{0^2}{e^0}=0$$

$x=1$ のときの y の値は

$$y=\frac{1^2}{e^2}=\frac{1}{e^2}$$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	$\frac{1}{e^2}$	↘

よって

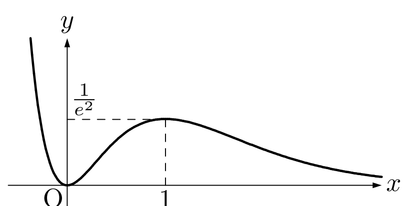
極大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{e^2}}$ $\quad(\boldsymbol{x=1})$

極小値 $\mathbf{0}$ $\quad(\boldsymbol{x=0})$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}$ を求める．$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$ であるから

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{2x}} &= \lim_{t\to\infty}\frac{(-t)^2}{e^{-2t}}\\
&= \lim_{t\to\infty}t^2\cdot e^{2t} = \infty
\end{aligned}
$$

また，（1）より，x 軸は漸近線となる．



※ y 軸方向にスケールを拡大してあります．