2章　微分の応用

§2　いろいろな応用 (p.61〜p.74)

問 1

（1）$y = x^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{4x\sqrt{x}}}$$

（2）$y' = 4(2x+3)^3\cdot 2$

$$= 8(2x+3)^3$$

$$y'' = 3\cdot 8(2x+3)^2\cdot 2$$

$$= \boldsymbol{48(2x+3)^2}$$

（3）$y' = \dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x$

$$= \frac{2x}{x^2+1}$$

$$y'' = \frac{2\cdot(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}}$$

問 2　（数学的帰納法による証明は省略）

（1）$y' = e^{2x}\cdot 2$

$$= 2e^{2x}$$

$$y'' = 2e^{2x}\cdot 2$$

$$= 2^2e^{2x}$$

$$y''' = 2^2e^{2x}\cdot 2$$

$$= 2^3e^{2x}$$

$$y^{(4)} = 2^3 2e^{2x}\cdot 2$$

$$= 2^4e^{2x}$$

よって，$\boldsymbol{y^{(n)} = 2^ne^{2x}}$

（2）$y = (1-x)^{-1}$ として

$$y' = -(1-x)^{-2}\cdot(-1)$$

$$= (1-x)^{-2}$$

$$y'' = -2(1-x)^{-3}\cdot(-1)$$

$$= 2(1-x)^{-3}$$

$$y''' = -3\cdot 2(1-x)^{-4}\cdot(-1)$$

$$= 3\cdot 2(1-x)^{-4}$$

$$y^{(4)} = -4\cdot 3\cdot 2(1-x)^{-5}\cdot(-1)$$

$$= 4\cdot 3\cdot 2(1-x)^{-5}$$

$$= \frac{4\,!}{(1-x)^5}$$

よって，$\boldsymbol{y^{(n)} = \dfrac{n\,!}{(1-x)^{n+1}}}$

問 3

$$y^{(5)} = (x^3)^{(5)}\cos x + {}_5\mathrm{C}_1(x^3)^{(4)}(\cos x)'$$

$$+ {}_5\mathrm{C}_2(x^3)'''(\cos x)'' + {}_5\mathrm{C}_3(x^3)''(\cos x)'''$$

$$+ {}_5\mathrm{C}_4(x^3)'(\cos x)^{(4)} + x^3\cdot(\cos x)^{(5)}$$

$$= 0\cdot\cos x + 5\cdot 0\cdot(-\sin x)$$

$$+ 10\cdot 6\cdot(-\cos x) + 10\cdot 6x\cdot\sin x$$

$$+ 5\cdot 3x^2\cdot\cos x + x^3\cdot(-\sin x)$$

$$\boldsymbol{= -60\cos x + 60x\sin x}$$

$$\boldsymbol{+15x^2\cos x - x^3\sin x}$$

問 4

（1）$y' = 3x^2 - 6x$

$$y'' = 6x - 6$$

$$= 6(x-1)$$

$y'' = 0$ とすると，$x = 1$

$x = 1$ のときの y の値は

$$y = 1^3 - 3\cdot 1^{+}1$$

$$= 1 - 3 + 1 = -1$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y		-1	

よって

$x < 1$ のとき　上に凸

$x > 1$ のとき　下に凸

変曲点は，$\boldsymbol{(1,\ -1)}$

（2）$y' = 4x^3 - 6x^2 - 24x$

$$y'' = 12x^2 - 12x - 24$$

$$= 12(x^2 - x - 2) = 12(x+1)(x-2)$$

$y'' = 0$ とすると，$x = -1,\ 2$

$x=-1$ のときの y の値は

$$y=(-1)^4-2\cdot(-1)^3-12\cdot(-1)^2$$
$$=1+2-12=-9$$

$x=3$ のときの y の値は

$$y=2^4-2\cdot 2^3-12\cdot 2^2$$
$$=16-16-48=-48$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y		-9		-48	

よって

$x<-1$, $2<x$ のとき　下に凸

$-1<x<2$ のとき　上に凸

変曲点は，**$(-1,\ -9)$，$(2,\ -48)$**

（3）　$y'=\cos x$

$y''=-\sin x$

$0<x<2\pi$ において，$y''=0$ とすると，$x=\pi$

$x=\pi$ のときの y の値は

$$y=\sin\pi=0$$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
y''		$-$	0	$+$	
y			0		

よって

$0<x<\pi$ のとき　上に凸

$\pi<x<2\pi$ のとき　下に凸

変曲点は，**$(\pi,\ 0)$**

問 5

（1）　$y'=-4x^3-6x^2$

$$=-2x^2(2x+3)$$

$y''=-12x^2-12x$

$$=-12x(x+1)$$

$y'=0$ とすると，$x=0,\ -\dfrac{3}{2}$

$y''=0$ とすると，$x=0,\ -1$

$x=0$ のときの y の値は

$$y=0$$

$x=-\dfrac{3}{2}$ のときの y の値は

$$y=-\left(\frac{3}{2}\right)^4-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3$$
$$=-\frac{81}{16}+\frac{27}{4}=\frac{27}{16}$$

$x=-1$ のときの y の値は

$$y=-(-1)^4-2\cdot(-1)^3$$
$$=-1+2=1$$

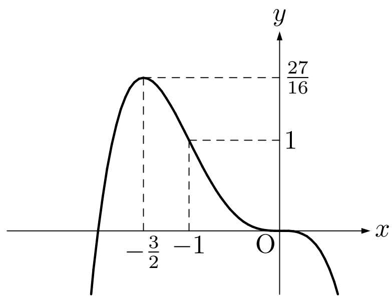
よって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↗	$\frac{27}{16}$	↘	1	↘	0	↘

よって

極大値　$\dfrac{27}{16}$　$\left(x=-\dfrac{3}{2}\right)$

変曲点　$(-1,\ 1)$, $(0,\ 0)$



（2）　$y'=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$$y''=-\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$
$$=-\frac{2(x^2+1)\{(x^2+1)-4x^2\}}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$y'=0$ とすると，$x=0$

$y''=0$ とすると，$3x^2-1=0$ より，$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$x=0$ のときの y の値は

$$y=\frac{1}{0+1}=1$$

$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときの y の値は

$$y=\frac{1}{\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{1}{3}+1}=\frac{3}{4}$$

y の増減表は次のようになる．

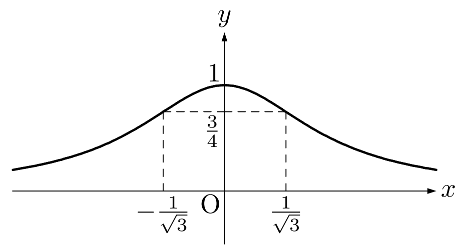
x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘

よって

極大値　1　$(x=0)$

変曲点　$\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{3}{4}\right)$

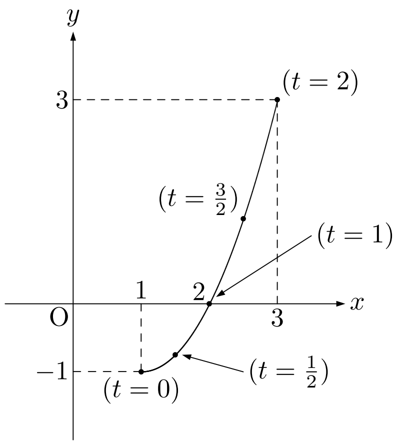
また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$ より，x 軸が漸近線となる．



問 6

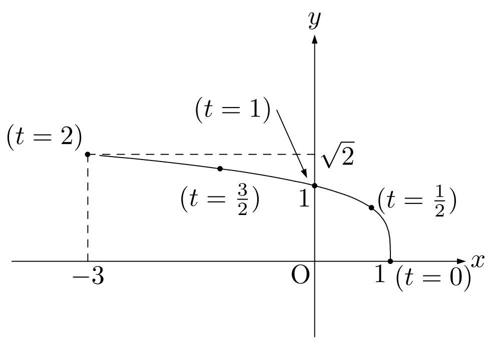
（1） t にいろいろな値を代入すると

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
y	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3



（2） t にいろいろな値を代入すると

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	-3
y	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{2}$



問 7

2 式から t を消去する．$a\fallingdotseq 0$，$b\fallingdotseq 0$ であるから

$x=a\cos t$ より，$\cos t=\dfrac{x}{a}\cdots$①

$y=b\sin t$ より，$\sin t=\dfrac{y}{b}\cdots$②

また，$\cos^2 t+\sin^2 t=1$ であるから，①，②をこれに代入して

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

すなわち，$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

問 8

（1）
$$\frac{dx}{dt}=\frac{e^t+e^{-t}\cdot(-1)}{2}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{e^t-e^{-t}\cdot(-1)}{2}=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

したがって，$\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\fallingdotseq 0$ のとき，すなわち，$t\fallingdotseq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{e^t+e^{-t}}{2}}{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}}$$

（2）
$$\frac{dx}{dt}=2\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-6\cos^2 t\sin t$$
$$\frac{dy}{dt}=2\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t=6\sin^2 t\cos t$$

したがって，$-6\cos^2 t\sin t\fallingdotseq 0$ のとき，すなわち

$\cos^2 t\fallingdotseq 0$ かつ $\sin t\fallingdotseq 0$

$t\fallingdotseq\dfrac{n}{2}\pi$ （n は整数）のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6\sin^2 t\cos t}{-6\cos^2 t\sin t}$$
$$=-\frac{\sin t}{\cos t}=\boldsymbol{-\tan t}$$

問 9

（1） $t=1$ のとき

$x=1+1=2$

$y=1^2-1=0$

よって，$t=1$ に対応する点は，**(2, 0)**

また，$\dfrac{dx}{dt}=1$，$\dfrac{dy}{dt}=2t$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{1}=2t$$

したがって，求める接線の方程式は

$y-0=2\cdot 1(x-2)$

$\boldsymbol{y=2x-4}$

（2） $t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$x=2\cos\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$
$$y=\sin 2\cdot\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点は，$\boldsymbol{\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

また，$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=2\cos 2t$ であるから，
$t \fallingdotseq n\pi$ （n は整数) のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{2\cos 2t}{-2\sin t}=-\frac{\cos 2t}{\sin t}$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\cos\dfrac{\pi}{3}}{\sin\dfrac{\pi}{6}}(x-\sqrt{3})$$

$$y=-\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}}(x-\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y=-(x-\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{y=-x+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

問 10

（1） 速度を $v(t)$，加速度を $\alpha(t)$ とすると

$$v(t)=\frac{dy}{dt}=\boldsymbol{-9.8t+19.6}\ \ (\mathrm{m/s})$$

$$\alpha(t)=\frac{dv}{dt}=\boldsymbol{-9.8}\ \ (\mathrm{m/s^2})$$

（2）最高の高さに達するのは，$v(t)=0$ となるときであるから，$-9.8t+19.6=0$ を解いて

$t=2$

このとき，高さ y は

$$\begin{aligned}y&=-4.9\cdot 2^2+19.6\cdot 2+1.5\\&=-19.6+39.2+1.5=21.1\end{aligned}$$

よって，時間は **2 秒** で，高さは **21.1m**