3章　積分法

§2　積分の計算　(p.97〜p.111)

教科書にしたがって，積分定数 C は省略

問 1

(1)　$1+\sin x = t$ とおくと，$\cos x\,dx = dt$

よって

$$\text{与式} = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 = \boldsymbol{\frac{1}{4}(1+\sin x)^4}$$

(2)　$3x+1 = t$ とおくと，$3\,dx = dt$ より，$dx = \frac{1}{3}dt$

よって

$$\text{与式} = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}t\sqrt{t} = \boldsymbol{\frac{2}{9}(3x+1)\sqrt{3x+1}}$$

(3)　$x^2+1 = t$ とおくと，$2x\,dx = dt$ より，$x\,dx = \frac{1}{2}dt$

よって

$$\text{与式} = \int t^4\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^4\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}t^5 = \boldsymbol{\frac{1}{10}(x^2+1)^5}$$

(4)　$x^2 = t$ とおくと，$2x\,dx = dt$ より，$x\,dx = \frac{1}{2}dt$

よって

$$\text{与式} = \int e^t\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}\cdot e^t = \boldsymbol{\frac{1}{2}e^{x^2}}$$

問 2

(1)
$$\text{与式} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx = \boldsymbol{\log|\sin x|}$$

(2)
$$\text{与式} = \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx = \log|e^x+1| = \boldsymbol{\log(e^x+1)}\quad (e^x+1>0\text{ より})$$

(3)
$$\text{与式} = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+1| = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log(x^2+1)}\quad (x^2+1>0\text{ より})$$

問 3

(1)　$3x+2 = t$ とおくと，$3\,dx = dt$ より，$dx = \frac{1}{3}dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to 1$
t	$2 \to 5$

よって

$$\text{与式} = \int_2^5 t^{-2}\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{t}\right]_2^5 = \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} = \boldsymbol{\frac{1}{10}}$$

(2)　$\log x = t$ とおくと，$\frac{1}{x}\,dx = dt$

また，x と t の対応は

x	$e \to e^2$
t	$1 \to 2$

よって

$$\text{与式} = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \Big[\log|t|\Big]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \boldsymbol{\log 2}$$

(3)　$\sin x = t$ とおくと，$\cos x\,dx = dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$0 \to 1$

よって

$$\text{与式} = \int_0^1 t^4\,dt = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}(1^5-0^5) = \boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

問 4　教科書の $G(x)$ 等をそのまま使用.

(1)　$f(x) = x,\ \ g(x) = \sin x$ とすると

$$G(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x$$
$$f'(x) = 1$$

よって

$$\text{与式} = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int\cos x\,dx = \boldsymbol{-x\cos x + \sin x}$$

(2)　$f(x) = x,\ \ g(x) = e^x$ とすると

$$G(x) = \int e^x\,dx = e^x$$
$$f'(x) = 1$$

よって

$$与式 = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx$$
$$= \boldsymbol{xe^x - e^x}$$
$$= \boldsymbol{(x-1)e^x}$$

問 5 教科書の $F(x)$ 等をそのまま使用.

（1） $f(x)=x,\ \ g(x)=\log x$ とすると
$$F(x)=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2$$
$$g'(x)=\frac{1}{x}$$
よって
$$与式 = \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^2(2\log x - 1)}$$

（2） $f(x)=x^2,\ \ g(x)=\log x$ とすると
$$F(x)=\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3$$
$$g'(x)=\frac{1}{x}$$
よって
$$与式 = \frac{1}{3}x^3\log x - \int \frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{9}x^3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{9}x^3(3\log x - 1)}$$

問 6

（1）
$$与式 = x^2\cdot(-e^{-x}) - \int (x^2)'\cdot(-e^{-x})\,dx$$
$$= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$$
$$= -x^2e^{-x} + 2\left\{x\cdot(-e^{-x}) - \int x'\cdot(-e^{-x})\,dx\right\}$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}$$
$$= \boldsymbol{-(x^2+2x+2)e^{-x}}$$

（2）
$$与式 = x^2\cdot(-\cos x) - \int (x^2)'\cdot(-\cos x)\,dx$$
$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$
$$= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int x'\cdot\sin x\,dx\right)$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,dx$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\cdot(-\cos x)$$
$$= \boldsymbol{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x}$$

（3）
$$与式 = \int 1\cdot(\log x)^2\,dx$$
$$= x(\log x)^2 - \int x\cdot\{(\log x)^2\}'\,dx$$
$$= x(\log x)^2 - \int x\left(2\log x\cdot\frac{1}{x}\right)\,dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx$$
$$= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) \quad （例題 5 より）$$
$$= \boldsymbol{x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x}$$

問 7

（1）
$$与式 = \left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 x'\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$
$$= \left(1\cdot\frac{1}{2}e^2 - 0\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - e^0)$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^2+1)}$$

（2）
$$与式 = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x'\cdot\sin x\,dx$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2} - \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2} - \{0 - (-1)\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1}$$

（3）
$$与式 = \left[x\log x\right]_1^2 - \int_1^2 x\cdot(\log x)'\,dx$$
$$= (2\log 2 - \log 1) - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= 2\log 2 - \int_1^2 dx$$
$$= 2\log 2 - \left[x\right]_1^2$$
$$= 2\log 2 - (2-1)$$
$$= \boldsymbol{2\log 2 - 1}$$

(4) 与式 $= \left[x^2 \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2)' \cdot \sin x\,dx$

$= \left(\frac{\pi^2}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{2} - 0\right) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$

$= \frac{\pi^2}{4} - 2\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi^2}{4} + 2\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$

$= \frac{\pi^2}{4} + 2(0-1)$

$= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4} - 2}$

問 8

(1) $x-2=t$ とおくと，$dx=dt$，$x=t+2$

よって

与式 $= \int \frac{t+2}{t^2}\,dt$

$= \int \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\right) dt$

$= \int \left(t^{-1} + 2t^{-2}\right) dt$

$= \log|t| + 2 \cdot (-t^{-1})$

$= \log|t| - \frac{2}{t}$

$= \boldsymbol{\log|x-2| - \frac{2}{x-2}}$

(2) $\sqrt{x+1} = t$ とおくと，$x+1=t^2$ であるから，$dx = 2tdt$，$x=t^2-1$

よって

与式 $= \int \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t\,dt$

$= 2\int (t^2-1)\,dt$

$= 2\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)$

$= \frac{2}{3}t(t^2-3)$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\{(\sqrt{x+1})^2 - 3\}$

$= \boldsymbol{\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}}$

〔別解〕

$x+1=t$ とおくと，$dx=dt$，$x=t-1$

よって

与式 $= \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt$

$= \int \left(\frac{t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$

$= \int (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\,dt$

$= \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}(t-3)$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\{(x+1)-3\}$

$= \boldsymbol{\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}}$

(3) $\sqrt{x+3} = t$ とおくと，$x+3=t^2$ であるから，$dx = 2tdt$，$x^2 = (t^2-3)^2$

よって

与式 $= \int (t^2-3)^2 \cdot t \cdot 2t\,dt$

$= 2\int t^2(t^2-3)^2\,dt$

$= 2\int t^2(t^4-6t^2+9)\,dt$

$= 2\int (t^6-6t^4+9t^2)\,dt$

$= 2\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + 3t^3\right)$

$= \frac{2}{35}t^3(5t^4 - 42t^2 + 105)$

$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3}\{5(\sqrt{x+3})^4$
$\quad - 42(\sqrt{x+3})^2 + 105\}$

$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3}\{5(x+3)^2$
$\quad - 42(x+3) + 105\}$

$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3}$
$\quad \times \{5(x^2+6x+9) - 42x - 126 + 105\}$

$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3}$
$\quad \times \{5x^2 + 30x + 45 - 42x - 126 + 105\}$

$= \boldsymbol{\frac{2}{35}(x+3)(5x^2-12x+24)\sqrt{x+3}}$

〔別解〕

$x+3=t$ とおくと，$dx=dt$，$x^2=(t-3)^2$

よって

与式 $= \int (t-3)^2\sqrt{t}\,dt$

$= \int (t^2-6t+9)t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$= \int (t^{\frac{5}{2}} - 6t^{\frac{3}{2}} + 9t^{\frac{1}{2}})\,dt$

$= \left(\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - 6 \cdot \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + 9 \cdot \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)$

$= \frac{2}{35}t^{\frac{3}{2}}(5t^2 - 42t + 105)$

$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3}\{5(x+3)^2$
$\quad - 42(x+3) + 105\}$

$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3}$
$\quad \times \{5(x^2+6x+9) - 42x - 126 + 105\}$

$= \frac{2}{35}(x+3)\sqrt{x+3}$
$\quad \times \{5x^2 + 30x + 45 - 42x - 126 + 105\}$

$= \boldsymbol{\frac{2}{35}(x+3)(5x^2-12x+24)\sqrt{x+3}}$

（4）　$2x-1=t$ とおくと，$2dx=dt$ より，$dx=\dfrac{dt}{2}$，$x=\dfrac{t+1}{2}$

よって

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int 4\cdot\frac{t+1}{2}t^7\cdot\frac{dt}{2}\\
&= \int t^7(t+1)\,dt\\
&= \int (t^8+t^7)\,dt\\
&= \frac{1}{9}t^9+\frac{1}{8}t^8\\
&= \frac{1}{72}t^8(8t+9)\\
&= \frac{1}{72}(2x-1)^8\{8(2x-1)+9\}\\
&= \frac{1}{72}(2x-1)^8(16x-8+9)\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{72}(16x+1)(2x-1)^8}
\end{aligned}$$

問 9

（1）　$x=2\sin\theta$ とおくと，$dx=2\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0 \to 2$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

よって

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-(2\sin\theta)^2}\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\theta\geqq 0$ なので

$$\begin{aligned}
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta\\
&= 2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= 2\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\pi}
\end{aligned}$$

（2）　$x=2\sin\theta$ とおくと，$dx=2\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{6}$

よって

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-(2\sin\theta)^2}\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\theta\geqq 0$ なので

$$\begin{aligned}
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta\,d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta\\
&= 2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\\
&= 2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}
\end{aligned}$$

（3）　$x=3\sin\theta$ とおくと，$dx=3\cos\theta d\theta$

$\sqrt{9-x^2}$ は偶関数であるから

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx = 2\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$$

このとき，x と θ の対応は

x	$0 \to 3$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

よって

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-(3\sin\theta)^2}\cdot 3\cos\theta\,d\theta\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta\\
&= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos\theta\geqq 0$ なので

$$\begin{aligned}
&= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta\\
&= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\
&= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta\\
&= 9\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= 9\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{9}{2}\pi}
\end{aligned}$$

問 10

$I=\int e^{ax}\sin bx\,dx$ とおくと

$$I=e^{ax}\cdot\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right)-\int(e^{ax})'\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right)dx$$
$$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$
$$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx$$
$$+\frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx\right)$$
$$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}I$$

よって

$$b^2I=-ba^{ax}\cos bx+ae^{ax}\sin bx-a^2I$$
$$(a^2+b^2)I=e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)$$
$$\boldsymbol{I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)}$$

問 11

(1) 与式 $=\dfrac{e^{2x}}{2^2+3^2}(2\cos 3x+3\sin 3x)$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{13}e^{2x}(2\cos 3x+3\sin 3x)}$$

(2) 与式 $=\dfrac{e^{3x}}{3^2+4^2}(3\sin 4x-4\cos 4x)$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{25}e^{3x}(3\sin 4x-4\cos 4x)}$$

問 12

(1) 分子を分母で割ると

$$\begin{array}{r|l} & x^2\quad -1 \\ \hline x^2+1 & x^4 \\ & x^4\ +x^2 \\ \hline & \quad -x^2 \\ & \quad -x^2\ -1 \\ \hline & \qquad\quad 1 \end{array}$$

よって

与式 $=\displaystyle\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{3}x^3-x+\tan^{-1}x}$$

(2) まず，部分分数に分解する．

$\dfrac{2x+1}{(x-4)(x+1)}=\dfrac{a}{x-4}+\dfrac{b}{x+1}$ とおき，両辺に $(x-4)(x+1)$ をかけると

$$2x+1=a(x+1)+b(x-4)$$
$$2x+1=ax+a+bx-4b$$
$$2x+1=(a+b)x+(a-4b)$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases}a+b=2\\a-4b=1\end{cases}$$

これを解いて，$a=\dfrac{9}{5}$，$b=\dfrac{1}{5}$

よって

$$与式=\int\left(\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x-4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{9}{5}\int\frac{1}{x-4}\,dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{x+1}\,dx$$
$$=\frac{9}{5}\int\frac{(x-4)'}{x-4}\,dx+\frac{1}{5}\int\frac{(x+1)'}{x+1}\,dx$$
$$\boldsymbol{=\frac{9}{5}\log|x-4|+\frac{1}{5}\log|x+1|}$$

問 13

(1) 両辺に $x^2(x-1)$ をかけると

$$1=(ax+b)(x-1)+cx^2$$
$$1=ax^2+(-a+b)x-b+cx^2$$
$$1=(a+c)x^2+(-a+b)x-b$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases}a+c=0\\-a+b=0\\-b=1\end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-1,\ b=-1,\ c=1}$

(2) 与式 $=\displaystyle\int\left(\frac{-x-1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\right)dx$

$$=-\int\frac{x+1}{x^2}\,dx+\int\frac{(x-1)'}{x-1}\,dx$$
$$=-\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx+\log|x-1|$$
$$=-\left(\log|x|-\frac{1}{x}\right)+\log|x-1|$$
$$=\log|x-1|-\log|x|+\frac{1}{x}$$
$$\boldsymbol{=\log\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x}}$$

問 14

$\dfrac{1}{x^2-a^2}$ を部分分数分解する．

$\dfrac{1}{x^2-a^2}=\dfrac{k}{x+a}+\dfrac{l}{x-a}$ とおき，両辺に $(x+a)(x-a)$ をかけると

$$1=k(x-a)+l(x+a)$$
$$1=kx-ka+lx+la$$
$$1=(k+l)x+(-ka+la)$$

これが，x についての恒等式であるから

$$\begin{cases}k+l=0 & \cdots①\\-ka+la=1 & \cdots②\end{cases}$$

①より，$l=-k$

これを②に代入して

$$-ka-ka=1$$
$$-2ka=1$$
$$k=-\frac{1}{2a}$$

これより，$l=\dfrac{1}{2a}$ であるから

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int \frac{1}{(x+a)(x-a)}\,dx \\
&= \int \left(-\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x+a}+\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{x-a}\right)dx \\
&= \frac{1}{2a}\int\left\{-\frac{(x+a)'}{x+a}+\frac{(x-a)'}{x-a}\right\}dx \\
&= \frac{1}{2a}\left(-\log|x+a|+\log|x-a|\right) \\
&= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| = \text{右辺}
\end{aligned}
$$

問 15 求める図形の面積を S とする．

（1） $\sqrt{1-x^2}$ は，偶関数であるから

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sin^{-1}\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}
$$

（2） $\sqrt{1-x^2}$ は，偶関数であるから

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

ここで，$x=\sin\theta$ とおくと，$dx=\cos\theta\,d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0 \to \frac{1}{2}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{6}$

よって

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta \quad \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}\text{で},\ \cos\theta\geqq0\right) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos2\theta)\,d\theta \\
&= \left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}
$$

問 16

$I=\int\sqrt{x^2+A}\,dx$ とおくと

$$
\begin{aligned}
I &= \int 1\cdot\sqrt{x^2+A}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+A}-\int x(\sqrt{x^2+A})'\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+A}-\int x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+A}}\cdot 2x\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{(x^2+A)-A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+A}-\left(\int\sqrt{x^2+A}\,dx-\int\frac{A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx\right) \\
&= x\sqrt{x^2+A}-I+A\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+A}-I+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|
\end{aligned}
$$

よって，$2I=x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$ であるから

$$
\boldsymbol{I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)}
$$

問 17

（1）

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_2^3\sqrt{(x-2)^2-4+5}\,dx \\
&= \int_2^3\sqrt{(x-2)^2+1}\,dx
\end{aligned}
$$

$x-2=t$ とおくと，$dx=dt$

また，x と t の対応は

x	$2 \to 3$
t	$0 \to 1$

よって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^1\sqrt{t^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+1}+\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(1\sqrt{1+1}+\log\left|1+\sqrt{1+1}\right|\right)\right. \\
&\qquad \left.-\left(\log\left|0+\sqrt{0+1}\right|\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\log\left|1+\sqrt{2}\right|-\log|1|\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\right\}}
\end{aligned}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_{-1}^0\sqrt{(x+1)^2-1+3}\,dx \\
&= \int_{-1}^0\sqrt{(x+1)^2+2}\,dx
\end{aligned}
$$

$x+1=t$ とおくと，$dx=dt$

また，x と t の対応は

x	$-1 \to 0$
t	$0 \to 1$

よって

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_0^1 \sqrt{t^2+2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+2}+2\log\left|t+\sqrt{t^2+2}\right|\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(1\sqrt{1+2}+2\log\left|1+\sqrt{1+2}\right|\right)\right. \\
&\qquad\left. -\left(2\log\left|0+\sqrt{0+2}\right|\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+2\log|1+\sqrt{3}|-2\log|\sqrt{2}|) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}+\log(1+\sqrt{3})-\log(\sqrt{2}) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}+\log\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}+\log\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_2^3 \sqrt{-(x^2-4x)}\,dx \\
&= \int_2^3 \sqrt{-(x-2)^2+4}\,dx \\
&= \int_2^3 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx
\end{aligned}$$

$x-2=t$ とおくと，$dx=dt$

また，x と t の対応は

x	$2 \to 3$
t	$0 \to 1$

よって

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_0^1 \sqrt{2^2-t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{4-t^2}+4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(1\sqrt{4-1}+4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)-4\sin^{-1}0\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+4\cdot\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_0^1 \sqrt{-(x^2+2x)+3}\,dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{-(x+1)^2+1+3}\,dx \\
&= \int_2^3 \sqrt{-(x+1)^2+4}\,dx \\
&= \int_2^3 \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx
\end{aligned}$$

$x+1=t$ とおくと，$dx=dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 2$

よって

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_1^2 \sqrt{2^2-t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[t\sqrt{4-t^2}+4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(2\sqrt{4-4}+4\sin^{-1}1\right)\right. \\
&\qquad\left. -\left(1\sqrt{4-1}+4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{4\cdot\frac{\pi}{2}-\left(\sqrt{3}+4\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(2\pi-\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}}
\end{aligned}$$

問 18

(1)

$$\begin{aligned}
与式 &= \frac{1}{2}\int\{\sin(4x+3x)-\sin(4x-3x)\}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int(\sin 7x-\sin x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x+\cos x\right) \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos x}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
与式 &= \frac{1}{2}\int\{\cos(3x+2x)+\cos(3x-2x)\}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x+\sin x\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
与式 &= -\frac{1}{2}\int\{\cos(3x+5x)-\cos(3x-5x)\}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int\{\cos 8x-\cos(-2x)\}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int(\cos 8x-\cos 2x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{1}{2}\sin 2x\right) \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x}
\end{aligned}$$

(4)

$$与式 = \int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$\sin x=t$ とおくと，$\cos x\,dx=dt$ であるから

$$\begin{aligned}
与式 &= \int\frac{dt}{1-t^2} \\
&= \int\frac{dt}{(1-t)(1+t)} \\
&= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt
\end{aligned}$$

（部分分数分解の過程は省略）

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(-\log|1-t|+\log|1+t|) \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \qquad （真数 > 0 より）
\end{aligned}$$

問 19

（1）　与式 $= \dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} = \boldsymbol{\dfrac{16}{35}}$

（2）　
$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x (1 - \sin^2 x)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x - \sin^6 x)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{3}{16}\pi - \frac{5}{32}\pi = \boldsymbol{\frac{1}{32}\pi}
\end{aligned}
$$

∎