4章　積分の応用

§1　面積・曲線の長さ・体積 (p.125〜p.126)

練習問題 1-A

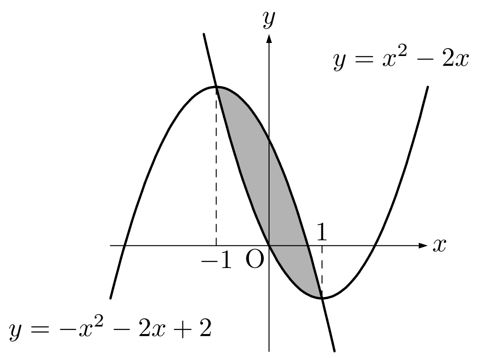
1. （1）　2つの放物線の交点の x 座標を求めると

$x^2-2x=-x^2-2x+2$ より

$2x^2=2$

$x^2=1$

よって，$x=\pm 1$



$-1 \leqq x \leqq 1$ において，$-x^2-2x+2 \geqq x^2-2x$ であるから，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-1}^{1}\{(-x^2-2x+2)-(x^2-2x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx$$
$$=-2\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx$$
$$=-4\int_{0}^{1}(x^2-1)\,dx$$
$$=-4\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1$$
$$=-4\left(\frac{1}{3}-1\right)$$
$$=-4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

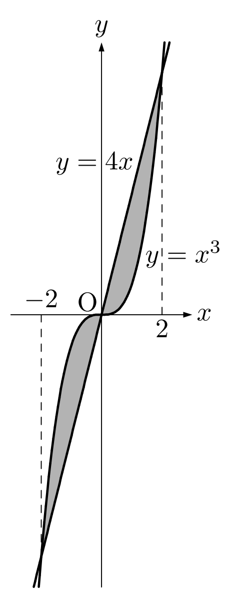
（2）　曲線と直線の交点の x 座標を求めると

$x^3=4x$ より

$x^3-4x=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

よって，$x=0,\ \pm 2$



2つの関数は奇関数であり，いずれのグラフも原点について対称であるから，求める面積は $0 \leqq x \leqq 2$ における面積の2倍である．

$0 \leqq x \leqq 2$ において，$4x \geqq x^3$ であるから，求める面積を S とすると

$$S=2\int_0^2(4x-x^3)\,dx$$
$$=2\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2$$
$$=2\left(2\cdot 2^2-\frac{1}{4}\cdot 2^4\right)$$
$$=2(8-4)=\boldsymbol{8}$$

2. （1）　$y=x^{\frac{1}{2}}$ より，$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから，点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式は

$$y-1=\frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1)$$
$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$$
$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+1$$
$$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$$

（2）　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} \geqq \sqrt{x}$ であるから，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\sqrt{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{3+6-8}{12}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

3.　$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ であるから，$y'=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

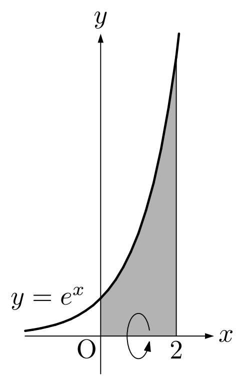
よって，求める曲線の長さは

$$l=\int_0^3\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,dx$$
$$=\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx$$
$$=\int_0^3(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$
$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}\right]_0^3$$
$$=\frac{2}{3}\{(1+3)\sqrt{1+3}-(1+0)\sqrt{1+0}\}$$
$$=\frac{2}{3}(8-1)=\boldsymbol{\frac{14}{3}}$$

4.　点 x における半円の面積は，$\dfrac{1}{2}\{x(1-x)\}^2\pi$ であるから，求める立体の体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \frac{1}{2}\{x(1-x)\}^2 \pi\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2(1-x)^2\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2(1-2x+x^2)\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^1 (x^2-2x^3+x^4)\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{10-15+6}{30} \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{30} = \boldsymbol{\frac{\pi}{60}}
\end{aligned}
$$

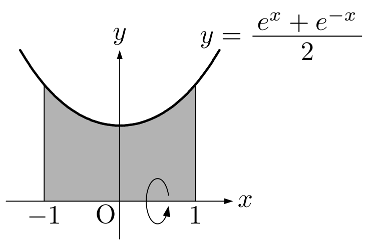
5. （1）



求める回転体の体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^2 (e^x)^2\, dx \\
&= \pi\int_0^2 e^{2x}\, dx \\
&= \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 \\
&= \frac{\pi}{2}(e^4-e^0) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}(e^4-1)}
\end{aligned}
$$

（2）



求める回転体の体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^1 \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx \\
&= \pi\int_{-1}^1 \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx \\
&= \pi\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}\, dx \\
&= \frac{\pi}{4}\int_{-1}^1 (e^{2x}+e^{-2x}+2)\, dx
\end{aligned}
$$

ここで，$f(x) = e^{2x}+e^{-2x}+2$ とおくと

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= e^{2\cdot(-x)}+e^{-2\cdot(-x)}+2 \\
&= e^{-2x}+e^{2x}+2 = f(x)
\end{aligned}
$$

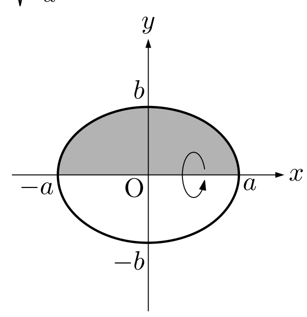
よって，$f(x)$ は偶関数であるから

$$
\begin{aligned}
V &= 2\cdot\frac{\pi}{4}\int_0^1 (e^{2x}+e^{-2x}+2)\, dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^{-2}+2\right)-\left(\frac{1}{2}e^0-\frac{1}{2}e^0+0\right)\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^{-2}+2\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}(e^2-e^{-2}+4)}
\end{aligned}
$$

6. （1）　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を y について解くと

$$
\begin{aligned}
\frac{y^2}{b^2} &= 1-\frac{x^2}{a^2} \\
y^2 &= b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \\
y^2 &= \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)
\end{aligned}
$$

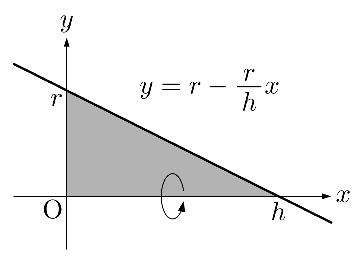
よって，$y = \pm\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}$



求める体積は，楕円の上半分 $y=\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積であるから，これを V とすると

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-a}^a y^2\, dx \\
&= \pi\int_{-a}^a \left\{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}\right\}^2 dx \\
&= \pi\int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\, dx \\
&= \frac{b^2\pi}{a^2}\int_{-a}^a (a^2-x^2)\, dx \\
&= \frac{2b^2\pi}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\, dx \\
&= \frac{2b^2\pi}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a \\
&= \frac{2b^2\pi}{a^2}\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right) \\
&= \frac{2b^2\pi}{a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi ab^2}
\end{aligned}
$$

（2）　与えられた直線は，切片が r で，$y=0$ のとき，$0 = r-\dfrac{r}{h}x$ より，$x=h$



よって，求める体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^h y^2\,dx \\
&= \pi \int_0^h \left(r - \frac{r}{h}x\right)^2\,dx \\
&= \pi \int_0^h \left(r^2 - \frac{2r^2}{h}x + \frac{r^2}{h^2}x^2\right)\,dx \\
&= \pi \left[r^2 x - \frac{r^2}{h}x^2 + \frac{r^2}{3h^2}x^3\right]_0^h \\
&= \pi\left(r^2h - r^2h + \frac{1}{3}r^2h\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^2 h}
\end{aligned}
$$

練習問題 1-B

1. $y' = 2x - 1$ であるから，点 $(0,\ 0)$ における接線の方程式は

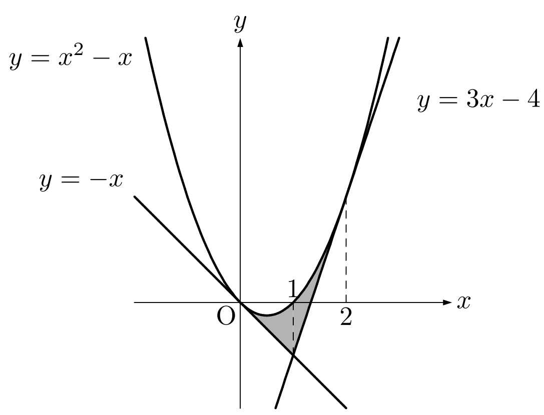
$$
\begin{aligned}
&y - 0 = (2\cdot 0 - 1)(x - 0) \\
&y = -x \cdots ①
\end{aligned}
$$

点 $(2,\ 2)$ における接線の方程式は

$$
\begin{aligned}
&y - 2 = (2\cdot 2 - 1)(x - 2) \\
&y - 2 = 3(x - 2) \\
&y = 3x - 6 + 2 \\
&y = 3x - 4 \cdots ②
\end{aligned}
$$

①と② の交点の x 座標を求めると

$$
\begin{aligned}
&-x = 3x - 4 \\
&-4x = -4 \\
&x = 1
\end{aligned}
$$



$0 \leqq x \leqq 1$ において，$x^2 - x \geqq -x$

$1 \leqq x \leqq 2$ において，$x^2 - x \geqq 3x - 4$

よって，求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \{(x^2 - x) - (-x)\}\,dx + \int_1^2 \{(x^2 - x) - (3x - 4)\}\,dx \\
&= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + \left\{\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2\cdot 2^2 + 4\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right)\right\} \\
&= \frac{1}{3} + \left(\frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{1}{3} + 2 - 4\right) \\
&= \frac{1}{3} + \left(\frac{7}{3} - 2\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

2. （1）

$$
\begin{aligned}
y' &= x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} \\
&= x - \frac{1}{4x}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
1 + (y')^2 &= 1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 \\
&= 1 + \left(x^2 - 2x\cdot\frac{1}{4x} + \frac{1}{16x^2}\right) \\
&= 1 + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} \\
&= x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} \\
&= \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2
\end{aligned}
$$

したがって，求める曲線の長さを l とすると

$$
\begin{aligned}
l &= \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2}\,dx \\
&= \int_1^2 \left|x + \frac{1}{4x}\right|dx
\end{aligned}
$$

$1 \leqq x \leqq 2$ において，$x + \dfrac{1}{4x} > 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
l &= \int_1^2 \left(x + \frac{1}{4x}\right)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\log|x|\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2^2 + \frac{1}{4}\log 2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{4}\log 1\right) \\
&= 2 + \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\log 2}
\end{aligned}
$$

（2）

$$y' = x$$

よって

$$1 + (y')^2 = 1 + x^2$$

したがって，求める曲線の長さを l とすると

$$
\begin{aligned}
l &= \int_0^2 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \\
&= \int_0^2 \sqrt{1 + x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + 1} + \log\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right|\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\{(2\sqrt{5} + \log|2 + \sqrt{5}|) - \log|\sqrt{1}|\} \\
&= \frac{1}{2}\{2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})\} \\
&= \boldsymbol{\sqrt{5} + \frac{1}{2}\log(2 + \sqrt{5})}
\end{aligned}
$$

（3）

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \\
y' &= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\
&= x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
1 + (y')^2 &= 1 + x^2 \\
&= 1 + \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&= 1 + x - 2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}x^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1 + x - \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x^{-1} \\
&= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x^{-1} \\
&= \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2
\end{aligned}
$$

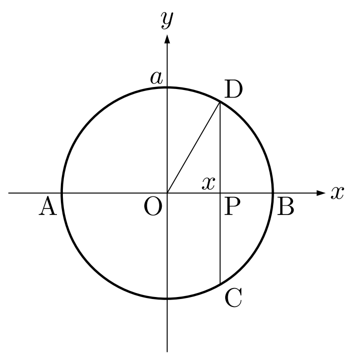
したがって，求める曲線の長さを l とすると

$$l=\int_1^4\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$
$$=\int_1^4\sqrt{\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^4\left|x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right|dx$$

$1\leqq x\leqq 4$ において，$x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}>0$ であるから

$$l=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}\cdot 2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$
$$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right]_1^4$$
$$=\left(\frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4}+\frac{1}{2}\sqrt{4}\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 1\sqrt{1}+\frac{1}{2}\sqrt{1}\right)$$
$$=\frac{16}{3}+1-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{32+6-4-3}{6}=\boldsymbol{\frac{31}{6}}$$

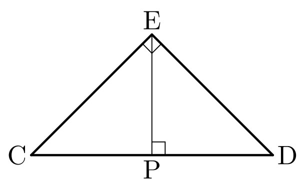
3.　立体の底面について，円の中心を原点として図のように座標軸を定める．



$\mathrm{P}(x,\ 0)$　$(-a\leqq x\leqq a)$ とすれば，$\mathrm{OD}=a$ であるから

$$\mathrm{DP}=\sqrt{a^2-|x|^2}=\sqrt{a^2-x^2}$$

よって，$\mathrm{CD}=2\sqrt{a^2-x^2}$



$\triangle\mathrm{CDE}$ は直角二等辺三角形であるから，$\mathrm{EP}=\mathrm{DP}=\sqrt{a^2-x^2}$

よって

$$\triangle\mathrm{CDE}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{EP}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$$
$$=(\sqrt{a^2-x^2})^2=a^2-x^2$$

したがって，求める体積を V とすると

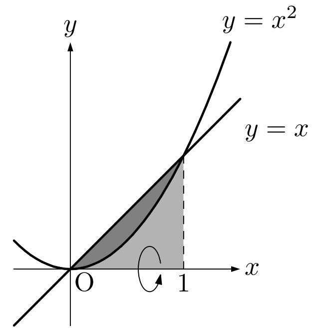
$$V=\int_{-a}^a(a^2-x^2)\,dx$$
$$=2\int_0^a(a^2-x^2)\,dx$$
$$=2\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$
$$=2\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)$$
$$=2\cdot\frac{2}{3}a^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}a^3}$$

4.　放物線と直線の交点の x 座標を求めると

$x^2=x$ より

$x(x-1)=0$

よって，$x=0,\ 1$



求める立体の体積は，$0\leqq x\leqq 1$ において，$y=x$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させた立体から，$y=x^2$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させた立体を取り除けばよいので，求める体積を V とすると

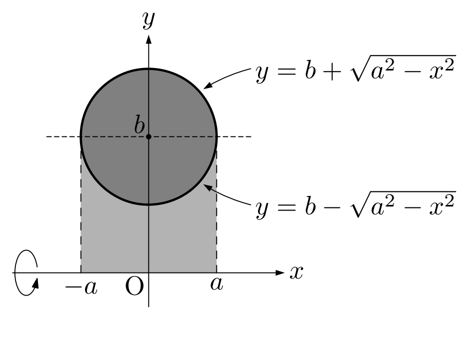
$$V=\pi\int_0^1x^2\,dx-\pi\int_0^1(x^2)^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^1x^2\,dx-\pi\int_0^1x^4\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1-\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{5}\pi=\boldsymbol{\frac{2}{15}\pi}$$

5.　円の方程式を y について解くと

$$(y-b)^2=a^2-x^2$$
$$y-b=\pm\sqrt{a^2-x^2}$$

$y-b\geqq 0$ すなわち，$y\geqq b$ のとき，$y=b+\sqrt{a^2-x^2}$

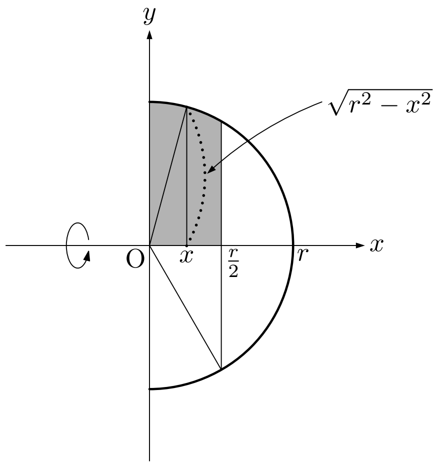
$y-b<0$ すなわち，$y<b$ のとき，$y=b-\sqrt{a^2-x^2}$



4. と同様に考えて，求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_{-a}^a(b+\sqrt{a^2-x^2})^2\,dx-\pi\int_{-a}^a(b-\sqrt{a^2-x^2})^2\,dx$$
$$=\pi\int_{-a}^a\{(b+\sqrt{a^2-x^2})^2-(b-\sqrt{a^2-x^2})^2\}\,dx$$
$$=\pi\int_{-a}^a\{(b+\sqrt{a^2-x^2})+(b-\sqrt{a^2-x^2})\}$$
$$\times\{(b+\sqrt{a^2-x^2})-(b-\sqrt{a^2-x^2})\}\,dx$$
$$=\pi\int_{-a}^a2b\cdot 2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$$=4\pi b\int_{-a}^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$$=8\pi b\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$$=8\pi b\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$
$$=4\pi b\cdot a^2\sin^{-1}1=4\pi b\cdot a^2\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{2\pi^2a^2b}$$

6. 半球をもとにもどし，図のように座標軸を定める．



求める体積は，影をつけた部分の図形を x 軸のまわりに回転させた立体の体積である．

点 x において，$y=\sqrt{r^2-x^2}$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{r}{2}\right)$ であるから，求める体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\frac{r}{2}} (\sqrt{r^2-x^2})^2\,dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{r}{2}} (r^2-x^2)\,dx \\
&= \pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{r}{2}} \\
&= \pi\left\{r^2\cdot\frac{r}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{r}{2}\right)^3\right\} \\
&= \pi\left(\frac{1}{2}r^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}r^3\right) \\
&= \pi\left(\frac{1}{2}r^3-\frac{1}{24}r^3\right) = \boldsymbol{\frac{11}{24}\pi r^3}
\end{aligned}
$$

∎