練習問題 2-A

1.　求める面積を S とする.

（1）　$\dfrac{dx}{dt} = -\sin t$

求める面積は，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における図形の面積の 4 倍であり，この区間では，$-\sin t \leqq 0$ で，符号は一定であるから

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2t \cdot (-\sin t)|\,dt$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |-(2\sin t\cos t)\cdot \sin t|\,dt$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} |-\sin^2 t\cos t|\,dt$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$において，$-\sin^2 t\cos t \leqq 0$ であるから

$$S = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\,dt$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos t\,dt$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \cos^3 t)\,dt$$
$$= 8\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\,dt\right)$$
$$= 8\left(\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\right)$$
$$= 8\left(1 - \frac{2}{3}\right)$$
$$= 8\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$$

（2）　求める面積は，曲線と，$\theta = 0$，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ で囲まれた部分の面積の 12 倍であるから

$$S = 12\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2\,d\theta$$
$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 3\theta)^2\,d\theta$$
$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 3\theta\,d\theta$$

$3\theta = t$ とおくと，$3d\theta = dt$ より，$d\theta = \dfrac{1}{3}dt$

また，θ と t の対応は

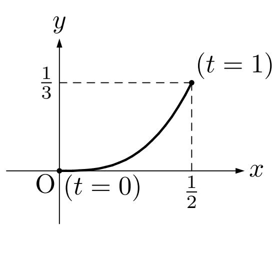
θ	$0 \;\to\; \frac{\pi}{6}$
t	$0 \;\to\; \frac{\pi}{2}$

よって

$$S = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\cdot\frac{1}{3}\,dt$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt$$
$$= 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{8}\pi}$$

2.　それぞれの曲線の長さを l とする.

（1）



$$\frac{dx}{dt} = t$$
$$\frac{dy}{dt} = t^2$$

よって

$$l = \int_0^1 \sqrt{t^2 + (t^2)^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 \sqrt{t^2 + t^4}\,dt$$
$$= \int_0^1 |t|\sqrt{1+t^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt \quad (t \geqq 0 \text{ より})$$

$\sqrt{1+t^2} = u$ とおくと，$1 + t^2 = u^2$ より，$2t\,dt = 2u\,du$

すなわち，$t\,dt = u\,du$

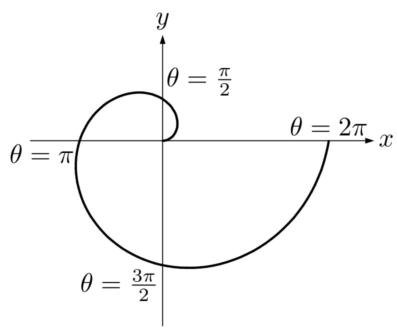
また，t と u の対応は

t	$0 \;\to\; 1$
u	$1 \;\to\; \sqrt{2}$

したがって

$$l = \int_1^{\sqrt{2}} u\cdot u\,du$$
$$= \int_1^{\sqrt{2}} u^2\,du$$
$$= \left[\frac{1}{3}u^3\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)}$$

（2）

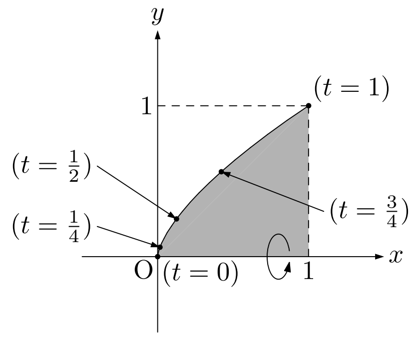


$r' = 1$ であるから

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\,d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(\theta\sqrt{\theta^2+1} + \log\left|\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right|\right)\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \log\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right|\right) - \frac{1}{2}(0 + \log 1)$$
$$= \pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\log\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right|$$
$$= \boldsymbol{\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\log(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})}$$

3.　t にいろいろな値を代入すると

t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
x	0	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{27}{64}$	1
y	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	1



$\dfrac{dx}{dt} = 3t^2 \geqq 0$

よって，求める体積を V とすると

$$V = \pi\int_0^1 y^2\left|\frac{dx}{dt}\right|dt$$
$$= \pi\int_0^1 (t^2)^2|\,3t^2\,|\,dt$$
$$= 3\pi\int_0^1 t^6\,dt$$
$$= 3\pi\left[\frac{1}{7}t^7\right]_0^1$$
$$= 3\pi\cdot\frac{1}{7} = \boldsymbol{\frac{3}{7}\pi}$$

4. （1） $$与式 = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}\,dx$$

$-x^2 = t$ とおくと，$-2x\,dx = dt$ より，$x\,dx = -\dfrac{1}{2}\,dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to b$
t	$0 \to -b^2$

よって

$$与式 = \lim_{b\to\infty}\int_0^{-b^2} e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b^2} e^t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_{-b^2}^0 e^t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\Big[\,e^t\,\Big]_{-b^2}^0$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(e^0 - e^{-b^2})$$
$$= \frac{1}{2}(1-0) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

〔別解〕 （先に置換積分）

$-x^2 = t$ とおくと，$-2x\,dx = dt$ より，$x\,dx = -\dfrac{1}{2}\,dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to \infty$
t	$0 \to -\infty$

よって

$$与式 = \int_0^{-\infty} e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to-\infty}\int_b^0 e^t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to-\infty}\Big[\,e^t\,\Big]_b^0$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to-\infty}(e^0 - e^b)$$
$$= \frac{1}{2}(1-0) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（2） $$与式 = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$\sqrt{a^2-x^2} = t$ とおくと，$a^2 - x^2 = t^2$ であるから，$-2x\,dx = 2t\,dt$ より，$x\,dx = -t\,dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to a-\varepsilon$
t	$a \to \sqrt{a^2-(a-\varepsilon)^2}$

ここで，$\sqrt{a^2-(a-\varepsilon)^2} = \sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}$ であるから

$$与式 = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{\sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}}\frac{1}{t}\cdot(-t\,dt)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\int_a^{\sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}}dt\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}}^a dt$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\,t\,\Big]_{\sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}}^a$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(a-\sqrt{2a\varepsilon-\varepsilon^2}) = \boldsymbol{a}$$

〔別解〕 （先に置換積分）

$\sqrt{a^2-x^2} = t$ とおくと，$a^2 - x^2 = t^2$ であるから，$-2x\,dx = 2t\,dt$ より，$x\,dx = -t\,dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to a$
t	$a \to 0$

よって

$$与式 = \int_a^0 \frac{1}{t}\cdot(-t\,dt)$$
$$= \int_0^a dt$$
$$= \Big[\,t\,\Big]_0^a$$
$$= a - 0 = \boldsymbol{a}$$

（3） $$与式 = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log x\,dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[x\log x - x\Big]_\varepsilon^1$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\{-1-(\varepsilon\log\varepsilon-\varepsilon)\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(-1-\varepsilon\log\varepsilon+\varepsilon)$$

ここで，ロピタルの定理より

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{(\log\varepsilon)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon) = 0$$

よって，与式 $= -1 - 0 + 0 = \boldsymbol{-1}$

（4） $$与式 = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{\log x}{x}\,dx$$

$\log x = t$ とおくと，$\dfrac{1}{x}\,dx = dt$

また，x と t の対応は

x	$\varepsilon \to 1$
t	$\log\varepsilon \to 0$

よって

$$\text{与式} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\log \varepsilon}^{0} t\,dt$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\log \varepsilon}^{0}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{-\frac{1}{2}(\log \varepsilon)^2\right\} = -\infty$$

したがって，広義積分は存在しない．

〔別解〕　（先に置換積分）

$\log x = t$ とおくと，$\dfrac{1}{x}\,dx = dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \quad \to \quad 1$
t	$-\infty \quad \to \quad 0$

よって

$$\text{与式} = \int_{-\infty}^{0} t\,dt$$
$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} t\,dt$$
$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{a}^{0}$$
$$= \lim_{a \to -\infty} \left(-\frac{1}{2}a^2\right) = -\infty$$

したがって，広義積分は存在しない．

5. （1）　時刻 t における点 P の速度を $v(t)$，座標を $x(t)$ とすると

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)\,dt$$
$$= 8 + \int_0^t (12 - 8t)\,dt$$
$$= 8 + 12t - 4t^2$$

ここで，速度が 0 になるのは，$12 - 8t = 0$ より，$t = \dfrac{3}{2}$ のときであるから，$t = \dfrac{3}{2}$ における点 P の座標は

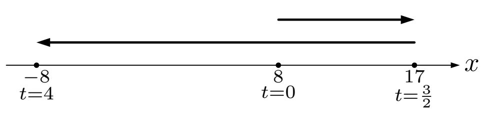
$$x\left(\frac{3}{2}\right) = 8 + 12 \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$= 8 + 18 - 9 = \mathbf{17}$$

（2）　$t = 4$ における点 P の座標は

$$x(4) = 8 + 12 \cdot 4 - 4 \cdot 4^2$$
$$= 8 + 48 - 64 = -8$$

$v(t) \geqq 0$，すなわち $0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}$ のときに点 P が動いた道のりは，$|17 - 8| = 9$

$v(t) < 0$，すなわち $\dfrac{3}{2} < t \leqq 4$ のときに点 P が動いた道のりは，$|-8 - 17| = 25$



よって，点 P が実際に動いた道のりは，$9 + 25 = \mathbf{34}$

〔別解〕

道のりは，$\displaystyle\int_0^4 |v(t)|\,dt$ で求められる．

$v(t) = 12 - 8t$ であるから

$0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，$|v(t)| = 12 - 8t$

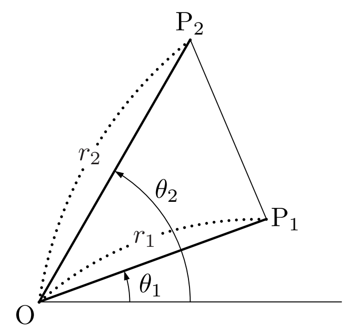
$\dfrac{3}{2} < t \leqq 4$ のとき，$|v(t)| = -(12 - 8t)$

よって，求める道のりは

$$\int_0^4 |v(t)|\,dt = \int_0^{\frac{3}{2}} (12 - 8t)\,dt + \int_{\frac{3}{2}}^{4} \{-(12 - 8t)\}\,dt$$
$$= 4\int_0^{\frac{3}{2}} (3 - 2t)\,dt - 4\int_{\frac{3}{2}}^{4} (3 - 2t)\,dt$$
$$= 4\left[3t - t^2\right]_0^{\frac{3}{2}} - 4\left[3t - t^2\right]_{\frac{3}{2}}^{4}$$
$$= 4\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right)$$
$$- 4\left\{(12 - 16) - \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right)\right\}$$
$$= 4 \cdot \frac{9}{4} - 4\left(-4 - \frac{9}{4}\right)$$
$$= 9 + 16 + 9 = \mathbf{34}$$

練習問題 1-B

1. （1）



$\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ において，余弦定理により

$$(\mathrm{P_1P_2})^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos\{-(\theta_1 - \theta_2)\}$$
$$= {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$\mathrm{P_1P_2} > 0$ であるから

$$\mathrm{P_1P_2} = \sqrt{\mathrm{r_1}^2 + \mathrm{r_2}^2 - 2\mathrm{r_1r_2}\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

〔別解〕

極座標を直交座標で表すと

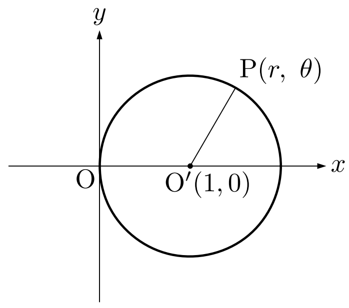
$\mathrm{P_1}(r_1\cos\theta_1,\ r_1\sin\theta_1)$

$\mathrm{P_2}(r_2\cos\theta_2,\ r_2\sin\theta_2)$

よって

$$\mathrm{P_1P_2} = \sqrt{(r_1\cos\theta_1 - r_2\cos\theta_2)^2 + (r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2)^2}$$
$$= \sqrt{({r_1}^2\cos^2\theta_1 - 2r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + {r_2}^2\cos^2\theta_2) + ({r_1}^2\sin^2\theta_1 - 2r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2 + {r_2}^2\sin^2\theta_2)}$$
$$= \sqrt{{r_1}^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) + {r_2}^2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2) - 2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)}$$
$$= \sqrt{{r_1}^2 \cdot 1 + {r_2}^2 \cdot 1 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$
$$= \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

（2）　図のように，$\mathrm{O}'(1,\ 0)$ とする．



PO$'=1$ であるから,（1）より

$$\mathrm{PO}'=\sqrt{r^2+1^2-2\cdot r\cdot 1\cos(\theta-0)}$$
$$=\sqrt{r^2+1-2r\cos\theta}=1$$

よって

$$r^2+1-2r\cos\theta=1$$
$$r^2-2r\cos\theta=0$$
$$r(r-2\cos\theta)=0$$

これより，$r=0\cdots$① または，$r=2\cos\theta\cdots$②

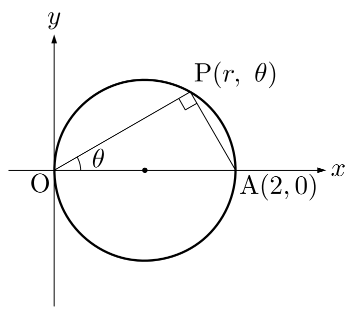
ここで，② において，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ とすれば，$r=0$ となるので，② は，① の条件を含む.

よって，$\boldsymbol{r=2\cos\theta}$

逆にこの式を満たす点は，円周上にある.

〔別解〕

図のように，A$(2,\ 0)$ とする.



△OAP において，∠OPA $=90^\circ$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}=\frac{r}{2}$$

すなわち，$\boldsymbol{r=2\cos\theta}$

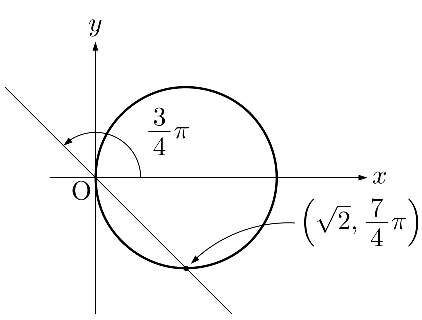
逆にこの式を満たす点は，円周上にある.

※ 補足

$r=2\cos\vartheta$ において, 例えば $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ とすると, $r=-\sqrt{2}$ となり，$r<0$ となってしまいます。

このとき，点 $(r,\ \theta)$ は，点 $(-r,\ \theta+\pi)$ を表すと約束することがあります。この場合では

$$\left(-\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)\longrightarrow\left(\sqrt{2},\ \frac{7}{4}\pi\right)$$

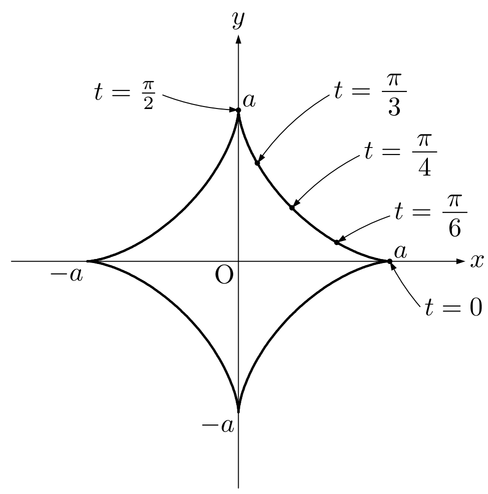


2. t のいろいろな値に対する $x,\ y$ の値を求めると

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x	a	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{1}{8}a$	0
		$0.65a$	$0.35a$	$0.13a$	
y	0	$\frac{1}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	a
		$0.13a$	$0.35a$	$0.65a$	

t	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	$-\frac{1}{8}a$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$-a$
	$-0.13a$	$-0.35a$	$-0.65a$	
y	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{1}{8}a$	0
	$0.65a$	$0.35a$	$0.13a$	

※ $\pi<t\leqq 2\pi$ は省略.



（1） 求める面積を S とする.

$$\frac{dx}{dt}=3a\cos^2t\cdot(-\sin t)=-3a\cos^2t\sin t$$

求める面積は，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における図形の面積の 4 倍であり，この区間では，$-3a\cos^2t\sin t\leqq 0$ で，符号は一定であるから

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|a\sin^3t\cdot(-3a\cos^2t\sin t)\right|dt$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|-3a^2\sin^4t\cos^2t\right|dt$$
$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|-a^2\sin^4t\cos^2t\right|dt$$

$-a^2\sin^4t\cos^2t\leqq 0$ であるから

$$S=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^4t\cos^2t\,dt$$
$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t(1-\sin^2t)\,dt$$
$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t-\sin^6t)\,dt$$
$$=12a^2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=12a^2\left(\frac{3}{16}\pi-\frac{5}{32}\pi\right)$$
$$=12a^2\cdot\frac{1}{32}\pi=\boldsymbol{\frac{3}{8}\pi a^2}$$

（2） 求める曲線の長さを l とする.

$$\frac{dx}{dt}=3a\cos^2t\cdot(-\sin t)=-3a\cos^2t\sin t$$
$$\frac{dy}{dt}=3a\sin^2t\cdot cost=3a\sin^2t\cos t$$

求める曲線の長さは，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における曲線の長さ 4 倍であるから

$$l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2a\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}\,dt$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\,3a\cos t\sin t\,|\,dt$$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で，$3a\cos t\sin t\geqq 0$ であるから

$$l=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt$$
$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2t}{2}\,dt$$
$$=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$$
$$=6a\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-3a(\cos\pi-\cos 0)$$
$$=-3a(-1-1)=\boldsymbol{6a}$$

（3） 求める体積を V とする．

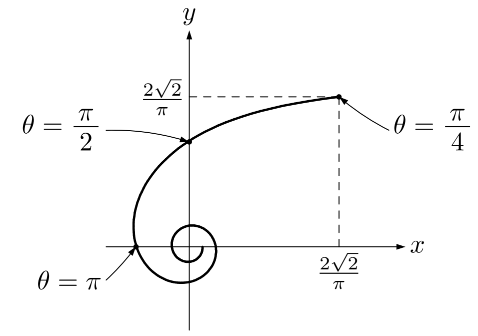
$$\frac{dx}{dt}=3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)=-3a\cos^2 t\sin t$$

求める体積は，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における曲線を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積の 2 倍であり，この区間では，$-3a\cos^2 t\sin t\leqq 0$ で，符号は一定であるから

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\left|\frac{dx}{dt}\right|dt$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^3 t)^2|-3a\cos^2 t\sin t\,|\,dt$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^6 t\cdot(3a\cos^2 t\sin t)\,dt$$
$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 t\,dt$$
$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t(1-\sin^2 t)\,dt$$
$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t-\sin^9 t)\,dt$$
$$=6\pi a^3\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)$$
$$=6\pi a^3\left(\frac{16}{35}-\frac{128}{315}\right)$$
$$=6\pi a^3\cdot\frac{16}{315}=\boldsymbol{\frac{32}{105}\pi a^3}$$

3. （1） θ のいろいろな値に対する r の値を求めると

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
r	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$
	1.27	0.63	0.32	0.21	0.16	0.13	0.11	0.09	0.08



（2） 曲線の長さを l とする．

$r'=-\dfrac{1}{\theta^2}$ であるから

$$r^2+(r')^2=\left(\frac{1}{\theta}\right)^2+\left(-\frac{1}{\theta^2}\right)^2$$
$$=\frac{\theta^2+1}{\theta^4}$$

よって

$$l=\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\sqrt{\frac{\theta^2+1}{\theta^4}}\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\frac{1}{\theta^2}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\left(-\frac{1}{\theta}\right)'\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta$$
$$=\left[-\frac{1}{\theta}\sqrt{\theta^2+1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\left(-\frac{1}{\theta}\right)(\sqrt{\theta^2+1})'\,d\theta$$
$$=\left[-\frac{1}{\theta}\sqrt{\theta^2+1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}\cdot 2\theta\,d\theta$$
$$=\left[-\frac{1}{\theta}\sqrt{\theta^2+1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}\,d\theta$$
$$=\left[-\frac{1}{\theta}\sqrt{\theta^2+1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}+\left[\log\left|\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{4\pi}$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\sqrt{16\pi^2+1}+\frac{1}{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}$$
$$+\log\left|4\pi+\sqrt{16\pi^2+1}\right|-\log\left|\frac{\pi}{4}+\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}\right|$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{4\pi}\sqrt{16\pi^2+1}+\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}}$$
$$\boldsymbol{+\log(4\pi+\sqrt{16\pi^2+1})-\log\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}\right)}$$

4. i）$k=1$ のとき

$$与式=\int_0^1\frac{dx}{x}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\log|x|\Big]_\varepsilon^1$$
$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\log\varepsilon)=\infty$$

よって，この広義積分は存在しない．

ii）$k\neq 1$ のとき

$$\text{与式} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^k}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{1} x^{-k}\,dx$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{1}{1-k} x^{1-k} \right]_{\varepsilon}^{1}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{1-k}(1-\varepsilon^{1-k})$$

ここで，$1-k<0$，すなわち $k>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-k} = \infty$ であるから

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{1-k}(1-\varepsilon^{1-k}) = \infty$$

$1-k>0$，すなわち，$k<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-k} = 0$ であるから

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{1-k}(1-\varepsilon^{1-k}) = \frac{1}{1-k}$$

よって，$0<k<1$ のとき，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{1-k}$

$k \geqq 1$ のとき，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^k} = \infty$ であるから，積分の値は存在しない．

※ $k \leqq 0$ のときは，普通の積分になる．

5. i）$k=1$ のとき

$$\text{与式} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$
$$= \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x}$$
$$= \lim_{b \to \infty} \Big[\log|x| \Big]_1^{b}$$
$$= \lim_{b \to \infty} \log b = \infty$$

よって，この広義積分は存在しない．

ii）$k \neq 1$ のとき

$$\text{与式} = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^k}$$
$$= \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} x^{-k}\,dx$$
$$= \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{1-k} x^{1-k} \right]_1^{b}$$
$$= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{1-k}(b^{1-k}-1)$$

ここで，$1-k<0$，すなわち $k>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{b \to \infty} b^{1-k} = 0$ であるから

$$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{1-k}(b^{1-k}-1) = \frac{1}{1-k} \cdot (-1) = \frac{1}{k-1}$$

$1-k>0$，すなわち，$k<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{b \to \infty} b^{1-k} = \infty$ であるから

$$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{1-k}(b^{1-k}-1) = \infty$$

よって，$k>1$ のとき，$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{k-1}$

$0<k \leqq 1$ のとき，$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \infty$ であるから，積分の値は存在しない．

※ $k \leqq 0$ のときは，積分の値は存在しない．

∎