4章　積分の応用

§2　いろいろな応用 (p.127〜p.141)

問 1　求める面積を S とする．

（1）　$\dfrac{dx}{dt} = 2t$

$0 < t < 1$ において，$2t > 0$ で，符号は一定であるから

$$S = \int_0^1 |\, t(1-t)\cdot 2t \,|\, dt$$
$$= 2\int_0^1 |\, t^2(1-t) \,|\, dt$$

$0 \leqq t \leqq 1$ において，$t^2(1-t) \geqq 0$ であるから

$$S = 2\int_0^1 t^2(1-t)\, dt$$
$$= 2\int_0^1 (t^2 - t^3)\, dt$$
$$= 2\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

（2）　$\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t$

$0 < t < \pi$ において，$-a\sin t < 0$ で，符号は一定である．
また，この半円は y 軸に関して対称だから

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, a\sin t(-a\sin t) \,|\, dt$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, -a^2\sin^2 t \,|\, dt$$

$0 \leqq t \leqq \pi$において，$-a^2\sin^2 t \leqq 0$ であるから

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\, dt$$
$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$$
$$= 2a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\pi a^2}$$

問 2　求める曲線の長さを l とする．

（1）　$\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t$

$\dfrac{dy}{dt} = a\cos t$

よって

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} |\, a \,|\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} a\, dt \qquad (a > 0 \text{ より})$$
$$= \Big[\, at \,\Big]_0^{2\pi} = \boldsymbol{2\pi a}$$

（2）　$\dfrac{dx}{dt} = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t)$

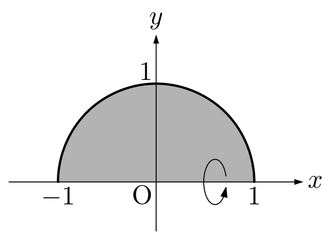
$\dfrac{dy}{dt} = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t + \cos t)$

よって

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2}\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{2t}\cdot 2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{2t}}\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}e^t\, dt$$
$$= \sqrt{2}\Big[\, e^t \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^0\right) = \boldsymbol{\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)}$$

問 3

求める体積を V とする．

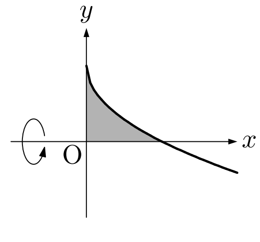


$0 < t < \pi$ において，$\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t < 0$ で，符号は一定である．
また，この半円は y 軸に関して対称だから

$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin t)^2 |\, -a\sin t \,|\, dt$$
$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^3 t\, dt$$
$$= 2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\, dt$$
$$= 2\pi a^3 \cdot \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

問 4

求める体積を V とする．



$0 < t < 1$ において，$\dfrac{dx}{dt} = 2t > 0$ で，符号は一定である．

$$V = \pi\int_0^1 (1-t)^2 |\, 2t \,|\, dt$$
$$= 2\pi\int_0^1 t(1-t)^2\, dt$$
$$= 2\pi\int_0^1 (t^3 - 2t^2 + t)\, dt$$
$$= 2\pi\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$
$$= 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\pi \cdot \frac{1}{12} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

問 5

（1）
$$\begin{aligned} x &= 2\cdot\cos\frac{\pi}{6} \\ &= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ y &= 2\cdot\sin\frac{\pi}{6} \\ &= 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$
よって，$\boldsymbol{(\sqrt{3},\ 1)}$

（2）
$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}\cdot\cos\pi \\ &= \sqrt{2}\cdot(-1) = -\sqrt{2} \\ y &= \sqrt{2}\cdot\sin\pi \\ &= \sqrt{2}\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$
よって，$\boldsymbol{(-\sqrt{2},\ 0)}$

（3）
$$\begin{aligned} x &= 3\cdot\cos\frac{3}{2}\pi \\ &= 3\cdot 0 = 0 \\ y &= 3\cdot\sin\frac{3}{2}\pi \\ &= 3\cdot(-1) = -3 \end{aligned}$$
よって，$\boldsymbol{(0,\ -3)}$

問 6

（1）
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$
また，$\cos\theta = \frac{1}{2}$，　$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\theta = \frac{\pi}{3}$

よって，$\boldsymbol{\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)}$

（2）
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$
また，$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$，　$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ より

$\theta = -\frac{\pi}{4}$

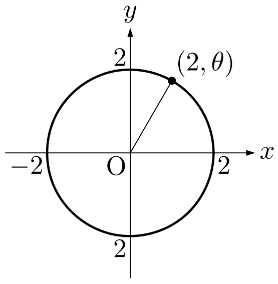
よって，$\boldsymbol{\left(\sqrt{2},\ -\frac{\pi}{4}\right)}$，または，$\boldsymbol{\left(\sqrt{2},\ \frac{7}{4}\pi\right)}$

（3）
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} \\ &= \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$
また，$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，　$\sin\theta = \frac{1}{2}$ より，$\theta = \frac{5}{6}\pi$

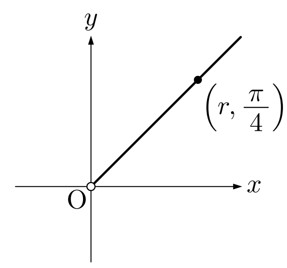
よって，$\boldsymbol{\left(2,\ \frac{5}{6}\pi\right)}$

問 7

（1）　任意の θ について，$r=2$ であるから，**原点を中心とする半径 2 の円**を表す．



（2）　任意の $r\,(>0)$ について，$\theta = \frac{\pi}{4}$ であるから，**原点を通り x 軸の正の向きとのなす角が $\frac{\pi}{4}$ である半直線**を表す．

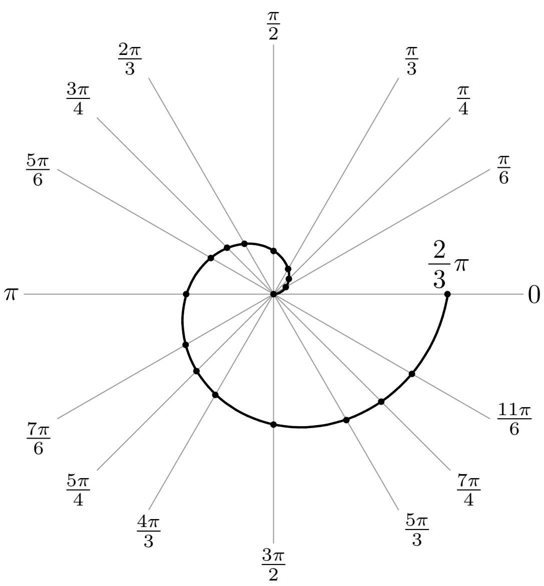


問 8

（1）　θ のいろいろな値に対する r の値を求めると

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$
	0	0.17	0.26	0.35	0.52	0.70	0.79	0.87	1.05

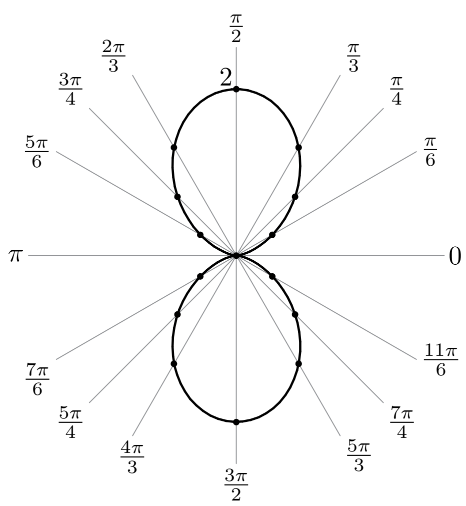
θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{3}$
	1.22	1.31	1.40	1.57	1.75	1.83	1.92	2.09



（2）　θ のいろいろな値に対する r の値を求めると

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0



問 9 それぞれの図形の面積を S とする．

（1）
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}r^2\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}4\theta^2\,d\theta\\&=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\theta^2\,d\theta\\&=2\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\&=\frac{2}{3}\left\{\pi^3-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right\}\\&=\frac{2}{3}\left(\pi^3-\frac{\pi^3}{8}\right)\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}\pi^3=\boldsymbol{\frac{7}{12}\pi^3}\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}r^2\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(e^{-\theta})^2\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{-2\theta}\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2\theta}\right]_0^{\pi}\\&=-\frac{1}{4}(e^{-2\pi}-e^0)\\&=-\frac{1}{4}(e^{-2\pi}-1)=\boldsymbol{\frac{1}{4}(1-e^{-2\pi})}\end{aligned}$$

（3） 求める面積は，曲線と，$\theta=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ で囲まれた部分の面積の 8 倍であるから
$$\begin{aligned}S&=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\,d\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2\theta)^2\,d\theta\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2\theta\,d\theta\end{aligned}$$
$2\theta=t$ とおくと，$2d\theta=dt$ より，$d\theta=\dfrac{1}{2}dt$

また，θ と t の対応は

θ	$0\ \to\ \frac{\pi}{4}$
t	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$

よって
$$\begin{aligned}S&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\frac{1}{2}\,dt\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt\\&=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

問 10 それぞれの曲線の長さを l とする．

（1） $r'=\cos\theta-\sin\theta$ であるから
$$\begin{aligned}r^2+(r')^2&=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2\\&=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&\qquad+\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta\\&=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2\end{aligned}$$
よって
$$\begin{aligned}l&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sqrt{2}\,d\theta\\&=\sqrt{2}\Big[\,\theta\,\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\\&=\sqrt{2}\left\{\frac{3}{4}\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\&=\sqrt{2}\cdot\pi=\boldsymbol{\sqrt{2}\pi}\end{aligned}$$

（2） $r'=3\sin^2\dfrac{\theta}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{\theta}{3}=\sin^2\dfrac{\theta}{3}\cos\dfrac{\theta}{3}$ であるから
$$\begin{aligned}r^2+(r')^2&=\left(\sin^3\frac{\theta}{3}\right)^2+\left(\sin^2\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}\right)^2\\&=\sin^6\frac{\theta}{3}+\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}\\&=\sin^4\frac{\theta}{3}\left(\sin^2\frac{\theta}{3}+\cos^2\frac{\theta}{3}\right)\\&=\sin^4\frac{\theta}{3}\end{aligned}$$
よって
$$\begin{aligned}l&=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta\\&=\int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^4\frac{\theta}{3}}\,d\theta\\&=\int_0^{3\pi}\left|\sin^2\frac{\theta}{3}\right|d\theta\\&=\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}\,d\theta\qquad\left(\sin^2\frac{\theta}{3}\geqq 0\text{ より}\right)\end{aligned}$$
$\dfrac{\theta}{3}=t$ とおくと，$\dfrac{1}{3}\,d\theta=dt$ より，$d\theta=3\,dt$

また，θ と t の対応は

θ	$0\ \to\ 3\pi$
t	$0\ \to\ \pi$

よって
$$\begin{aligned}l&=\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot 3\,dt\\&=3\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt\\&=3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 t\,dt\right)\\&=3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt\right)\qquad(\text{p.114 }\ \textbf{5.}\text{より})\\&=3\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt\\&=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}\end{aligned}$$

問 11

（1）
$$\begin{aligned}\text{与式}&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[2\sqrt{x+1}\Big]_{-1+\varepsilon}^{0}\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}2(\sqrt{1}-\sqrt{-1+\varepsilon+1})\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}2(1-\sqrt{\varepsilon})\\&=2(1-0)=\boldsymbol{2}\end{aligned}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = \Big[2\sqrt{x+1}\Big]_{-1}^{0}$$
$$= 2(\sqrt{1} - \sqrt{0})$$
$$= 2(1-0) = \mathbf{2}$$

（2） $$\text{与式} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^{1-\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \{-2(\sqrt{1-(1-\varepsilon)} - \sqrt{1})\}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \{-2(\sqrt{\varepsilon} - 1)\}$$
$$= -2(0-1) = \mathbf{2}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = \Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^{1}$$
$$= -2(\sqrt{0} - \sqrt{1})$$
$$= -2(0-1) = \mathbf{2}$$

（3） $$\text{与式} = \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ \varepsilon' \to +0}} \int_{-2+\varepsilon}^{2-\varepsilon'} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ \varepsilon' \to +0}} \Big[\sin^{-1}\frac{x}{2}\Big]_{-2+\varepsilon}^{2-\varepsilon'}$$
$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ \varepsilon' \to +0}} \left\{\sin\frac{1}{2}(2-\varepsilon') - \sin\frac{1}{2}(-2+\varepsilon)\right\}$$
$$= \sin^{-1}1 - \sin^{-1}(-1)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\pi}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = \Big[\sin^{-1}\frac{x}{2}\Big]_{-2}^{2}$$
$$= \sin^{-1}\frac{2}{2} - \sin^{-1}\frac{-2}{2}$$
$$= \sin^{-1}1 - \sin^{-1}(-1)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\pi}$$

問 12

求める面積を S とすると

$$S = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$$= 2\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$
$$= a^2\sin^{-1}1 - a^2\sin^{-1}0$$
$$= a^2\cdot\frac{\pi}{2} - a^2\cdot 0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}a^2}$$

問 13

（1） $$\text{与式} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^3}$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left\{-\frac{1}{2b^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^\infty$$
$$= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

（2） $$\text{与式} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-3x}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^b$$
$$= -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}(e^{-3b} - e^0)$$
$$= -\frac{1}{3}(0-1) = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^\infty$$
$$= -\frac{1}{3}(0-e^0)$$
$$= -\frac{1}{3}(0-1) = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

（3） $$\text{与式} = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b \frac{dx}{9+x^2}$$
$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\left[\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_a^b$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\left(\tan^{-1}\frac{b}{3} - \tan^{-1}\frac{a}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = \left[\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_{-\infty}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

問 14

この点の t 秒後の座標を $x(t)$ とすると

$$x(t) = 10 + \int_0^t 20\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)dt$$
$$= 10 + 20\left[\frac{1}{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^t$$
$$= 10 + 10\left\{\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{6}\right\}$$
$$= 10 + 10\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right) - 10\cdot\frac{1}{2}$$
$$\boldsymbol{= 5 + 10\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)}$$

問 15

（1） $-N'(t)$ が $N(t)$ に比例するので

$$-N'(t) = \lambda N(t)$$

$N(t)$ は原子の個数だから，$N(t) > 0$ なので，両辺を $-N(t)$ で割ると

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$$

この両辺を t で積分すると

$$\int \frac{N'(t)}{N(t)}\,dt = -\int \lambda\,dt$$
$$\log N(t) = -\lambda t + C$$

よって

$$N(t) = e^{-\lambda t + C}$$
$$= e^C e^{-\lambda t}$$

e^C は定数なので，これを C' とおくと，$N(t)=C'e^{-\lambda t}$

$t=0$ のとき，$N(t)=N_0$ であるから

$N_0=C'e^0$

$N_0=C'$

よって，$\boldsymbol{N(t)=N_0e^{-\lambda t}}\cdots$①

（2） $N(t)=\dfrac{1}{2}N_0$ となる時刻を求めればよいので，これを ① に代入して

$\dfrac{1}{2}N_0=N_0e^{-\lambda t}$

$N_0\fallingdotseq 0$ であるから，$e^{-\lambda t}=\dfrac{1}{2}$

よって，$-\lambda t=\log\dfrac{1}{2}=-\log 2$

したがって，$\boldsymbol{t=\dfrac{\log 2}{\lambda}}$

■