1章　関数の展開

BASIC

1（1）　$f(x)=e^{2x}\cos x$ とおくと

$$f'(x)=2e^{2x}\cos x+e^{2x}(-\sin x)$$
$$=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$$

したがって

$f(0)=1\cdot 1=1$

$f'(0)=1(2\cdot 1-0)=2$

以上より，$x=0$ における 1 次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)=1+2x$$

よって，$\boldsymbol{e^{2x}\cos x \fallingdotseq 1+2x}$

（2）　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$f'(x)=(x^{-1})'=-x^{-2}$$
$$=-\frac{1}{x^2}$$

したがって

$f(1)=\dfrac{1}{1}=1$

$f'(1)=-\dfrac{1}{1}=-1$

以上より，$x=1$ における 1 次近似式は

$$f(1)+f'(1)(x-1)=1+(-1)(x-1)$$
$$=1-x+1$$
$$=2-x$$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{1}{x}\fallingdotseq 2-x}$

2（1）　$f(x)=e^{3x}$ とおくと

$f'(x)=3e^{3x}$

$f''(x)=9e^{3x}$

したがって

$f(0)=1$

$f'(0)=3$

$f''(0)=9$

以上より，$x=0$ における 2 次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$
$$=1+3x+\frac{1}{2}\cdot 9x^2$$
$$=1+3x+\frac{9}{2}x^2$$

よって

$\boldsymbol{e^{3x}=1+3x+\dfrac{9}{2}x^2+\varepsilon_2}$　ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2}{x^2}=0$

（2）　$f(x)=x\sqrt{1+x}$ とおくと

$$f'(x)=\sqrt{1+x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$
$$=\frac{2(1+x)+x}{2\sqrt{1+x}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{1+x}}$$
$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{1+x}-(3x+2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$$
$$=\frac{6(1+x)-(3x+2)}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$$
$$=\frac{3x+4}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$$

したがって

$f(0)=0$

$f'(0)=\dfrac{2}{2}=1$

$f''(0)=\dfrac{4}{4}=1$

以上より，$x=0$ における 2 次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$
$$=0+x+\frac{1}{2}x^2$$
$$=x+\frac{1}{2}x^2$$

よって

$\boldsymbol{x\sqrt{1+x}=x+\dfrac{1}{2}x^2+\varepsilon_2}$　ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2}{x^2}=0$

（3）　$f(x)=\cos 2x$ とおくと

$f'(x)=-2\sin 2x$

$f''(x)=-4\cos 2x$

したがって

$f(0)=1$

$f'(0)=0$

$f''(0)=-4$

以上より，$x=0$ における 2 次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$
$$=1+0+\frac{1}{2}\cdot(-4)x^2$$
$$=1-2x^2$$

よって

$\boldsymbol{\cos 2x=1-2x^2+\varepsilon_2}$　ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2}{x^2}=0$

（4）　$f(x)=\log(1+2x)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{2}{1+2x}$$
$$f''(x)=-\frac{2(1+2x)'}{(1+2x)^2}$$
$$=-\frac{4}{(1+2x)^2}$$

したがって

$f(0)=\log 1=0$

$f'(0)=\dfrac{2}{1}=2$

$f''(0)=-\dfrac{4}{1}=-4$

以上より，$x=0$ における 2 次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$
$$=0+2x+\frac{1}{2}\cdot(-4)x^2$$
$$=2x-2x^2$$

よって

$\boldsymbol{\log(1+2x)=2x-2x^2+\varepsilon_2}$

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2}{x^2}=0$

3　$f(x)=\sqrt[3]{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{3}}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-1)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$
$$f''(x)=\frac{2}{9}(1-x)^{-\frac{5}{3}}\cdot(-1)=-\frac{2}{9(1-x)\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

したがって

$f(0)=1$

$f'(0)=-\dfrac{1}{3}$

$f''(0)=-\dfrac{2}{9}$

以上より，$x=0$ における 2 次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$
$$=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}x^2$$
$$=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$$

よって，$\sqrt[3]{1-x} \fallingdotseq 1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$ であるから，これを利用して

$$\sqrt[3]{0.8}=\sqrt[3]{1-0.2}$$
$$\fallingdotseq 1-\frac{1}{3}\cdot 0.2-\frac{1}{9}\cdot 0.2^2$$
$$=\frac{9-3\cdot 0.2-0.04}{9}$$
$$=\frac{8.36}{9}=0.9288\cdots$$

よって，**0.929**

4　e^x の 4 次近似式は

$$1+x+\frac{1}{2\,!}x^2+\frac{1}{3\,!}x^3+\frac{1}{4\,!}x^4$$

これを利用して

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4\,!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{384}$$
$$=\frac{384+192+48+8+1}{384}$$
$$=\frac{633}{384}=1.6484375$$

よって，**1.6484**

$$e=(\sqrt{e})^2$$
$$\fallingdotseq 1.6484^2=2.71722256$$

よって，**2.7172**

5　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ とおくと

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1-x)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-1)=\frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}}$$
$$=\frac{3}{4\sqrt{(1-x)^5}}$$
$$f'''(x)=-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}(1-x)^{-\frac{7}{2}}\cdot(-1)=\frac{15}{8}(1-x)^{-\frac{7}{2}}$$
$$=\frac{15}{8\sqrt{(1-x)^7}}$$
$$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{8}\cdot\frac{7}{2}(1-x)^{-\frac{9}{2}}\cdot(-1)=\frac{105}{16}(1-x)^{-\frac{9}{2}}$$
$$=\frac{105}{16\sqrt{(1-x)^9}}$$

したがって

$$f(0)=1,\ \ f'(0)=\frac{1}{2},\ \ f''(0)=\frac{3}{4},\ \ f'''(0)=\frac{15}{8}$$
$$f^{(4)}(0)=\frac{105}{16}$$

以上より，$f(x)$ の $x=0$ における 4 次近似式は

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\frac{f'''(0)}{3\,!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4\,!}x^4$$
$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{15}{8}x^3+\frac{1}{24}\cdot\frac{105}{16}x^4$$
$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4$$

よって

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+o(x^4)$$

6　$f(x)=\log(2-x)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2-x}\cdot(-1)=-\frac{1}{2-x}$$
$$f''(x)=\{-(2-x)^{-1}\}'$$
$$=(2-x)^{-2}\cdot(-1)=-\frac{1}{(2-x)^2}$$
$$f'''(x)=\{-(2-x)^{-2}\}'$$
$$=2(2-x)^{-3}\cdot(-1)=-\frac{2}{(2-x)^3}$$
$$f^{(4)}(x)=\{-2(2-x)^{-3}\}'$$
$$=3\cdot 2(2-x)^{-4}\cdot(-1)=-\frac{3\cdot 2}{(2-x)^4}$$

$$f^{(n)}(x)=-\frac{(n-1)\,!}{(2-x)^n}$$　（この式の証明は略）

したがって

$$f(0)=\log 2,\ \ f'(0)=-\frac{1}{2},\ \ f''(0)=-\frac{1}{2^2},\ \ f'''(0)=-\frac{2}{2^3}$$
$$f^{(4)}(0)=-\frac{3\,!}{2^4},\ \ f^{(n)}(0)=-\frac{(n-1)\,!}{2^n}$$

以上より，$f(x)$ の $x=0$ における n 次近似式は

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\frac{f'''(0)}{3\,!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n$$
$$=0+1\cdot x+(-1)\cdot\frac{1}{2\,!}x^2+2\,!\cdot\frac{1}{3\,!}x^3+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)\,!\cdot\frac{1}{n\,!}x^n$$
$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

よって

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$

7（1）　$f'(x)=\boldsymbol{\cos x-\dfrac{1}{1+x}}$

これより

$$f'(0)=\cos 0-\frac{1}{1+0}$$
$$=1-1=0$$

（2）　$f''(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$

これより

$$f''(0)=-\sin 0+\frac{1}{1}$$
$$=1>0$$

よって，$f(x)$ は，$x=0$ で**極小値をとる．**

8（1）　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+2x}}\cdot 2-e^x$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-e^x$$

$f'(x)=0$ として

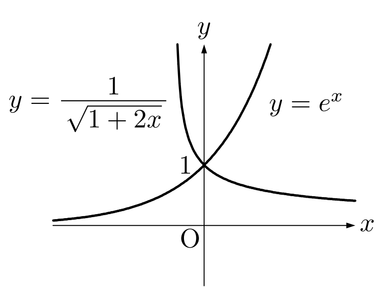
$$\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-e^x=0$$

ここで，$x=0$ とすれば

$$左辺=\frac{1}{1}-e^0=0$$

よって，$\boldsymbol{x=0}$

〔参考〕



（2）　$f''(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1+2x}} \cdot 2 - e^x$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}} - e^x$

これより

$f''(0) = -1 - e^0$

$= -2 < 0$

また，$f(0) = \sqrt{1} - e^0 = 0$ であるから，$f(x)$ は，$x = 0$ で**極大値 0 をとる．**

9（1）　与式 $= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3}{n^2}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^2}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

$= 3 + 0 + 0 = \mathbf{3}$

（2）　与式 $= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(5n^2) \cdot \frac{1}{n^2}}{(n^2 + n + 1) \cdot \frac{1}{n^2}}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$

$= \dfrac{5}{1 + 0 + 0} = \mathbf{5}$

（3）　与式 $= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n} + 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{n}}}$

$= \dfrac{\sqrt{2+0}}{1+0} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

（4）　与式 $= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n} - n)(\sqrt{n^2+2n} + n)}{\sqrt{n^2+2n} + n}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2 + 2n) - n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n} + n}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n \cdot \frac{1}{n}}{(\sqrt{n^2+2n} + n) \cdot \frac{1}{n}}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{1+0} + 1} = \dfrac{2}{2} = \mathbf{1}$

10　それぞれの等比数列の公比を r とする．

（1）　$r = -\dfrac{1}{3}$

$-1 < r < 1$ であるからこの等比数列は，**0 に収束する．**

（2）　$r = \cos\dfrac{2}{3}\pi = -\dfrac{1}{2}$

$-1 < r < 1$ であるからこの等比数列は，**0 に収束する．**

（3）　$r = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$

$= \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2} > 1$

よって，この等比数列は，**∞ に発散する．**

（4）　$\left\{\dfrac{5^n}{3^n}\right\} = \left\{\left(\dfrac{5}{3}\right)^n\right\}$ であるから，$r = \dfrac{5}{3} > 1$

よって，この等比数列は，**∞ に発散する．**

11（1）　右辺 $= \dfrac{n+2}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{n+1}{(n+2)(n+1)}$

$= \dfrac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)}$

$= \dfrac{1}{n^2 + 3n + 2} =$ 左辺

（2）　級数の第 n 部分和を S_n とすると

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$

$= \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \cdots$

$\cdots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) + \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$

したがって，この級数は**収束**し，その和は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

12　与えられた級数において，$a_n = \dfrac{n}{10n+1}$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{10n+1}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10 + \frac{1}{n}}$

$= \dfrac{1}{10+0} = \dfrac{1}{10} \neq 0$

よって，この級数は発散する．

13　それぞれの等比級数の公比を r とする．

（1）　$r = -\dfrac{1}{3}$ より，$|r| < 1$ であるから，この等比級数は収束し，その和は

$\dfrac{-1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{-1}{\frac{4}{3}} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{4}}$

（2）　$r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$|r| < 1$ であるから，この等比級数は収束し，その和は

$\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3} - 1}}$

（3）　$r = e = 2.71\cdots > 1$ であるから，この等比級数は**発散する．**

（4）　$r = 0.3$ より，$|r| < 1$ であるから，この等比級数は収束し，その和は

$\dfrac{3}{1 - 0.3} = \dfrac{3}{0.7} = \boldsymbol{\dfrac{30}{7}}$

14　点 P の座標は

$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots$

$=1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{2^3} + \cdots$

より，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比級数の和になるから

$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{2^3} + \cdots = \dfrac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$

$= \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

また，点 P が動く距離の和は

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$$
より，初項 1，公比 $\frac{1}{2}$ の等比級数の和になるから
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\mathbf{2}$$

15　与えられたべき級数は，公比 $-\frac{1}{3}x$ の等比級数だから，$\left|-\frac{1}{3}x\right|<1$ のとき，すなわち，$|\boldsymbol{x}|<\mathbf{3}$ のときに限り収束し，その和は
$$1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{27}x^3+\cdots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}x\right)}$$
$$=\frac{1}{1+\frac{1}{3}x}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{3+x}}$$

16　$f(0)=\frac{1}{2}$

$f'(x)=(2-x)^{-2}$ より，$f'(0)=2^{-2}=\frac{1}{2^2}$

$f''(x)=2!(2-x)^{-3}$ より，$f''(0)=2!\cdot2^{-3}=\frac{2!}{2^3}$

$f'''(x)=3!(2-x)^{-4}$ より，$f'''(0)=3!\cdot2^{-4}=\frac{3!}{2^4}$

$f^{(4)}(x)=4!(2-x)^{-5}$ より，$f^{(4)}(0)=4!\cdot2^{-5}=\frac{4!}{2^5}$

$\cdots$

$f^{(n)}(x)=n!(2-x)^{-(n+1)}$ より，（この式の証明は略）
$$f^{(n)}(0)=n!\cdot2^{-(n+1)}=\frac{n!}{2^{n+1}}$$

$f(x)$ の n 次近似式を $P_n(x)$ とおくと
$$P_n(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}x+\frac{2!}{2^3}\cdot\frac{1}{2!}x^2+\frac{3!}{2^4}\cdot\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$
$$\cdots+\frac{n!}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n!}x^n$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}x+\frac{1}{2^3}x^2+\frac{1}{2^4}x^3+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}x^n$$
これは，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}x$，項数 $n+1$ の等比数列の和であるから
$$P_n(x)=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{1}{2}x}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{2-x}$$
これから
$$f(x)-P_n(x)=\frac{1}{2-x}-\frac{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{2-x}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}}{2-x}$$
$\left|\frac{1}{2}x\right|<1$ すなわち，$|x|<2$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+1}=0$ であるから
$$\lim_{n\to\infty}\{f(x)-P_n(x)\}=0$$
が成り立つ．よって，$f(x)$ のマクローリン展開は
$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}x+\frac{1}{2^3}x^2+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}x^n+\cdots$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}x^n+\cdots}$$
$$(|x|<2)$$

17（1）　$\cos x-i\sin x=\cos(-x)+i\sin(-x)$
$$=e^{i(-x)}=e^{-ix}$$
よって
$$\text{左辺}=(e^{-ix})^n$$
$$=e^{i(-nx)}$$
$$=\cos(-nx)+i\sin(-nx)$$
$$=\cos nx-\sin nx=\text{右辺}$$

（2）　$\text{左辺}=\cos(x+2\pi)+i\sin(x+2\pi)$
$$=\cos x+i\sin x$$
$$=e^{ix}=\text{右辺}$$

18（1）　$(e^{(4+5i)x})'=\boldsymbol{(4+5i)\,e^{(4+5i)x}}$

（2）　$(e^{\frac{x}{i}})'=\frac{1}{i}\cdot e^{\frac{x}{i}}$
$$=\frac{ie^{\frac{x}{i}}}{i^2}=\boldsymbol{-ie^{\frac{x}{i}}}$$

（3）　$(e^{3x}e^{-ix})'=3e^{3x}e^{-ix}+e^{3x}\cdot(-i)e^{-ix}$
$$=3e^{3x}e^{-ix}-i+e^{3x}e^{-ix}$$
$$=\boldsymbol{(3-i)e^{3x}e^{-ix}}$$

〔別解〕

与式 $=e^{3x-ix}=e^{(3-i)x}$

$(e^{(3-i)x})'=\boldsymbol{(3-i)e^{(3-i)x}}$

（4）　$\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)'=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})'$
$$=\frac{1}{2}\{ie^{ix}+(-i)e^{-ix}\}$$
$$=\frac{1}{2}(ie^{ix}-ie^{-ix})$$
$$=\frac{i(e^{ix}-e^{-ix})}{2}$$
$$=\frac{i^2(e^{ix}-e^{-ix})}{2i}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$$

CHECK

19（1）　$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}$ とおくと
$$f'(x)=-2(1-x)^{-3}\cdot(-1)$$
$$=2(1-x)^{-3}=\frac{2}{(1-x)^3}$$
$$f''(x)=-3\cdot2(1-x)^{-4}\cdot(-1)$$
$$=3!(1-x)^{-4}=\frac{3!}{(1-x)^4}$$
$$f'''(x)=-4\cdot3!(1-x)^{-5}\cdot(-1)$$
$$=4!(1-x)^{-5}=\frac{4!}{(1-x)^5}$$
したがって

$f(0)=1$

$f'(0)=2$

$f''(0)=3!$

$f'''(0)=4!$

以上より，$x=0$ における 3 次近似式は
$$f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2+\frac{1}{3!}f'''(0)(x-0)^3$$
$$=1+2x+\frac{1}{2}\cdot3!\cdot x^2+\frac{1}{3!}\cdot4!\cdot x^3$$
$$=1+2x+3x^2+4x^3$$
よって

$$\boldsymbol{\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \varepsilon_3}$$

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_3}{x^3} = 0$

または

$$\boldsymbol{\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3)}$$

（2）　$f(x) = \sin 2x$ とおくと

$f'(x) = 2\cos 2x$

$f''(x) = -4\sin 2x$

$f'''(x) = -8\cos 2x$

したがって

$f(0) = 0$

$f'(0) = 2$

$f''(0) = 0$

$f'''(0) = -8$

以上より，$x = 0$ における 3 次近似式は

$$f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3\,!}f'''(0)(x-0)^3$$

$$= 0 + 2x + 0 + \frac{1}{3\,!}\cdot(-8)\cdot x^3$$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3$$

よって

$$\boldsymbol{\sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \varepsilon_3}$$

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_3}{x^3} = 0$

または

$$\boldsymbol{\sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}$$

20　$f'(x) = \log x + x\cdot\dfrac{1}{x}$

$= \log x + 1$

$f''(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0$ となるのは，$\log x + 1 = 0$ より，$x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ のときである．

このとき，

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0$$

また，$f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}\log\dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{e}\cdot(-1) = -\dfrac{1}{e}$ であるから

$f(x)$ は，$x = \dfrac{1}{e}$ で **極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{e}}$ をとる．

21（1）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{1-3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2\cdot\frac{1}{n}}{(1-3n)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\frac{1}{n}-3} = -\infty$$

よって，**$-\infty$ に発散する．**

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1) - n^2(n-1)}{(n-1)(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3 + n^2 - n^3 + n^2}{n^2 - 1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2\cdot\frac{1}{n^2}}{(n^2-1)\cdot\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1-0} = 2$$

よって，**2 に収束する．**

（3）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4}{4^n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3^n+4)\cdot\frac{1}{4^n}}{(4^n+3)\cdot\frac{1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{4}{4^n}}{1+\frac{3}{4^n}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

よって，**0 に収束する．**

（4）

$$\lim_{n\to\infty}\log_{10}\frac{n}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\log_{10}\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{(n+3)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\log_{10}\frac{1}{1+\frac{3}{n}} = \log_{10}1 = 0$$

よって，**0 に収束する．**

22　それぞれの等比数列の公比を r とする．

（1）　$r = -\dfrac{3}{5}$

$-1 < r < 1$ であるからこの等比数列は，**0 に収束する．**

（2）　$r = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$-1 < r < 1$ であるからこの等比数列は，**0 に収束する．**

（3）　$r = \dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$

$$= \frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2}{3-4} = -\sqrt{3}-2 < -1$$

よって，この等比数列は，**発散（振動）する．**

（4）　$\left\{\dfrac{e^n}{2^n}\right\} = \left\{\left(\dfrac{e}{2}\right)^n\right\}$

ここで，$e \fallingdotseq 2.71\cdots$ であるから，$r = \dfrac{e}{2} > 1$

よって，この等比数列は，**∞ に発散する．**

23（1）　級数の第 n 部分和を S_n とすると

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k\,!} - \frac{1}{(k+1)\,!}\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{1\,!} - \frac{1}{2\,!}\right) + \left(\frac{1}{2\,!} - \frac{1}{3\,!}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \left\{\frac{1}{n\,!} - \frac{1}{(n+1)\,!}\right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)\,!}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{1 - \frac{1}{(n+1)\,!}\right\} = 1$

したがって，この級数は**収束**し，その和は **1**

（2）　$a_n = \log_{10}\dfrac{10n+2}{n+1}$ とおく．

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\log_{10}\frac{10n+2}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\log_{10}\frac{10+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= \log_{10}\frac{10+0}{1+0}$$

$$= \log_{10}10 = 1 \neq 0$$

よって，この級数は**発散する．**

24　それぞれの等比級数の公比を r とする．

（1）　$r=-\dfrac{2}{5}$ より，$|r|<1$ であるから，この等比級数は**収束**し，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\dfrac{2}{5}\right)}=\frac{1}{\dfrac{7}{5}}=\boldsymbol{\frac{5}{7}}$$

（2）　$r=\dfrac{\dfrac{4}{3}}{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}>1$ であるから，この等比級数は**発散する．**

（3）　$r=\dfrac{1}{\pi}$ より，$|r|<1$ であるから，この等比級数は**収束**し，その和は

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{\pi}}=\frac{1}{\dfrac{\pi-1}{\pi}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{\pi-1}}$$

（4）　$r=-0.1$ より，$|r|<1$ であるから，この等比級数は**収束**し，その和は

$$\frac{2}{1-(-0.1)}=\frac{2}{1.1}=\boldsymbol{\frac{20}{11}}$$

25（1）$f(0)=\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=-(2+x)^{-2}$ より，$f'(0)=-2^{-2}=-\dfrac{1}{2^2}$

$f''(x)=2!\,(2+x)^{-3}$ より，$f''(0)=2!\cdot 2^{-3}=\dfrac{2!}{2^3}$

$f'''(x)=-3!\,(2+x)^{-4}$ より，$f'''(0)=-3!\cdot 2^{-4}=-\dfrac{3!}{2^4}$

$f^{(4)}(x)=4!\,(2+x)^{-5}$ より，$f^{(4)}(0)=4!\cdot 2^{-5}=\dfrac{4!}{2^5}$

$\cdots$

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!\,(2-x)^{-(n+1)}$ より，（証明は略）

$$f^{(n)}(0)=(-1)^n\cdot n!\cdot 2^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$$

$f(x)$ の n 次近似式を $P_n(x)$ とおくと

$$P_n(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}x+\frac{2!}{2^3}\cdot\frac{1}{2!}x^2-\frac{3!}{2^4}\cdot\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n!}x^n$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}x+\frac{1}{2^3}x^2-\frac{1}{2^4}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

これは，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2}x$，項数 $n+1$ の等比数列の和であるから

$$P_n(x)=\frac{\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}x\right)^{n+1}\right\}}{1+\dfrac{1}{2}x}=\frac{1-\left(-\dfrac{1}{2}x\right)^{n+1}}{2+x}$$

これから

$$f(x)-P_n(x)=\frac{1}{2+x}-\frac{1-\left(-\dfrac{1}{2}x\right)^{n+1}}{2+x}$$
$$=\frac{\left(-\dfrac{1}{2}x\right)^{n+1}}{2+x}$$

$\left|-\dfrac{1}{2}x\right|<1$ すなわち，$|x|<2$ のとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}x\right)^{n+1}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x)-P_n(x)\}=0$$

が成り立つ．よって，$f(x)$ のマクローリン展開は

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}x+\frac{1}{2^3}x^2-\cdots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n+\cdots$$
$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2-\cdots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n+\cdots}$$

$(|x|<2)$

（2）$f(0)=1$

$f'(x)=-(1+2x)^{-2}\cdot 2$ より，$f'(0)=-2$

$f''(x)=2!\,(1+2x)^{-3}\cdot 2^2$ より，$f''(0)=2!\cdot 2^2$

$f'''(x)=-3!\,(1+2x)^{-4}\cdot 2^3$ より，$f'''(0)=-3!\cdot 2^3$

$f^{(4)}(x)=4!\,(1+2x)^{-5}\cdot 2^4$ より，$f^{(4)}(0)=4!\cdot 2^4$

$\cdots$

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!\,(1+2x)^{-(n+1)}\cdot 2^n$ より，（証明は略）

$$f^{(n)}(0)=(-1)^n\cdot n!\cdot 2^n=(-2)^n n!$$

$f(x)$ の n 次近似式を $P_n(x)$ とおくと

$$P_n(x)=1-2x+2^2\cdot 2!\cdot\frac{1}{2!}x^2-2^3\cdot 3!\cdot\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$
$$\cdots+(-2)^n\cdot n!\cdot\frac{1}{n!}x^n$$
$$=1-2x+2^2x^2-2^3x^3+\cdots+(-2)^nx^n$$

これは，初項 1，公比 $-2x$，項数 $n+1$ の等比数列の和であるから

$$P_n(x)=\frac{1\{1-(-2x)^{n+1}\}}{1-(-2x)}=\frac{1-(-2x)^{n+1}}{1+2x}$$

これから

$$f(x)-P_n(x)=\frac{1}{1+2x}-\frac{1-(-2x)^{n+1}}{1+2x}$$
$$=\frac{(-2x)^{n+1}}{1+2x}$$

$|-2x|<1$ すなわち，$|x|<\dfrac{1}{2}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-2x)^{n+1}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x)-P_n(x)\}=0$$

が成り立つ．よって，$f(x)$ のマクローリン展開は

$$\frac{1}{1+2x}=1-2x+2^2x^2-2^3x^3+\cdots+(-2)^nx^n+\cdots$$
$$\boldsymbol{=1-2x+4x^2-8x^3+\cdots+(-2)^nx^n+\cdots}$$

$\left(|x|<\dfrac{1}{2}\right)$

26（1）　左辺 $=\cos(2n\pi)+i\,\sin(2n\pi)$

$=\cos 0+i\,\sin 0$

$=1=$ 右辺

（2）　左辺 $=\cos\{(2n+1)\pi\}+i\,\sin\{(2n+1)\pi\}$

$=\cos(2n\pi+\pi)+i\,\sin(2n\pi+\pi)$

$=\cos\pi+i\,\sin\pi$

$=-1=$ 右辺

∎