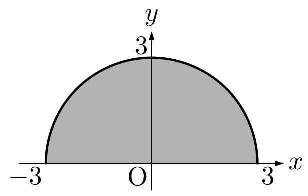
# 3章　重積分



## BASIC

**132**（1）　領域を図示すると



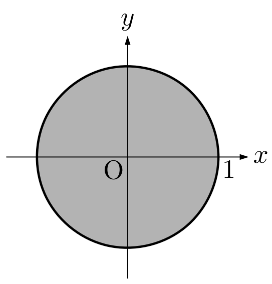

よって，領域 $D$ は，次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq 3,\quad 0 \leqq \theta \leqq \pi$

また，$y = r\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \iint_D r\sin\theta \cdot r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left\{ \int_0^3 r^2 \sin\theta\, dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sin\theta \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_0^3 d\theta \\
&= \frac{1}{3} \cdot 3^3 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \\
&= 9 \left[ -\cos\theta \right]_0^{\pi} \\
&= -9(-1-1) = \mathbf{18}
\end{aligned}$$

（2）　領域を図示すると




よって，領域 $D$ は，次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq 1,\quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

また，$e^{x^2+y^2} = e^{r^2}$ であるから

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \iint_D e^{r^2} \cdot r\,drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 re^{r^2}\, dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \left( \frac{1}{2} r^2 \right)' e^{r^2}\, dr \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ e^{r^2} \right]_0^1 d\theta \quad (*) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e-1) d\theta \\
&= \frac{1}{2}(e-1) \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{2}(e-1) \left[ \theta \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}(e-1) \cdot 2\pi = \boldsymbol{(e-1)\pi}
\end{aligned}$$

（＊）$\varphi(x) = t$ とおくとき，$\displaystyle\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = f(t)\,dt$ を利用

**133**　曲面は，上に凸の放物面であるから，曲面と $xy$ 平面とで囲まれた立体は，$z \geqq 0$ の部分である．これより，$4a^2 - x^2 - y^2 \geqq 0$，すなわち領域は，$x^2 + y^2 \leqq (2a)^2$ である。

領域 $D$ を，$x^2 + y^2 \leqq 2a,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ とし，求める体積を $V$ とすれば

$$V = 4\iint_D (4a^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

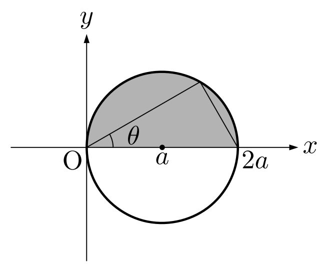
極座標に変換すると，領域 $D$ は，次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq 2a,\quad 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

したがって

$$\begin{aligned}
V &= 4\iint_D (4a^2 - r^2) \cdot r\,dr\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2a} (4a^2 r - r^3)\,dr \right\} d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 2a^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^{2a} d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8a^4 - 4a^4) d\theta \\
&= 16a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= 16a^4 \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 16a^4 \cdot \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{8\pi a^4}
\end{aligned}$$

**134**　直円柱の底面を領域としたときの，前問の曲面と $xy$ 平面とで囲まれる立体の体積を求めればよい．直円柱の底面（領域）を図示すると




ここで，領域 $D$ を，$(x-a)^2 + y^2 \leqq a^2,\ y \geqq 0$ とし，これを極座標で表すと

$0 \leqq r \leqq 2a\cos\theta,\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

よって，求める体積を $V$ とすれば

$$
\begin{aligned}
V &= 2\iint_D (4a^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy \\
&= 2\iint_D \{4a^2 - (x^2 + y^2)\}\,dx\,dy \\
&= 2\iint_D (4a^2 - r^2)\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^{2a\cos\theta} (4a^2 r - r^3)\,dr\right\} d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2a^2 r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{2a\cos\theta} d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{2a^2\cdot(2a\cos\theta)^2 - \frac{1}{4}(2a\cos\theta)^4\right\} d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8a^4\cos^2\theta - 4a^4\cos^4\theta)\,d\theta \\
&= 2\cdot 4a^4\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta\right) \\
&= 8a^4\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 8a^4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{16}\pi\right) \\
&= 8a^4\cdot\frac{5}{16}\pi = \boldsymbol{\frac{5}{2}\pi a^4}
\end{aligned}
$$

**135**　$x + y = u \cdots$①，$2x - y = v \cdots$② とする．

① + ② より，$3x = u + v$ であるから

$$x = \frac{u+v}{3}$$

よって，$\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{1}{3}$

① × 2 − ② より，$3y = 2u - v$ であるから

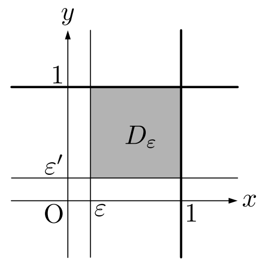
$$y = \frac{2u - v}{3}$$

よって，$\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\partial y}{\partial v} = -\dfrac{1}{3}$

また，$1 \leqq u \leqq 2$，$1 \leqq v \leqq 3$，$\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{9} = -\dfrac{1}{3}$ であるから

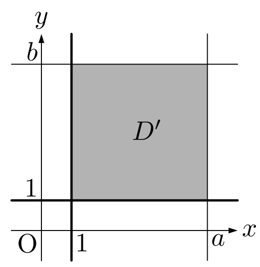
$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \iint_D \frac{v}{u}\cdot\left|-\frac{1}{3}\right| du\,dv \\
&= \frac{1}{3}\int_1^2 \left\{\int_1^3 \frac{v}{u}\,dv\right\} du \\
&= \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{u}\left(\left[\frac{1}{2}v^2\right]_1^3\right) du \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}(3^2 - 1^2)\,du \\
&= \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{1}{u}\cdot 8\,du \\
&= \frac{4}{3}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du \\
&= \frac{4}{3}\Big[\log|u|\Big]_1^2 \\
&= \frac{4}{3}(\log 2 - \log 1) = \boldsymbol{\frac{4}{3}\log 2}
\end{aligned}
$$

**136**　被積分関数は，$x = 0$ または $y = 0$ のとき定義されないので，次の図のような，$\varepsilon \leqq x \leqq 1$，$\varepsilon' \leqq y \leqq 1$ で表される領域を $D_\varepsilon$ とする．




$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}} \iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}} \int_\varepsilon^1 \left\{\int_{\varepsilon'}^1 \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dy\right\} dx \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\Big[2\sqrt{y}\Big]_{\varepsilon'}^1 dx \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}} \int_\varepsilon^1 \frac{2}{\sqrt{x}}(1 - \sqrt{\varepsilon'})\,dx \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}} 2(1 - \sqrt{\varepsilon'})\Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1 \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \varepsilon'\to+0}} 4(1 - \sqrt{\varepsilon'})(1 - \sqrt{\varepsilon}) \\
&= 4\cdot 1\cdot 1 = \mathbf{4}
\end{aligned}
$$

**137**　次の図のような，$1 \leqq x \leqq a$，$1 \leqq y \leqq b$ で表される領域を $D'$ とする．




$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} \iint_{D'} \frac{1}{x^2y^2}\,dx\,dy \\
&= \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} \int_1^a \left\{\int_1^b \frac{1}{x^2y^2}\,dy\right\} dx \\
&= \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} \int_1^a \frac{1}{x^2}\left[-\frac{1}{y}\right]_1^b dx \\
&= \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} \int_1^a \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{b} + 1\right) dx \\
&= \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} \left(1 - \frac{1}{b}\right)\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a \\
&= \lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} \left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(-\frac{1}{a} + 1\right) \\
&= 1\cdot 1 = \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

**138**　※ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は既知とします．

（1）　$3x = t$ とおくと，$9x^2 = t^2$，$3\,dx = dt$ より，$dx = \dfrac{1}{3}dt$

また，$x$ と $t$ の対応は

| $x$ | $0 \to \infty$ |
|---|---|
| $t$ | $0 \to \infty$ |

よって

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int_0^\infty e^{-t^2}\cdot\frac{1}{3}\,dt \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{\pi}}{6}}
\end{aligned}
$$

（2）　$2x=t$ とおくと，$4x^2=t^2$，$2\,dx=dt$ より，$dx=\dfrac{1}{2}dt$

また，$x$ と $t$ の対応は

| $x$ | $-\infty \to \infty$ |
|---|---|
| $t$ | $-\infty \to \infty$ |

よって

$$\text{与式}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\cdot\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{-t^2}\,dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}\,dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}\,dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}\,dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}\,dt$$
$$=\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}\,dt=\boldsymbol{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

**139**　$z=x+2y+3$ について

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2$$

ここで

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1$$
$$=1^2+2^2+1=6$$

よって，求める面積を $S$ とすると

$$S=\iint_D\sqrt{6}\,dx\,dy$$
$$=\sqrt{6}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1}dy\right\}dx$$
$$=\sqrt{6}\int_{-1}^{1}\Big[\,y\,\Big]_{-1}^{1}dx$$
$$=\sqrt{6}\int_{-1}^{1}\{1-(-1)\}\,dx$$
$$=2\sqrt{6}\int_{-1}^{1}dx$$
$$=2\sqrt{6}\Big[\,x\,\Big]_{-1}^{1}$$
$$=2\sqrt{6}\{1-(-1)\}=\boldsymbol{4\sqrt{6}}$$

**140**　$z=\sqrt{x^2+y^2}$ について

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ここで

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1$$
$$=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1$$
$$=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+1=2$$

よって，求める面積を $S$ とすると

$$S=\iint_D\sqrt{2}\,dx\,dy$$

ここで，領域 $D'$ を，$1\leqq x^2+y^2\leqq 4$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ とし，極座標に変換すると，領域 $D'$ は次の不等式で表すことができる．

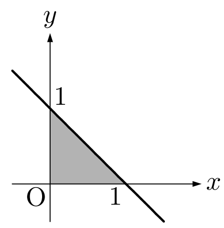
$$1\leqq r\leqq 2,\quad 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$$

よって

$$S=\iint_D\sqrt{2}\,dx\,dy$$
$$=4\iint_{D'}\sqrt{2}\,dx\,dy$$
$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_1^2 r\,dr\right\}d\theta$$
$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_1^2 d\theta$$
$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2^2-1^2)\,d\theta$$
$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\,d\theta$$
$$=6\sqrt{2}\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=6\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{3\sqrt{2}\pi}$$

**141**　$x+y=1$ より，$y=-x+1$ であるから，領域 $D$ は，次の不等式で表すことができる．

$$0\leqq x\leqq 1,\quad 0\leqq y\leqq -x+1$$




よって

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\iint_D(x+y)\,dx\,dy$$
$$=\int_0^1\left\{\int_0^{-x+1}(x+y)\,dy\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_0^{-x+1}dx$$
$$=\int_0^1\left\{x(-x+1)+\frac{1}{2}(-x+1)^2\right\}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

また

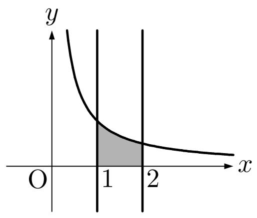
$$\iint_D dx\,dy=\int_0^1\left\{\int_0^{-x+1}dy\right\}dx$$
$$=\int_0^1\Big[\,y\,\Big]_0^{-x+1}dx$$
$$=\int_0^1(-x+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

※ これは領域の面積なので，$\displaystyle\iint_D dx\,dy=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$

よって，平均は

$$\frac{\displaystyle\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

**142**　領域は，$0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{x}$，$1 \leqq x \leqq 2$




$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_1^2 \left\{ \int_0^{\frac{1}{x}} x\,dy \right\} dx$$
$$= \int_1^2 \Big[ xy \Big]_0^{\frac{1}{x}} dx$$
$$= \int_1^2 1\,dx$$
$$= \Big[ \ x \ \Big]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_1^2 \left\{ \int_0^{\frac{1}{x}} y\,dy \right\} dx$$
$$= \int_1^2 \left[ \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{\frac{1}{x}} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[ -\frac{1}{x} \right]_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\left( -\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}$$

また，$\displaystyle\iint_D dx\,dy = \int_1^2 \left\{ \int_0^{\frac{1}{x}} dy \right\} dx$

$$= \int_1^2 \Big[ \ y \ \Big]_0^{\frac{1}{x}} dx$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \Big[ \log|x| \Big]_1^2$$
$$= \log 2 - \log 1 = \log 2$$

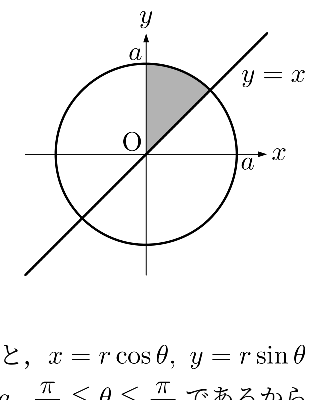
以上より

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy} = \frac{1}{\log 2}$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy} = \frac{\frac{1}{4}}{\log 2} = \frac{1}{4\log 2}$$

よって，重心の座標は，$\left( \boldsymbol{\dfrac{1}{\log 2}},\ \boldsymbol{\dfrac{1}{4\log 2}} \right)$

**143**　領域を図示すると




極座標に変換すると，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$

領域は，$0 \leqq r \leqq a$，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^a r\cos\theta \cdot r\,dr \right\} d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos\theta \int_0^a r^2\,dr \right\} d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[ \frac{1}{3}r^3 \right]_0^a d\theta$$
$$= \frac{1}{3}a^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}a^3 \Big[ \sin\theta \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{3}a^3 \left( \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4} \right)$$
$$= \frac{1}{3}a^3 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{(2-\sqrt{2})a^3}{6}$$

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^a r\sin\theta \cdot r\,dr \right\} d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin\theta \int_0^a r^2\,dr \right\} d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left[ \frac{1}{3}r^3 \right]_0^a d\theta$$
$$= \frac{1}{3}a^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}a^3 \Big[ -\cos\theta \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\frac{1}{3}a^3 \left( \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4} \right)$$
$$= -\frac{1}{3}a^3 \left( 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$$

また，$\displaystyle\iint_D dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^a r\,dr \right\} d\theta$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2}r^2 \right]_0^a d\theta$$
$$= \frac{1}{2}a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$
$$= \frac{1}{2}a^2 \Big[ \ \theta \ \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}a^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$
$$= \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}\pi a^2$$

※ これは領域の面積なので，$\displaystyle\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8}\pi a^2$

以上より

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy} = \frac{\frac{(2-\sqrt{2})a^3}{6}}{\frac{1}{8}\pi a^2} = \frac{4(2-\sqrt{2})a}{3\pi}$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy} = \frac{\frac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\frac{1}{8}\pi a^2} = \frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}$$

よって，重心の座標は，$\left( \boldsymbol{\dfrac{4(2-\sqrt{2})a}{3\pi}},\ \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{2}a}{3\pi}} \right)$

∎