4章　微分方程式

§1　1階微分方程式（p.44〜p.）

BASIC

170　質量の（減少の）変化率は，$-\dfrac{dx}{dt}$ であり，これがそのときの質量に比例するので

$-\dfrac{dx}{dt}=kx$，すなわち，$\boldsymbol{\dfrac{dx}{dt}=-kx}$

171（1）　$x=\dfrac{c}{t-1}$ より，$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{c}{(t-1)^2}$

また，$x=\dfrac{c}{t-1}$ より，$c=x(t-1)$ であるから

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x(t-1)}{(t-1)^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{t-1}}$$

（2）　$x=ct^3$ より，$\dfrac{dx}{dt}=3ct^2$

また，$x=ct^3$ より，$c=\dfrac{x}{t^3}$ であるから

$$\frac{dx}{dt}=3\cdot\frac{x}{t^3}\cdot t^2$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt}=\frac{3x}{t}}$$

172　$x=\dfrac{C}{t-1}$ に，$t=0$，$x=1$ を代入すると

$1=\dfrac{C}{0-1}$，これより，$C=-1$

よって，求める特殊解は，$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{t-1}}$

173（1）　$x=\cos t$ より，$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$

$$左辺=\frac{dx}{dt}=-\sin t$$

$$\begin{aligned}右辺&=-2\cdot\cos t\cdot\frac{\sin t}{\cos t}+\sin t\\&=-2\sin t+\sin t=-\sin t\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺

したがって，$x=\cos t$ は与えられた微分方程式の解である．

（2）　$x=\cos t+C\cos^2 t$ より，$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t-2C\cos t\sin t$

$$左辺=\frac{dx}{dt}=-\sin t-2C\cos t\sin t$$

$$\begin{aligned}右辺&=-2(\cos t+C\cos^2 t)\tan t+\sin t\\&=-2(\cos t+C\cos^2 t)\cdot\frac{\sin t}{\cos t}+\sin t\\&=-2\sin t-2C\cos t\sin t+\sin t\\&=-\sin t-2C\cos t\sin t\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺

また，1 個の任意定数を含むから，関数 $x=\cos t+C\cos^2 t$ は与えられた微分方程式の一般解である．

（3）　$x=\cos t+C\cos^2 t$ に，$t=0$，$x=2$ を代入すると

$$2=\cos 0+C\cos^2 0$$

$$2=1+C$$

$$C=1$$

よって，特殊解は，$\boldsymbol{x=\cos t+\cos^2 t}$

174（1）　両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=3t^2$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int 3t^2\,dt$$

これより，$\log|x|=t^3+c$　（c は任意定数）

よって

$$\begin{aligned}|x|&=e^{t^3+c}\\x&=\pm e^{t^3+c}\\&=\pm e^c\cdot e^{t^3}\end{aligned}$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$\boldsymbol{x=Ce^{t^3}}$　（C は任意定数）

（2）　両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\left(-\frac{2}{t}\right)dt$$

これより

$\log|x|=-2\log|t|+c$　（c は任意定数）

$$\log|x|+2\log|t|=c$$

$$\log|x|+\log t^2=c$$

$$\log|xt^2|=c$$

よって

$$\begin{aligned}|xt^2|&=e^c\\xt^2&=\pm e^c\\x&=\frac{\pm e^c}{t^2}\end{aligned}$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$\boldsymbol{x=\dfrac{C}{t^2}}$　（C は任意定数）

（3）　両辺に $\cos x$ をかけると

$$\cos x\frac{dx}{dt}=\sin t$$

両辺を t について積分すると

$$\int\cos x\,dx=\int\sin t\,dt$$

これより

$\sin x=-\cos t+C$　（C は任意定数）

よって，$\boldsymbol{\sin x+\cos t=C}$　（C は任意定数）

（4）　両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{1-t^2}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{2t}{1-t^2}\,dt$$

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{-(1-t^2)'}{1-t^2}\,dt$$

これより

$\log|x|=-\log|1-t^2|+c$　（c は任意定数）

$\log|x|+\log|t^2-1|=c$　（$|1-t^2|=|t^2-1|$）

$$\log|x(t^2-1)|=c$$

よって

$$\begin{aligned}|x(t^2-1)|&=e^c\\x(t^2-1)&=\pm e^c\\x&=\frac{\pm e^c}{t^2-1}\end{aligned}$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$\boldsymbol{x=\dfrac{C}{t^2-1}}$　（C は任意定数）

175（1）　両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t^2}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=-\int\frac{1}{t^2}\,dt$$

これより

$$\log|x|=\frac{1}{t}+c\quad(c\text{ は任意定数})$$

よって

$$|x|=e^{\frac{1}{t}+c}$$

$$x=\pm e^c e^{\frac{1}{t}}$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$$x=Ce^{\frac{1}{t}}\quad(C\text{ は任意定数})$$

これに，$t=1$，$x=1$ を代入すると

$$1=Ce^{\frac{1}{1}}$$

$$\frac{1}{e}=C$$

よって，求める解は，$x=\dfrac{1}{e}\cdot e^{\frac{1}{t}}$，すなわち，$\boldsymbol{x=e^{\frac{1}{t}-1}}$

（2）　両辺を $\dfrac{x^3+1}{x^2}$ で割ると

$$\frac{x^2}{x^3+1}\frac{dx}{dt}=1$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{x^2}{x^3+1}\,dx=\int dt$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}\,dx=\int dt$$

これより

$$\frac{1}{3}\log|x^3+1|=t+c\quad(c\text{ は任意定数})$$

$$\log|x^3+1|=3(t+c)$$

よって

$$|x^3+1|=e^{3t+c'}\quad(3c=c')$$

$$x^3+1=\pm e^{c'}e^{3t}$$

$C=\pm e^{c'}$ とおくと

$$x^3+1=Ce^{3t}\quad(C\text{ は任意定数})$$

これに，$t=0$，$x=1$ を代入すると

$$1^3+1=Ce^0$$

$$C=2$$

よって, 求める解は, $x^3+1=2e^{3t}$, すなわち, $\boldsymbol{x^3=2e^{3t}-1}$

176（1）　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{t}-\dfrac{2t}{x}$ より，　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{t}-\dfrac{2}{\frac{x}{t}}\cdots$①

$u=\dfrac{x}{t}$ とおくと，$x=tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを①に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=u-\frac{2}{u}$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{2}{u}$

$u\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{2}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int u\,du=-2\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\frac{1}{2}u^2=-2\log|t|+C\quad(C\text{ は任意定数})$$

すなわち，　$u^2=-4\log|t|+C$

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$ であるから

$$\frac{x^2}{t^2}=-4\log|t|+C$$

$$\boldsymbol{x^2=t^2(-4\log|t|+C)}\quad(C\text{ は任意定数})$$

（2）　$u=\dfrac{x}{t}$ とおくと，$x=tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを与えられた微分方程式に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=u+\cos^2 u$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt}=\cos^2 u$

$\dfrac{1}{\cos^2 u}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{\cos^2 u}\,du=\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\tan u=\log|t|+C\quad(C\text{ は任意定数})$$

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$ であるから

$$\boldsymbol{\tan\frac{x}{t}=\log|t|+C}\quad(C\text{ は任意定数})$$

177　$u=\dfrac{x}{t}$ とおくと，$x=tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを与えられた微分方程式に代入すると

$$u+t\frac{du}{dt}=3u-1$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt}=2u-1$

$\dfrac{1}{2u-1}\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{2u-1}\,du=\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\frac{1}{2}\log|2u-1|=\log|t|+c\quad(c\text{ は任意定数})$$

$$\log|2u-1|-2\log|t|=c'\quad(2c=c')$$

$$\log\left|\frac{2u-1}{t^2}\right|=c'$$

よって，$\left|\dfrac{2u-1}{t^2}\right|=e^{c'}$

$$\frac{2u-1}{t^2}=\pm e^{c'}$$

$\pm e^{c'}=C$ とおけば

$$\frac{2u-1}{t^2}=C$$

$$2u-1=Ct^2$$

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$ であるから

$$2\cdot\frac{x}{t}-1=Ct^2$$

$$\frac{2x}{t}=Ct^2+1$$

$$x=\frac{t}{2}(Ct^2+1)$$

これに，$t=1$，$x=2$ を代入して

$$2=\frac{1}{2}(C\cdot 1^2+1$$

$$2=\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}C=\frac{3}{2}$$

$$C=3$$

よって, 求める解は, $x=\dfrac{t}{2}(3t^2+1)$, すなわち, $\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}t^3+\dfrac{1}{2}t}$

178（1）　i）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}-\frac{3x}{t}=0$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3x}{t}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{3}{t}$$

両辺を t について積分すると
$$\int \frac{1}{x}\,du = \int \frac{3}{t}\,dt$$
これより
$$\log|x| = 3\log|t| + c \quad (c \text{ は任意定数})$$
$$\log|x| - 3\log|t| = c$$
$$\log\left|\frac{x}{t^3}\right| = c$$
よって
$$\left|\frac{x}{t^3}\right| = e^c$$
$$\frac{x}{t^3} = \pm e^c$$
$$x = \pm e^c t^3$$
$\pm e^c = C$ とおくと
$$x = Ct^3 \quad (C \text{ は任意定数})$$

ii）　$x = ut^3$ とおき，両辺を t で微分すると
$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t^3 + u\cdot 3t^2$$
微分方程式に代入すると
$$\frac{du}{dt}t^3 + 3ut^2 - \frac{3ut^3}{t} = 2t^2 - t$$
$$\frac{du}{dt}t^3 = 2t^2 - t$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}$$
両辺を t について積分すると
$$\int du = \int\left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt$$
これより
$$u = 2\log|t| + \frac{1}{t} + C \quad (C \text{ は任意定数})$$
よって，求める一般解は，$x = t^3\left(2\log|t| + \dfrac{1}{t} + C\right)$

すなわち，$\boldsymbol{x = t^2(2t\log|t| + 1 + Ct)}$

（C は任意定数）

〔別解〕　（積分因子を利用）
$$\int\left(-\frac{3}{t}\right)dt = -3\log|t|$$
ここで，$e^{-3\log|t|} = \dfrac{1}{|t^3|}$

i）$t > 0$ のとき

方程式の両辺に，$\dfrac{1}{t^3}$ をかけると
$$\frac{1}{t^3}\,\frac{dx}{dt} - \frac{3x}{t^4} = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}$$

ii）$t < 0$ のとき

方程式の両辺に，$-\dfrac{1}{t^3}$ をかけると
$$-\frac{1}{t^3}\,\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{t^4} = -\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}$$
すなわち，$\dfrac{1}{t^3}\,\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{3x}{t^4} = \dfrac{2}{t} - \dfrac{1}{t^2}$

よって，いずれの場合も
$$\left(\frac{x}{t^3}\right)' = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}$$
$$\frac{x}{t^3} = \int\left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}t\right)dt$$
$$= 2\log|t| + \frac{1}{t} + C$$
したがって
$$\boldsymbol{x = t^2(2t\log|t| + 1 + Ct)} \quad (C \text{ は任意定数})$$

（2）　i）斉次 1 階微分方程式の解
$$\frac{dx}{dt} + x\tan t = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = -x\tan t$$
$$\frac{1}{x}\,\frac{dx}{dt} = -\tan t$$
両辺を t について積分すると
$$\int \frac{1}{x}\,dx = -\int \tan t\,dt$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{-(\sin t)'}{\cos t}\,dt$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{(\sin t)'}{\cos t}\,dt$$
これより
$$\log|x| = \log|\cos t| + c \quad (c \text{ は任意定数})$$
$$\log\left|\frac{x}{\cos t}\right| = c$$
よって
$$\left|\frac{x}{\cos t}\right| = e^c$$
$$\frac{x}{\cos t} = \pm e^c$$
$\pm e^c = C$ とおくと
$$x = C\cos t \quad (C \text{ は任意定数})$$

ii）　$x = u\cos t$ とおき，両辺を t で微分すると
$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cos t - u\sin t$$
微分方程式に代入すると
$$\frac{du}{dt}\cos t - u\sin t + u\cos t\tan t = \frac{1}{\cos t}$$
$$\frac{du}{dt}\cos t - u\sin t + u\sin t = \frac{1}{\cos t}$$
$$\frac{du}{dt}\cos t = \frac{1}{\cos t}$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$$
両辺を t について積分すると
$$\int du = \int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$
これより
$$u = \tan t + C \quad (C \text{ は任意定数})$$
よって，求める一般解は
$$x = (\tan t + C)\cos t = \left(\frac{\sin t}{\cos t} + C\right)\cos t$$
すなわち，$\boldsymbol{x = \sin t + C\cos t}$　（C は任意定数）

〔別解〕　（積分因子を利用）
$$\int \tan t\,dt = -\log|\cos t|$$
方程式の両辺に，$e^{-\log|\cos t|} = \dfrac{1}{|\cos t|}$ をかけると
$$\frac{1}{\cos t}\,\frac{dx}{dt} + x\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{（場合分け省略）}$$
$$\left(\frac{1}{\cos t}x\right)' = \frac{1}{\cos^2 t}$$
よって
$$\frac{1}{\cos t}x = \int \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$
$$= \tan t + C \quad (C \text{ は任意定数})$$
したがって
$$\boldsymbol{x = \sin t + C\cos t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

179（1）　i）斉次 1 階微分方程式の解
$$\frac{dx}{dt} + \frac{2t}{t^2+1}x = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2t}{t^2+1}x$$
$$\frac{1}{x}\,\frac{dx}{dt} = -\frac{2t}{t^2+1}$$
両辺を t について積分すると
$$\int \frac{1}{x}\,dx = -\int \frac{(t^2+1)'}{t^2+1}\,dt$$

これより

$$\log|x| = -\log|t^2+1| + c \quad (c \text{ は任意定数})$$
$$\log|x| + \log|t^2+1| = c$$
$$\log|x(t^2+1)| = c$$

よって

$$|x(t^2+1)| = e^c$$
$$x(t^2+1) = \pm e^c$$

$\pm e^c = C$ とおくと

$$x(t^2+1) = C \quad (C \text{ は任意定数})$$
$$x = \frac{C}{t^2+1}$$

ii）　$x = \dfrac{u}{t^2+1}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{1}{t^2+1} - u\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}\frac{1}{t^2+1} - u\frac{2t}{(t^2+1)^2} + \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{u}{t^2+1} = 4t$$
$$\frac{du}{dt}\frac{1}{t^2+1} = 4t$$
$$\frac{du}{dt} = 4t(t^2+1) = 4t^3+4t$$

両辺を t について積分すると

$$\int du = \int (4t^3+4t)\,dt$$

これより

$$u = t^4+2t^2+C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって，一般解は

$$x = \frac{t^4+2t^2+C}{t^2+1}$$

これに，$t=0$，$x=1$ を代入して

$$1 = \frac{C}{1}$$
$$C = 1$$

よって，求める解は

$$x = \frac{t^4+2t^2+1}{t^2+1} = \frac{(t^2+1)^2}{t^2+1}$$

したがって，$\boldsymbol{x = t^2+1}$

〔一般解の求め方の別解〕　（積分因子を利用）

$$\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \log|t^2+1|$$

方程式の両辺に，$e^{\log|t^2+1|} = t^2+1$ をかけると

$$(t^2+1)\frac{dx}{dt} + 2tx = 4t(t^2+1)$$
$$\{(t^2+1)x\}' = 4t^3+4t$$

よって

$$(t^2+1)x = \int (4t^3+4t)\,dt$$
$$= t^4+2t+C \quad (C \text{ は任意定数})$$

したがって

$$x = \frac{t^4+2t+C}{t^2+1} \quad (C \text{ は任意定数})$$

（2）　i）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt} - 2x = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = 2x$$
$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = 2$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int 2\,dt$$

これより

$$\log|x| = 2t+c \quad (c \text{ は任意定数})$$

よって

$$|x| = e^{2t+c}$$
$$= e^c e^{2t}$$
$$x = \pm e^c e^{2t}$$

$\pm e^c = C$ とおくと，$x = Ce^{2t}$　（C は任意定数）

ii）　$x = ue^{2t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cdot e^{2t} + u\cdot 2e^{2t}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}\cdot e^{2t} + 2ue^{2t} - 2ue^{2t} = e^t$$
$$\frac{du}{dt}\cdot e^{2t} = e^t$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{e^t}{e^{2t}} = e^{-t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int du = \int e^{-t}\,dt$$

これより

$$u = -e^{-t}+C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって，一般解は

$$x = \frac{-e^{-t}+C}{e}{}^{2t} = -e^t + Ce^{2t}$$

これに，$t=0$，$x=1$ を代入して

$$1 = -1+C$$
$$C = 2$$

よって，求める解は，$\boldsymbol{x = 2e^{2t} - e^t}$

〔一般解の求め方の別解〕　（積分因子を利用）

$$\int (-2)\,dt = -2t$$

方程式の両辺に，e^{-2t} をかけると

$$e^{-2t}\frac{dx}{dt} - 2e^{-2t}x = e^t\cdot e^{-2t}$$
$$(e^{-2t}x)' = e^{-t}$$

よって

$$e^{-2t}x = \int e^{-t}\,dt$$
$$= -e^{-t}+C \quad (C \text{ は任意定数})$$

したがって

$$x = e^{2t}(-e^{-t}+C) = -e^t + Ce^{2t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

CHECK

180　$x = \log(t+c)$ より，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t+c}\cdots$①

さらに，$x = \log(t+c)$ より，$t+c = e^x$ なので，これを ① に代入して，

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{e^x}，\text{すなわち，}\ \boldsymbol{\frac{dx}{dt} = e^{-x}}$$

181（1）　$x = te^{-t}$ より，$\dfrac{dx}{dt} = e^{-t} + t\cdot(-e^{-t}) = (1-t)e^{-t}$

$$\text{左辺} = \frac{dx}{dt} = (1-t)e^{-t}$$
$$\text{右辺} = -te^{-t} + e^{-t}$$
$$= (1-t)e^{-t}$$

よって，左辺 = 右辺

したがって，$x = te^{-t}$ は与えられた微分方程式の解である．

（2）　$x=(t+C)e^{-t}$ より，

$$\frac{dx}{dt}=e^{-t}+(t+C)\cdot(-e^{-t})$$
$$=\{1-(t+C)\}e^{-t}$$
$$=(1-t-C)e^{-t}$$

左辺 $=(1-t-C)e^{-t}$

右辺 $=-(t+C)e^{-t}+e^{-t}$
$$=\{-(t+C)+1\}e^{-t}$$
$$=(1-t-C)e^{-t}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

また，1 個の任意定数を含むから，関数 $x=(t+C)e^{-t}$ は与えられた微分方程式の一般解である．

（3）　$x=(t+C)e^{-t}$ に，$t=0,\ x=3$ を代入すると

$$3=(0+C)e^0$$
$$3=C$$

よって，特殊解は，$\boldsymbol{x=(t+3)e^{-t}}$

182（1）　両辺を $x+1$ で割ると

$$\frac{1}{x+1}\,\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+2}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x+1}\,dx=\int\frac{1}{t+2}\,dt$$

これより，

$\log|x+1|=\log|t+2|+c$　（c は任意定数）

$\log|x+1|-\log|t+2|=c$

$\log\left|\dfrac{x+1}{t+2}\right|=c$

よって

$$\left|\frac{x+1}{t+2}\right|=e^c$$
$$\frac{x+1}{t+2}=\pm e^c$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$$\frac{x+1}{t+2}=C$$
$$x+1=C(t+2)$$

$\boldsymbol{x=C(t+2)-1}$　（C は任意定数）

（2）　両辺を $\dfrac{1-x^2}{2x}$ で割ると

$$\frac{2x}{1-x^2}\,\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt$$
$$-\int\frac{(1-x^2)'}{1-x^2}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$-\log|1-x^2|=\log|t|+c$　（c は任意定数）

$\log|x^2-1|+\log|t|=-c$　$\leftarrow(|1-x^2|=|x^2-1|)$

$\log|(x^2-1)t|=-c$

よって

$$|(x^2-1)t|=e^{-c}$$
$$(x^2-1)t=\pm e^{-c}$$

$C=\pm e^{-c}$ とおくと

$$(x^2-1)t=C$$
$$x^2-1=\frac{C}{t}$$

$\boldsymbol{x^2=\dfrac{C}{t}+1}$　（C は任意定数）

（3）　両辺を x^2 で割ると

$$\frac{1}{x^2}\,\frac{dx}{dt}=1$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x^2}\,dx=\int dt$$

これより

$-\dfrac{1}{x}=t+C$　（C は任意定数）

$$-x=\frac{1}{t+C}$$

$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{t+C}}$　（C は任意定数）

（4）　両辺を $\sqrt{1-x^2}$ で割ると

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{dx}{dt}=1$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int dt$$

これより

$\sin^{-1}x=t+C$　（C は任意定数）

よって，$\boldsymbol{x=\sin(t+C)}$　（C は任意定数）

183（1）　両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\,\frac{dx}{dt}=\cos t$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=-\int\cos t\,dt$$

これより

$\log|x|=\sin t+c$　（c は任意定数）

よって

$$|x|=e^{\sin t+c}$$
$$x=\pm e^ce^{\sin t}$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$x=Ce^{\sin t}$　（C は任意定数）

これに，$t=0,\ x=1$ を代入すると

$$1=Ce^{\sin 0}$$
$$1=C$$

よって，求める解は，$x=1\cdot e^{\sin t}$，すなわち，$\boldsymbol{x=e^{\sin t}}$

（2）　両辺を e^{-x} で割ると

$$\frac{1}{e^{-x}}\,\frac{dx}{dt}=2t$$
$$e^x\frac{dx}{dt}=2t$$

両辺を t について積分すると

$$\int e^x\,dx=\int 2t\,dt$$

$e^x=t^2+C$　（C は任意定数）

よって

$$x=\log|t^2+C|$$

これに，$t=0,\ x=0$ を代入すると

$$0=\log|0+C|$$
$$0=\log|C|$$
$$C=1$$

よって，求める解は，

$x=\log|t^2+1|$，すなわち，$\boldsymbol{x=\log(t^2+1)}$

184（1）　$\dfrac{dx}{dt}=2\cdot\dfrac{x}{t}-3\cdots$① となる。

$u=\dfrac{x}{t}$ とおくと，$x=tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを①に代入して

$$u + t\frac{du}{dt} = 2u - 3$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt} = u - 3$

よって，$\dfrac{1}{u-3}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{u-3}\,du = \int \frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|u-3| = \log|t| + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\log\left|\frac{u-3}{t}\right| = c$$

$$\left|\frac{u-3}{t}\right| = e^c$$

$$\frac{u-3}{t} = \pm e^c$$

$C = \pm e^c$ とおくと，$\dfrac{u-3}{t} = C$

すなわち，　$u = Ct + 3$

ここで，$u = \dfrac{x}{t}$ であるから

$$\frac{x}{t} = Ct + 3$$

$$x = t(Ct+3)$$

$$\boldsymbol{x = Ct^2 + 3t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

（2）　$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと，$x = tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$$

これを与えられた微分方程式に代入して

$$u + t\frac{du}{dt} = u + \tan u$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt} = \tan u$

$\dfrac{1}{\tan u}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{\tan u}\,du = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$\int \frac{\cos u}{\sin u}\,du = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$\int \frac{(\sin u)'}{\sin u}\,du = \int \frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|\sin u| = \log|t| + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\log\left|\frac{\sin u}{t}\right| = c$$

$$\left|\frac{\sin u}{t}\right| = e^c$$

$$\frac{\sin u}{t} = \pm e^c$$

$C = \pm e^c$ とおくと，$\dfrac{\sin u}{t} = C$

すなわち，$\sin u = Ct$

ここで，$u = \dfrac{x}{t}$ であるから

$$\boldsymbol{\sin\frac{x}{t} = Ct} \quad (C \text{ は任意定数})$$

185　$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} - 2\left(\dfrac{x}{t}\right)^2 \cdots$① となる。

$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと，$x = tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$$

これを①に代入して

$$u + t\frac{du}{dt} = u - 2u^2$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt} = -2u^2$

$\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{2}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{u^2}\,du = -\int \frac{2}{t}\,dt$$

これより

$$-\frac{1}{u} = -2\log|t| + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\frac{1}{u} = 2\log|t| + C \quad (C = -c)$$

$$u = \frac{1}{2\log|t| + C}$$

ここで，$u = \dfrac{x}{t}$ であるから

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2\log|t| + C}$$

よって，$x = \dfrac{t}{2\log|t| + C}$

これに，$t = 1$，$x = 1$ を代入して

$$1 = \frac{1}{2\log 1 + C}$$

$$1 = \frac{1}{C}$$

$$C = 1$$

よって，求める解は，$\boldsymbol{x = \dfrac{t}{2\log|t| + 1}}$

186（1）　i）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{t} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3x}{t}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{x}\,du = -\int \frac{3}{t}\,dt$$

これより

$$\log|x| = -3\log|t| + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\log|x| + 3\log|t| = c$$

$$\log|xt^3| = c$$

よって

$$|xt^3| = e^c$$

$$xt^3 = \pm e^c$$

$$x = \pm\frac{e^c}{t^3}$$

$\pm e^c = C$ とおくと

$$x = \frac{C}{t^3} \quad (C \text{ は任意定数})$$

ii）　$x = \dfrac{u}{t^3}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{1}{t^3} + u\cdot\left(-\frac{3}{t^4}\right)$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}\frac{1}{t^3} - \frac{3u}{t^4} + \frac{3u}{t^4} = \frac{1}{t} + 1$$

$$\frac{du}{dt}\frac{1}{t^3} = \frac{1}{t} + 1$$

$$\frac{du}{dt} = t^2 + t^3$$

両辺を t について積分すると

$$\int du = \int (t^3 + t^2)\,dt$$

これより

$$u = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって，求める一般解は，$x = \dfrac{1}{t^3}\left(\dfrac{1}{4}t^4 + \dfrac{1}{3}t^3 + C\right)$

すなわち，$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{4}t + \dfrac{1}{3} + \dfrac{C}{t^3}}$　$(C$ は任意定数$)$

〔別解〕　（積分因子を利用）

$$\int \frac{3}{t}\,dt = 3\log|t|$$

ここで，$e^{3\log|t|} = |t^3|$

i）$t > 0$ のとき

方程式の両辺に，t^3 をかけると

$$t^3\frac{dx}{dt} + 3t^2x = t^2 + t^3$$

ii）$t<0$ のとき

方程式の両辺に，$-t^3$ をかけると

$$-t^3\frac{dx}{dt}-3t^2x=-t^2-t^3$$

すなわち，$t^3\dfrac{dx}{dt}+3t^2x=t^2+t^3$

よって，いずれの場合も

$$(t^3x)'=t^2+t^3$$

$$t^3x=\int(t^3+t^2)\,dt$$

$$=\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+C$$

したがって

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{4}t+\frac{1}{3}+\frac{C}{t^3}}\quad(C\text{ は任意定数})$$

（2）　i）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t}=0$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{t}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=-\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|x|=-\log|t|+c\quad(c\text{ は任意定数})$$

$$\log|xt|=c$$

よって

$$|xt|=e^c$$

$$xt=\pm e^c$$

$\pm e^c=C$ とおくと

$$x=\frac{C}{t}\quad(C\text{ は任意定数})$$

ii）　$x=\dfrac{u}{t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}\frac{1}{t}+u\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{1}{t}\frac{du}{dt}-\frac{u}{t^2}+\frac{u}{t^2}=\sin t$$

$$\frac{du}{dt}=t\sin t$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int t\sin t\,dt$$

$$u=-t\cos t+\int\cos t\,dt$$

$$=-t\cos t+sint+C$$

よって，求める一般解は

$$x=\frac{1}{t}(-t\cos t+sint+C)$$

すなわち，$\boldsymbol{x=-\cos t+\dfrac{\sin t}{t}+\dfrac{C}{t}}$

（C は任意定数）

〔別解〕　（積分因子を利用）

$$\int\frac{1}{t}\,dt=\log|t|$$

方程式の両辺に，$e^{\log|t|}=|t|$ をかけると

$$t\frac{dx}{dt}+x=t\sin t\quad(\text{場合分け省略})$$

$$(tx)'=t\sin t$$

よって

$$tx=\int t\sin t\,dt$$

$$=-t\cos t+\int\cos t\,dt$$

$$=-t\cos t+\sin t+C\quad(C\text{ は任意定数})$$

したがって

$$\boldsymbol{x=-\cos t+\frac{\sin t}{t}+\frac{C}{t}}\quad(C\text{ は任意定数})$$

187（1）　i）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}-\frac{2t}{t^2+1}x=0$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{t^2+1}x$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{t^2+1}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}\,dt$$

これより

$$\log|x|=\log|t^2+1|+c\quad(c\text{ は任意定数})$$

$$\log|x|-\log|t^2+1|=c$$

$$\log\left|\frac{x}{t^2+1}\right|=c$$

よって

$$\left|\frac{x}{t^2+1}\right|=e^c$$

$$\frac{x}{t^2+1}=\pm e^c$$

$\pm e^c=C$ とおくと

$$\frac{x}{t^2+1}=C\quad(C\text{ は任意定数})$$

$$x=C(t^2+1)$$

ii）　$x=u(t^2+1)$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}(t^2+1)+u\cdot2t$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}(t^2+1)+2ut-\frac{2t\cdot u(t^2+1)}{t^2+1}=t^3+t$$

$$\frac{du}{dt}(t^2+1)=t^3+t$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{t(t^2+1)}{t^2+1}=t$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int t\,dt$$

これより

$$u=\frac{1}{2}t^2+C\quad(C\text{ は任意定数})$$

よって，一般解は

$$x=\left(\frac{1}{2}t^2+C\right)(t^2+1)$$

これに，$t=0$，$x=0$ を代入して

$$0=(0+C)(0+1)$$

$$C=0$$

よって，求める解は，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}t^2(t^2+1)}$

〔一般解の求め方の別解〕　（積分因子を利用）

$$-\int\frac{2t}{t^2+1}\,dt=-\log|t^2+1|$$

方程式の両辺に，$e^{-\log|t^2+1|}=\dfrac{1}{t^2+1}$ をかけると

$$\frac{1}{t^2+1}\frac{dx}{dt}-\frac{2tx}{(t^2+1)^2}=\frac{t^3+t}{t^2+1}$$

$$\left(\frac{1}{t^2+1}\cdot x\right)'=t$$

よって

$$\frac{x}{t^2+1}=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C \quad (C\text{ は任意定数})$$
したがって
$$x=\left(\frac{1}{2}t^2+C\right)(t^2+1) \quad (C\text{ は任意定数})$$

（2）　i）斉次 1 階微分方程式の解
$$\frac{dx}{dt}+2tx=0$$
$$\frac{dx}{dt}=-2tx$$
$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-2t$$
両辺を t について積分すると
$$\int\frac{1}{x}\,dx=-2\int t\,dt$$
これより
$$\log|x|=-t^2+c \quad (c\text{ は任意定数})$$
よって
$$|x|=e^{-t^2+c}$$
$$=e^ce^{-t^2}$$
$$x=\pm e^ce^{-t^2}$$
$\pm e^c=C$ とおくと，$x=Ce^{-t^2}$　(C は任意定数)

ii）　$x=ue^{-t^2}$ とおき，両辺を t で微分すると
$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}\cdot e^{-t^2}+u\cdot e^{-t^2}\cdot(-2t)$$
$$=\frac{du}{dt}\cdot e^{-t^2}-2tue^{-t^2}$$
微分方程式に代入すると
$$\frac{du}{dt}\cdot e^{-t^2}-2tue^{-t^2}+2tue^{-t^2}=2te^{-t^2}$$
$$\frac{du}{dt}\cdot e^{-t^2}=2te^{-t^2}$$
$$\frac{du}{dt}=\frac{2te^{-t^2}}{e^{-t^2}}=2t$$
両辺を t について積分すると
$$\int du=\int 2t\,dt$$
これより
$$u=t^2+C \quad (C\text{ は任意定数})$$
よって，一般解は
$$x=(t^2+C)e^{-t^2}$$

これに，$t=0$，$x=1$ を代入して
$$1=(0+C)\cdot e^0$$
$$C=1$$
よって，求める解は，$\boldsymbol{x=(t^2+1)e^{-t^2}}$

〔一般解の求め方の別解〕　（積分因子を利用）
$$\int 2t\,dt=t^2$$
方程式の両辺に，e^{t^2} をかけると
$$e^{t^2}\frac{dx}{dt}+e^{t^2}\cdot 2tx=2t$$
$$(e^{t^2}x)'=2t$$
よって
$$e^{t^2}x=\int 2t\,dt$$
$$=t^2+C \quad (C\text{ は任意定数})$$
したがって
$$x=\frac{1}{e^{t^2}}(t^2+C)=(t^2+C)e^{-t^2} \quad (C\text{ は任意定数})$$

STEP UP

188（1）　両辺を $\cos^2 x$ 割ると
$$\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{dt}=\frac{\sin t}{\cos^2 t}$$
両辺を t について積分すると
$$\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$$
右辺において，$\cos x=u$ とおくと，$-\sin x\,dx=du$ であるから
$$\text{右辺}=-\int\frac{du}{u^2}$$
$$=\frac{1}{u}=\frac{1}{\cos t}$$
よって，$\boldsymbol{\tan x=\frac{1}{\cos t}+C}$　(C は任意定数)

（2）　右辺 $=e^{-t}\cdot e^{-x}$ であるから，両辺を e^{-x} で割ると
$$\frac{1}{e^{-x}}\frac{dx}{dt}=e^{-t}$$
$$e^x\frac{dx}{dt}=e^{-t}$$
両辺を t について積分すると
$$\int e^x\,dx=\int e^{-t}\,dt$$
これより
$$e^x=-e^{-t}+C \quad (C\text{ は任意定数})$$
よって，$\boldsymbol{x=\log(-e^{-t}+C)}$　(C は任意定数)

（3）　両辺に x をかけると
$$x\frac{dx}{dt}=\frac{\log t}{t}$$
両辺を t について積分すると
$$\int x\,dx=\int\frac{\log t}{t}\,dt$$
右辺において，$\log t=u$ とおくと，$\frac{1}{t}\,dt=du$ であるから
$$\text{右辺}=\int u\,du$$
$$=\frac{1}{2}u^2=\frac{1}{2}(\log t)^2$$
よって，$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}(\log t)^2+c$　(c は任意定数)
したがって，$x^2=(\log t)^2+2c$
$2c=C$ とおいて，$\boldsymbol{x^2=(\log t)^2+C}$

（4）　
$$\text{右辺}=\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{t^2+x^2}{t^2}}$$
$$=\frac{x}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{t}\right)^2}$$
$u=\frac{x}{t}$ とおくと，$x=tu$ であるから，両辺を t で微分して
$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$
これらを方程式に代入して
$$u+t\frac{du}{dt}=u+\sqrt{1+u^2}$$
すなわち，$t\frac{du}{dt}=\sqrt{1+u^2}$
$\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dt}=\frac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると
$$\int\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du=\int\frac{1}{t}\,dt$$
これより
$$\log\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|=\log|t|+c \quad (c\text{ は任意定数})$$
$$\log\left|\frac{u+\sqrt{u^2+1}}{t}\right|=c$$
$$\left|\frac{u+\sqrt{u^2+1}}{t}\right|=e^c$$

$$\frac{u+\sqrt{u^2+1}}{t}=\pm e^c$$
$$u+\sqrt{u^2+1}=Ct \qquad (\pm e^c=C)$$
$$\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2}{t^2}+1}=Ct$$
$$\frac{x}{t}+\sqrt{\frac{x^2+t^2}{t^2}}=Ct$$
$$\frac{x}{t}+\frac{\sqrt{x^2+t^2}}{t}=Ct$$
$$x+\sqrt{x^2+t^2}=Ct^2$$
$$\sqrt{x^2+t^2}=Ct^2-x$$
$$(\sqrt{x^2+t^2})^2=(Ct^2-x)^2$$
$$x^2+t^2=C^2t^4-2Ct^2x+x^2$$
$$2Ct^2x=C^2t^4-t^2$$
$$x=\frac{1}{2Ct^2}(C^2t^4-t^2)$$

よって，$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}\left(Ct^2-\frac{1}{C}\right)}$

（5）　$u=\dfrac{x}{t}$ とおくと，$x=tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これらを方程式に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=u(\log u+1)=u\log u+u$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt}=u\log u$

$\dfrac{1}{u\log u}\,\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{u\log u}\,du=\int\frac{1}{t}\,dt$$

左辺において，$\log u=v$ とおくと，$\dfrac{1}{u}\,du=dv$ であるから

$$左辺=\int\frac{1}{v}\,dv$$
$$=\log|\,v\,|=\log|\log u\,|$$

よって，$\log|\log u\,|=\log|\,t\,|+c$　（c は任意定数）

これより

$$\log\left|\frac{\log u}{t}\right|=c$$
$$\left|\frac{\log u}{t}\right|=e^c$$
$$\frac{\log u}{t}=\pm e^c$$
$$\log u=\pm e^c t$$
$$\log u=Ct \qquad (\pm e^c=C)$$
$$u=e^{Ct}$$

よって，$\boldsymbol{x=te^{Ct}}$

（6）　i）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}+\frac{2x}{t}=0$$
$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2x}{t}$$
$$\frac{1}{x}\,\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=-\int\frac{2}{t}\,dt$$

これより

$$\log|\,x\,|=-2\log|\,t\,|+c \qquad (c\text{ は任意定数})$$
$$\log|\,xt^2\,|=c$$

よって

$$|\,xt^2\,|=e^c$$
$$xt^2=\pm e^c$$

$\pm e^c=C$ とおくと

$$x=\frac{C}{t^2} \qquad (C\text{ は任意定数})$$

ii）　$x=\dfrac{u}{t^2}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}\,\frac{1}{t^2}+u\cdot\left(-\frac{2}{t^3}\right)$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{1}{t^2}\,\frac{du}{dt}-\frac{2u}{t^3}+\frac{2u}{t^3}=\cos 2t$$
$$\frac{du}{dt}=t^2\cos 2t$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int t^2\cos 2t\,dt$$
$$u=t^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2t-\int 2t\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\,dt+c$$
$$=\frac{1}{2}t^2\sin 2t-\int t\sin 2t\,dt+c$$
$$=\frac{1}{2}t^2\sin 2t$$
$$-\left\{t\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)-\int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\,dt\right\}+c$$
$$=\frac{1}{2}t^2\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t-\int\frac{1}{2}\cos 2t\,dt+c$$
$$=\frac{1}{2}t^2\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t+c$$
$$=\frac{1}{4}(2t^2-1)\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t+c$$

よって，求める一般解は

$$x=\frac{1}{t^2}\left\{\frac{1}{4}(2t^2-1)\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t+c\right\}$$
$$x=\frac{1}{4t^2}\left\{(2t^2-1)\sin 2t+2t\cos 2t+4c\right\}$$

$4c=C$ とおいて，

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{4t^2}\{(2t^2-1)\sin 2t+2t\cos 2t+C\}}$$

（C は任意定数）

〔別解〕　（積分因子を利用）

$$\int\frac{2}{t}\,dt=2\log|\,t\,|$$

方程式の両辺に，$e^{2\log|\,t\,|}=|\,t^2\,|$ をかけると

$$t^2\,\frac{dx}{dt}+2tx=t^2\cos 2t$$
$$(t^2x)'=t^2\cos 2t$$

よって

$$t^2x=\int t^2\cos 2t\,dt \qquad (\text{右辺の途中の計算は省略})$$
$$=\frac{1}{4}(2t^2-1)\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t+c$$

（c は任意定数）

したがって，$4c=C$ とおいて

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{4t^2}\{(2t^2-1)\sin 2t+2t\cos 2t+C\}}$$

（7）　i）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t\log t}=0$$
$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{t\log t}$$
$$\frac{1}{x}\,\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t\log t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=-\int\frac{1}{t\log t}\,dt$$

これより

$$\log|\,x\,|=-\log|\log t\,|+c \qquad (c\text{ は任意定数})$$

⟵ 右辺の積分は（5）を参照

$$\log|\,x\log t\,|=c$$

よって

$$|x\log t| = e^c$$

$$x\log t = \pm e^c$$

$\pm e^c = C$ とおくと

$$x = \frac{C}{\log t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

ii）　$x = \dfrac{u}{\log t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{1}{\log t} + u\cdot\left(-\frac{\frac{1}{t}}{(\log t)^2}\right)$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{1}{\log t}\frac{du}{dt} - \frac{u}{t(\log t)^2} + \frac{u}{t(\log t)^2} = \frac{2}{t}$$

$$\frac{1}{\log t}\frac{du}{dt} = \frac{2}{t}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{2\log t}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int du = \int \frac{2\log t}{t}\,dt$$

$$u = 2\cdot\frac{1}{2}(\log t)^2 + C$$

$$= (\log t)^2 + C$$

※ 右辺は，$\log t = u$ とおいて置換積分

よって，求める一般解は

$$x = \frac{1}{\log t}\{(\log t)^2 + C\}$$

すなわち，$\boldsymbol{x = \log t + \dfrac{C}{\log t}}$　　(C は任意定数)

〔別解〕　（積分因子を利用）

$$\int \frac{1}{t\log t}\,dt = \log|\log t|$$

方程式の両辺に，$e^{\log|\log t|} = |\log t|$ をかけると

$$\log t\,\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = \frac{2\log t}{t}$$

$$(x\log t)' = \frac{2\log t}{t}$$

よって

$$x\log t = \int \frac{2\log t}{t}\,dt$$

$$= (\log t)^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

したがって

$$\boldsymbol{x = \log t + \frac{C}{\log t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

189　時刻 t における物体の温度を $x = x(t)$，比例定数を $-k$　$(k > 0)$ とすると

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - 30)$$

これを解くと

$$\frac{1}{x-30}\frac{dx}{dt} = -k$$

$$\int \frac{1}{x-30}\,dx = \int (-k)\,dt$$

$$\log|x - 30| = -kt + c$$

$$x - 30 = \pm e^c\cdot e^{-kt}$$

$$x = Ce^{-kt} + 30 \quad (\pm e^c = C \text{ は任意定数})$$

ここで，$t = 0$ のとき，$x = 90$，$t = 30$ のとき，$x = 60$ であるから

$$90 = C + 30 \cdots ①$$

$$60 = Ce^{-30k} + 30 \cdots ②$$

① より，$C = 60$

② に代入して，$60 = 60e^{-30k} + 30$

これより

$$60e^{-30k} = 30$$

$$e^{-30k} = \frac{1}{2}$$

$$-30k = \log\frac{1}{2} = -\log 2$$

よって，$k = \dfrac{1}{30}\log 2$

以上より，$x(t) = 60e^{-\left(\frac{1}{30}\log 2\right)t} + 30$

これに，$t = 30 + 30 = 60$ を代入して

$$x(60) = 60e^{-\left(\frac{1}{30}\log 2\right)\cdot 60} + 30$$

$$= 60e^{-2\log 2} + 30$$

$$= 60e^{\log\frac{1}{4}} + 30$$

$$= 60\cdot\frac{1}{4} + 30 \qquad \leftarrow e^{\log\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$= 15 + 30 = 45$$

したがって，物体の温度は **45 °C**

190（1）与えられた方程式を変形すると，$\dfrac{dx}{dt} = \left(\dfrac{x}{t}\right)^2 + 2\cdot\dfrac{x}{t}$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと，$x = tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$$

これらを方程式に代入して

$$u + t\frac{du}{dt} = u^2 + 2u$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt} = u^2 + u$ より，$\dfrac{1}{u^2+u}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}\cdots①$ となる．

ここで，$\dfrac{1}{u^2+u} = \dfrac{1}{u(u+1)} = \dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{u+1}$ とおくと

$$1 = a(u+1) + bu$$

$$1 = (a+b)u + a$$

この等式は，u についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

これを解いて，$a = 1$，$b = -1$

よって，$\dfrac{1}{u(u+1)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u+1}$

したがって，① は

$$\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

となるので，両辺を t について積分すると

$$\int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \int\frac{1}{t}\,dt$$

$$\log|u| - \log|u+1| = \log|t| + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\log\left|\frac{u}{t(u+1)}\right| = c$$

$$\frac{u}{t(u+1)} = \pm e^c$$

$$u = Ct(u+1) \quad (\pm e^c = C)$$

$u = \dfrac{x}{t}$ より

$$\frac{x}{t} = Ct\left(\frac{x}{t} + 1\right)$$

$$\frac{x}{t} = Cx + Ct$$

$$x = Ctx + Ct^2$$

$$(1 - Ct)x = Ct^2$$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{Ct^2}{1 - Ct}}$　　(C は任意定数)

（2）与えられた方程式を変形すると，$\dfrac{dx}{dt} = 2\left(\dfrac{x}{t}\right)^2 + 2\cdot\dfrac{x}{t} - 1$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと，$x = tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$$

これらを方程式に代入して

$$u + t\frac{du}{dt} = 2u^2 + 2u - 1$$

すなわち

$t\dfrac{du}{dt}=2u^2+u-1$ より，$\dfrac{1}{2u^2+u-1}\;\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{t}\cdots$①

となる．

ここで

$\dfrac{1}{2u^2+u-1}=\dfrac{1}{(2u-1)(u+1)}=\dfrac{a}{2u-1}+\dfrac{b}{u+1}$ と

おくと

$$1=a(u+1)+b(2u-1)$$

$$1=(a+2b)u+a-b$$

この等式は，u についての恒等式であるから

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=\dfrac{2}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$

よって，$\dfrac{1}{(2u-1)(u+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{2u-1}-\dfrac{1}{u+1}\right)$

したがって，① は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\frac{du}{dt}=\frac{1}{t}$$

となるので，両辺を t について積分すると

$$\frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{2u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=\int\frac{1}{t}\,dt$$

$$\log|2u-1|-\log|u+1|=3\log|t|+c$$

（c は任意定数）

$$\log\left|\frac{2u-1}{t^3(u+1)}\right|=c$$

$$\frac{2u-1}{t^3(u+1)}=\pm e^c$$

$$2u-1=Ct^3(u+1)\qquad(\pm e^c=C)$$

$u=\dfrac{x}{t}$ より

$$\frac{2x}{t}-1=Ct^3\left(\frac{x}{t}+1\right)$$

$$\frac{2x}{t}-1=Ct^2x+Ct^3$$

$$2x-t=Ct^3x+Ct^4$$

$$(2-Ct^3)x=Ct^4+t$$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{Ct^4+t}{2-Ct^3}}$　　（C は任意定数）

191（1）　与えられた方程式を変形すると，

$$\frac{dx}{dt}=-100e^{-3t}+80-4x$$

$$\frac{dx}{dt}+4x=-100e^{-3t}+80$$

※ 積分因子を利用します．

$\displaystyle\int 4\,dt=4t$ より，両辺に e^{4t} をかけると

$$e^{4t}\frac{dx}{dt}+e^{4t}4x=e^{4t}(-100e^{-3t}+80)$$

$$(xe^{4t})'=-100e^t+80e^{4t}$$

$$\begin{aligned}xe^{4t}&=\int(-100e^t+80e^{4t})\,dt\\&=-100e^t+\frac{1}{4}\cdot 80e^{4t}+C\\&=-100e^t+20e^{4t}+C\end{aligned}$$

よって，
$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{1}{e^{4t}}(-100e^t+20e^{4t}+C)\\&=-100e^{-3t}+20+\frac{C}{e^{4t}}\\&=-100e^{-3t}+20+Ce^{-4t}\end{aligned}$$

ここで，$x(0)=10$ より，$10=-100+20+C$

これより，$C=90$

以上より，$\boldsymbol{x(t)=-100e^{-3t}+90e^{-4t}+20}$

（2）
$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}x(t)&=\lim_{t\to\infty}(-100e^{-3t}+90e^{-4t}+20)\\&=-100\cdot 0+90\cdot 0+20\\&=\boldsymbol{20}\end{aligned}$$