4章　微分方程式

§2　2階微分方程式 (p.49〜p.)

BASIC

192 (1)　$x = C_1 e^{-2t} + C_2$ より

$\dfrac{dx}{dt} = -2C_1 e^{-2t}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4C_1 e^{-2t} = -2\cdot\left(-2C_1 e^{-2t}\right) = -2\dfrac{dx}{dt}$

また，2 個の任意定数を含むから，一般解である．

(2)　$x = C_1 e^{-2t} + C_2$ に，$t=0$, $x=1$ を代入して

$1 = C_1 + C_2 \cdots$①

$\dfrac{dx}{dt} = -2C_1 e^{-2t}$ に，$t=0$, $\dfrac{dx}{dt}=2$ を代入して

$2 = -2C_1 \cdots$②

② より，$C_1 = -1$

これを ① に代入して，$1 = -1 + C_2$

これより，$C_2 = 2$

よって，$\boldsymbol{x = -e^{-2t} + 2}$

(3)　$x = C_1 e^{-2t} + C_2$ に，$t=0$, $x=0$ および，$t=1$, $x=1$ を代入すると

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 & \cdots① \\ 1 = C_1 e^{-2} + C_2 & \cdots② \end{cases}$$

② − ① より

$1 = C_1 e^{-2} - C_1$

これより，$C_1(e^{-2}-1) = 1$ であるから，$C_1 = \dfrac{1}{e^{-2}-1}$

これと ① より，$C_2 = -C_1 = -\dfrac{1}{e^{-2}-1}$

よって，$x = \dfrac{1}{e^{-2}-1}e^{-2t} - \dfrac{1}{e^{-2}-1}$ であるから，$\boldsymbol{x = \dfrac{e^{-2t}-1}{e^{-2}-1}}$

193 (1)　$x = \sin 2t$ とおく．

$\dfrac{dx}{dt} = 2\cos 2t$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -4\sin 2t$

これらを方程式の左辺に代入すると

左辺 $= -4\sin 2t + 4\sin 2t = 0$

よって，$x = \sin 2t$ は与えられた微分方程式の解である．

同様に，$x = \cos 2t$ とおく．

$\dfrac{dx}{dt} = -2\sin 2t$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -4\cos 2t$

これらを方程式の左辺に代入すると

左辺 $= -4\cos 2t + 4\cos 2t = 0$

よって，$x = \cos 2t$ は与えられた微分方程式の解である．

(2)　$x = C_1\sin 2t + C_2\cos 2t$ とおく．

$\dfrac{dx}{dt} = 2C_1\cos 2t - 2C_2\sin 2t$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -4C_1\sin 2t - 4C_2\cos 2t$

これらを方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= -4C_1\sin 2t - 4C_2\cos 2t \\ &\qquad + 4(C_1\sin 2t + C_2\cos 2t) \\ &= -4C_1\sin 2t - 4C_2\cos 2t \\ &\qquad + 4C_1\sin 2t + 4C_2\cos 2t = 0 \end{aligned}$$

よって，$x = C_1\sin 2t + C_2\cos 2t$ は与えられた微分方程式の解である．

194 (1)　$(\log t)' = \dfrac{1}{t}$

$(t\log t)' = \log t + t\cdot\dfrac{1}{t} = \log t + 1$

よって

$$\begin{aligned} W(\log t,\ t\log t) &= \begin{vmatrix} \log t & t\log t \\ \dfrac{1}{t} & \log t + 1 \end{vmatrix} \\ &= \log t(\log t + 1) - t\log t\cdot\dfrac{1}{t} \\ &= (\log t)^2 + \log t - \log t \\ &= (\log t)^2 \end{aligned}$$

$(\log t)^2$ は, 恒等的に 0 にはならないので, 関数 $\log t$, $t\log t$ は線形独立である．

(2)　$(e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t}$

$(e^{\beta t})' = \beta e^{\beta t}$

よって

$$\begin{aligned} W(e^{\alpha t},\ e^{\beta t}) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha t} & e^{\beta t} \\ \alpha e^{\alpha t} & \beta e^{\beta t} \end{vmatrix} \\ &= e^{\alpha t}\cdot\beta e^{\beta t} - e^{\beta t}\cdot\alpha e^{\alpha t} \\ &= \beta e^{(\alpha+\beta)t} - \alpha e^{(\alpha+b)t} \\ &= (\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)t} \end{aligned}$$

$e^{(\alpha+\beta)t} \fallingdotseq 0$ であり，$\alpha \fallingdotseq \beta$ であるから，$(\beta-\alpha)e^{(\alpha+\beta)t}$ が恒等的に 0 になることはない．

したがって，関数 $e^{\alpha t}$, $e^{\beta t}$ は線形独立である．

195 (1)　$x = e^{-t}$ とおく．

$\dfrac{dx}{dt} = -e^{-t}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}$

よって

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= e^{-t} + 2\left(-e^{-t}\right) + e^{-t} \\ &= e^{-t} - 2e^{-t} + e^{-t} = 0 = \text{右辺} \end{aligned}$$

したがって，$x = e^{-t}$ は与えられた微分方程式の解である．

同様に，$x = te^{-t}$ とおく．

$\dfrac{dx}{dt} = e^{-t} + t(-e^{-t}) = e^{-t} - te^{-t}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -e^{-t} - \{e^{-t} + t(-e^{-t})\} = -2e^{-t} + te^{-t}$

よって

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= -2e^{-t} + te^{-t} + 2(e^{-t} - te^{-t}) + te^{-t} \\ &= -2e^{-t} + te^{-t} + 2e^{-t} - 2te^{-t} + te^{-t} \\ &= 0 = \text{右辺} \end{aligned}$$

したがって，$x = te^{-t}$ は与えられた微分方程式の解である．

また

$$\begin{aligned} W(e^{-t},\ te^{-t}) &= \begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{vmatrix} \\ &= e^{-t}(e^{-t} - te^{-t}) - te^{-t}\cdot(-e^{-t}) \\ &= e^{-2t} - te^{-2t} + te^{-2t} \\ &= e^{-2t} \fallingdotseq 0 \end{aligned}$$

以上より，e^{-t} と te^{-t} は線形独立な解である．

（2）　e^{-t} と te^{-t} は与えられた微分方程式の線形独立な解であるから，一般解は

$$\boldsymbol{x = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

または

$$\boldsymbol{x = (C_1 + C_2t)e^{-t}} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

196（1）　$x = t^2 + t - 1$ とすると，　$\dfrac{dx}{dt} = 2t + 1,\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2$ であるから

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= 2 + 2(2t + 1) + (t^2 + t - 1)\\ &= 2 + 4t + 2 + t^2 + t - 1\\ &= t^2 + 5t + 3 = \text{右辺}\end{aligned}$$

よって，$t^2 + t - 1$ は，与えられた微分方程式の解である．

（2）　**195** より，斉次の場合の解は，　$x = (C_1 + C_2t)e^{-t}$

また，非斉次の場合の 1 つの解が，$x = t^2 + t - 1$ であるから，一般解は

$$\boldsymbol{x = t^2 + t - 1 + (C_1 + C_2t)e^{-t}}$$

$(C_1,\ C_2$は任意定数$)$

197（1）　特性方程式 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ を解くと

$(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda = -2,\ -1$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

（2）　特性方程式 $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ を解くと

$\lambda(\lambda - 3) = 0$

$\lambda = 0,\ 3$

よって，一般解は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= C_1e^{0t} + C_2e^{3t}\\ &= \boldsymbol{C_1 + C_2e^{3t}} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})\end{aligned}$$

（3）　特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$ を解くと

$$\begin{aligned}\lambda &= -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot 10}\\ &= -1 \pm \sqrt{-9}\\ &= -1 \pm 3\,i\end{aligned}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x = e^{-t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)}$$

$(C_1,\ C_2$は任意定数$)$

（4）　特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ を解くと

$(\lambda + 2)^2 = 0$

$\lambda = -2$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x = (C_1 + C_2t)e^{-2t}} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

（5）　特性方程式 $\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$ を解くと

$$\begin{aligned}\lambda &= -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 7}\\ &= 2 \pm \sqrt{-3}\\ &= 2 \pm \sqrt{3}\,i\end{aligned}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x = e^{2t}(C_1 \cos \sqrt{3}\,t + C_2 \sin \sqrt{3}\,t)}$$

$(C_1,\ C_2$は任意定数$)$

（6）　特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$ を解くと

$$\begin{aligned}\lambda &= -(-3) \pm \sqrt{3^2 - 1 \cdot 7}\\ &= 3 \pm \sqrt{2}\end{aligned}$$

よって，一般解は

$$\boldsymbol{x = C_1e^{(3+\sqrt{2})t} + C_2e^{(3-\sqrt{2})t}}$$

$(C_1,\ C_2$は任意定数$)$

198（1）　特性方程式 $\lambda^2 + 9 = 0$ を解くと

$\lambda^2 = -9$

$\lambda = \pm 3\,i$

よって，一般解は

$x = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t \quad (C_1,\ C_2$は任意定数$) \cdots$①

また，これより

$\dfrac{dx}{dt} = -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t \cdots$②

① に，$t = 0,\ x = 2$ を代入して，$2 = C_1$

② に，$t = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 1$ を代入して，$1 = 3C_2$

よって，$C_1 = 2,\ C_2 = \dfrac{1}{3}$

したがって，求める解は

$$\boldsymbol{x = 2 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t}$$

（2）　特性方程式 $\lambda^2 + \lambda + \dfrac{1}{4} = 0$ を解くと

$\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\lambda = -\dfrac{1}{2}$

よって，一般解は

$x = (C_1 + C_2t)e^{-\frac{t}{2}} \quad (C_1,\ C_2$は任意定数$) \cdots$①

また，これより

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= C_2 \cdot e^{-\frac{t}{2}} + (C_1 + C_2t) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}(2C_2 - C_1 - C_2t)e^{-\frac{t}{2}} \cdots ②\end{aligned}$$

① に，$t = 0,\ x = 2$ を代入して，$2 = C_1$

② に，$t = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 1$ を代入して，$1 = \dfrac{1}{2}(2C_2 - C_1)$

$C_1 = 2$ を，$1 = \dfrac{1}{2}(2C_2 - C_1)$ に代入して

$1 = \dfrac{1}{2}(2C_2 - 2)$

$1 = C_2 - 1$

よって，$C_1 = 2,\ C_2 = 2$

したがって，求める解は

$x = (2 + 2t)e^{-\frac{t}{2}}$

すなわち，$\boldsymbol{x = 2(t + 1)e^{-\frac{t}{2}}}$

199　右辺は 2 次式で，x の係数は 0 ではないから，$x = At^2 + Bt + C$ と予想すると

$\dfrac{dx}{dt} = 2At + B,\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2A$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$2A - (2At + B) + 2(At^2 + Bt + C) = 4t^2$$

$$2At^2 + (-2A + 2B)t + (2A - B + 2C) = 4t^2$$

よって

$$\begin{cases} 2A = 4\\ -2A + 2B = 0\\ 2A - B + 2C = 0\end{cases}$$

これを解いて，$A = 2,\ B = 2,\ C = -1$

したがって，1 つの解は

$$\boldsymbol{x = 2t^2 + 2t - 1}$$

〔別解〕　（微分演算子による解法）

与えられた微分方程式は

$$(D^2-D+2)x=4t^2$$

と表せるので

$$x=\frac{1}{D^2-D+2}4t^2$$

山辺の方法を用いると

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2t^2\ +2t\ -1 \\ \hline
2\ -D\ +D^2 & 4t^2 \\
 & \underline{4t^2\ -4t\ +4} \\
 & 4t\ -4 \\
 & \underline{4t\ -2} \\
 & -2 \\
 & \underline{-2} \\
 & 0
\end{array}
$$

よって，$\boldsymbol{x=2t^2+2t-1}$

〔または〕

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{1}{D^2-D+2}4t^2\\
&=\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}D+\frac{1}{2}D^2\right)}4t^2\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\left\{1-\left(\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}D^2\right)\right\}}t^2\\
&=2\left\{1+\left(\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}D^2\right)+\left(\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}D^2\right)^2+\cdots\right\}t^2\\
&=2\left(1+\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}D^2+\frac{1}{4}D^2-\frac{1}{2}D^3+\cdots\right)t^2\\
&=2\left(1+\frac{1}{2}D-\frac{1}{4}D^2+\cdots\right)t^2\\
&=2\left(t^2+\frac{1}{2}\cdot 2t-\frac{1}{4}\cdot 2\right)\\
&=2\left(t^2+t-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{2t^2+2t-1}
\end{aligned}
$$

200　斉次の場合の特性方程式を解くと，

$\lambda^2+4\lambda-5=0$ より，$\lambda=-5,\ 1$ であるから，e^{-t} は一般解には含まれない．

$x=Ae^{-t}$ と予想すると

$$\frac{dx}{dt}=-Ae^{-t},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=Ae^{-t}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
Ae^{-t}+4\cdot(-Ae^{-t})-5Ae^{-t}&=2e^{-t}\\
-8Ae^{-t}&=2e^{-t}
\end{aligned}
$$

よって，$-8A=2$ であるから，$A=-\frac{1}{4}$

したがって，1 つの解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{4}e^{-t}}$$

〔別解〕　（微分演算子による解法）

与えられた微分方程式は

$$(D^2+4D-5)x=2e^{-t}$$

と表せるので

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{1}{D^2+4D-5}\cdot 2e^{-t}\\
&=2\cdot\frac{1}{(-1)^2+4\cdot(-1)-5}\cdot e^{-t}\\
&=2\cdot\frac{1}{-8}\cdot e^{-t}\\
&=\boldsymbol{-\frac{1}{4}e^{-t}}
\end{aligned}
$$

201　斉次の場合の特性方程式を解くと，

$\lambda^2+2\lambda+1=0$ より，$\lambda=-1$（重解）であるから，$\cos 2t$ は一般解には含まれない．

$x=A\cos 2t+B\sin 2t$ と予想すると

$$\frac{dx}{dt}=-2A\sin 2t+2B\cos 2t,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-4A\cos 2t-4B\sin 2t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
-4A\cos 2t-4B\sin 2t+2(-2A\sin 2t+2B\cos 2t)&\\
+(A\cos 2t+B\sin 2t)&=5\cos 2t\\
(-4A+4B+A)\cos 2t+(-4B-4A+B)\sin 2t&=5\cos 2t\\
(-3A+4B)\cos 2t+(-4A-3B)\sin 2t&=5\cos 2t
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{cases}
-3A+4B=5 & \cdots①\\
-4A-3B=0 & \cdots②
\end{cases}
$$

① × 3 + ② × 4 より，$-25A=15$ であるから，$A=-\frac{3}{5}$

これを ② に代入して，$\frac{12}{5}-3B=0$

これより，$B=\frac{4}{5}$

したがって，1 つの解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{3}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\sin 2t}$$

〔別解〕　（微分演算子による解法）

与えられた微分方程式は

$$(D^2+2D+1)x=5\cos 2t$$

と表せるので

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{1}{D^2+2D+1}\cdot 5\cos 2t\\
&=5\cdot\frac{1}{(D^2+1)+2D}\cos 2t\\
&=5\cdot\frac{(D^2+1)-2D}{(D^2+1)^2-4D^2}\cos 2t\\
&=5\cdot\frac{(-4+1)-2D}{(-4+1)^2-4\cdot(-4)}\cos 2t\\
&=5\cdot\frac{-3-2D}{25}\cos 2t\\
&=-\frac{1}{5}(3+2D)\cos 2t\\
&=-\frac{1}{5}\{3\cos 2t+2\cdot(-2\sin 2t)\}\\
&=\boldsymbol{-\frac{3}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\sin 2t}
\end{aligned}
$$

202（1）　特性方程式 $\lambda^2+\lambda-6=0$ を解くと，$\lambda=-3,\ 2$ であるから，e^{-3t} は斉次の場合の一般解に含まれる．

よって，$x=Ate^{-3t}$ と予想する．

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=A(e^{-3t}-3te^{-3t})=A(1-3t)e^{-3t}\\
\frac{d^2x}{dt^2}&=A\{-3e^{-3t}+(1-3t)\cdot(-3e^{-3t})\}\\
&=-3A(2-3t)e^{-3t}
\end{aligned}
$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
-3A(2-3t)e^{-3t}+A(1-3t)e^{-3t}-6Ate^{-3t}&=e^{-3t}\\
-5Ae^{-3t}&=e^{-3t}
\end{aligned}
$$

よって，$A=-\frac{1}{5}$

したがって，1 つの解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{5}te^{-3t}}$$

〔別解〕　（微分演算子による解法）

与えられた微分方程式は

$$(D^2+D-6)x=e^{-3t}$$

と表せるので

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{D^2+D-6}e^{-3t} \\
&= \frac{1}{(D+3)(D-2)}e^{-3t} \\
&= \frac{1}{D+3}\left(\frac{1}{D-2}e^{-3t}\right) \\
&= \frac{1}{D+3}\left(\frac{1}{-3-2}e^{-3t}\right) \\
&= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{D+3}e^{-3t} \\
&= -\frac{1}{5}e^{-3t}\frac{1}{(D-3)+3}e^{3t}e^{-3t} \\
&= -\frac{1}{5}e^{-3t}\frac{1}{D}1 = \boldsymbol{-\frac{1}{5}te^{-3t}}
\end{aligned}
$$

（2）　特性方程式 $\lambda^2+1=0$ を解くと，$\lambda=\pm i$ であるから，$\sin t$ は斉次の場合の一般解に含まれる．

よって，$x=t(A\cos t+B\sin t)$ と予想する．

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= (A\cos t+B\sin t) \\
&\qquad + t(-A\sin t+B\cos t) \\
&= (A+Bt)\cos t+(-At+B)\sin t \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= B\cos t-(A+Bt)\sin t \\
&\qquad - A\sin t+(-At+B)\cos t \\
&= (-At+2B)\cos t-(2A+Bt)\sin t
\end{aligned}
$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&(-At+2B)\cos t-(2A+Bt)\sin t \\
&\qquad + t(A\cos t+B\sin t) = 3\sin t \\
&2B\cos t-2A\sin t = 3\sin t
\end{aligned}
$$

よって，$-2A=3,\ 2B=0$ であるから，$A=-\dfrac{3}{2},\ B=0$

したがって，1 つの解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{3}{2}t\cos t}$$

〔別解〕　（微分演算子による解法）

与えられた微分方程式は

$$(D^2+1)x=3\sin t$$

と表せるので

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{D^2+1}\cdot 3\sin t \\
&= 3\cdot\frac{1}{D^2+1^2}\sin t \\
&= 3\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot 1}\right)t\cos t \\
&= \boldsymbol{-\frac{3}{2}t\cos t}
\end{aligned}
$$

203（1）　特性方程式 $\lambda^2-4\lambda+4=0$ を解くと，$\lambda=2$（重解）であるから，斉次の場合の一般解は

$$x=(C_1+C_2t)e^{2t}\qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

与えられた微分方程式の 1 つの解を $x=Ae^{-3t}$ と予想する．

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -3Ae^{-3t} \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= 9Ae^{-3t}
\end{aligned}
$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
9Ae^{-3t}-4\cdot(-3Ae^{-3t})+4Ae^{-3t} &= 5e^{-3t} \\
25Ae^{-3t} &= 5e^{-3t}
\end{aligned}
$$

よって，$25A=5$ より，$A=\dfrac{1}{5}$

したがって，1 つの解は

$$x=\frac{1}{5}e^{-3t}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{5}e^{-3t}+(C_1+C_2t)e^{2t}}$$

$(C_1,\ C_2$は任意定数$)$

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕　（微分演算子）

与えられた微分方程式は

$$(D^2-4D+4)x=5e^{-3t}$$

と表せるので

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{D^2-4D+4}5e^{-3t} \\
&= \frac{5}{(-3)^2-4\cdot(-3)+4}e^{-3t} \\
&= \frac{5}{25}e^{-3t}=\frac{1}{5}e^{-3t}
\end{aligned}
$$

（2）　特性方程式 $\lambda^2-2\lambda-3=0$ を解くと，$\lambda=-1,\ 3$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}\qquad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

与えられた微分方程式の 1 つの解を $x=At+B$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt}=A,\ \frac{d^2x}{dt^2}=0$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&0-2A-3(At+B)=3t-1 \\
&-3At+(-2A-3B)=3t-1
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{cases}
-3A=3 \\
-2A-3B=-1
\end{cases}
$$

これを解いて，$A=-1,\ B=1$

したがって，1 つの解は

$$x=-t+1$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=-t+1+C_1e^{-t}+C_2e^{3t}}$$

$(C_1,\ C_2$は任意定数$)$

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕　（微分演算子）

与えられた微分方程式は

$$(D^2-2D-3)x=3t-1$$

と表せるので

$$x=\frac{1}{D^2-2D-3}(3t-1)$$

山辺の方法を用いると

$$
\begin{array}{r|l}
 & -t\ +1 \\
\hline
-3\ -2D\ +D^2 & 3t\ -1 \\
 & 3t\ +2 \\
\hline
 & \quad -3 \\
 & \quad -3 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

よって，$x=-t+1$

〔または〕

$$x = \frac{1}{D^2-2D-3}(3t-1)$$
$$= \frac{1}{-3\left(1+\frac{2}{3}D-\frac{1}{3}D^2\right)}(3t-1)$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left\{1-\left(-\frac{2}{3}D+\frac{1}{3}D^2\right)\right\}}(3t-1)$$
$$= -\frac{1}{3}\left\{1+\left(-\frac{2}{3}D+\frac{1}{3}D^2\right) + \left(-\frac{2}{3}D+\frac{1}{3}D^2\right)^2+\cdots\right\}(3t-1)$$
$$= -\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}D+\frac{1}{3}D^2+\frac{4}{9}D^2+\cdots\right)(3t-1)$$
$$= -\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}D+\cdots\right)(3t-1)$$
$$= -\frac{1}{3}\left\{(3t-1)-\frac{2}{3}\cdot 3\right\}$$
$$= -\frac{1}{3}(3t-1-2)$$
$$= -\frac{1}{3}(3t-3) = -t+1$$

（3）　特性方程式 $\lambda^2-2\lambda+5=0$ を解くと，$\lambda=1\pm 2i$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x = e^t(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)\quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

与えられた微分方程式の 1 つの解を $x=A\cos 3t+B\sin 3t$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt} = -3A\sin 3t + 3B\cos 3t$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -9A\cos 3t - 9B\sin 3t$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$-9A\cos 3t - 9B\sin 3t - 2(-3A\sin 3t+3B\cos 3t) + 5(A\cos 3t + B\sin 3t) = 2\sin 3t$$
$$(-4A-6B)\cos 3t + (6A-4B)\sin 3t = 2\sin 3t$$

よって

$$\begin{cases} -4A-6B=0 & \to 2A+3B=0\cdots ① \\ 6A-4B=2 & \to 3A-2B=1\cdots ② \end{cases}$$

① $\times 2+$ ② $\times 3$ より，$13A=3$

これより，$A=\frac{3}{13}$

これを ① に代入して，$\frac{6}{13}+3B=0$

よって，$B=-\frac{2}{13}$

したがって，1 つの解は

$$x = \frac{3}{13}\cos 3t - \frac{2}{13}\sin 3t$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{13}\cos 3t - \frac{2}{13}\sin 3t + e^t(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)}$$

$(C_1,\ C_2$は任意定数$)$

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕（微分演算子）

与えられた微分方程式は

$$(D^2-2D+5)x = 2\sin 3t$$

と表せるので

$$x = \frac{1}{D^2-2D+5}(2\sin 3t)$$
$$= 2\cdot\frac{1}{(D^2+5)-2D}\sin 3t$$
$$= 2\cdot\frac{(D^2+5)+2D}{(D^2+5)^2-4D^2}\sin 3t$$
$$= 2\cdot\frac{(-9+5)+2D}{(-9+5)^2-4\cdot(-9)}\sin 3t$$
$$= 2\cdot\frac{-4+2D}{52}\sin 3t$$
$$= \frac{1}{13}(-2+D)\sin 3t$$
$$= \frac{1}{13}(-2\sin 3t + 3\cos 3t)$$
$$= \frac{3}{13}\cos 3t - \frac{2}{13}\sin 3t$$

（4）　特性方程式 $\lambda^2-4\lambda+3=0$ を解くと，$\lambda=1,\ 3$ であるから，斉次の場合の一般解は

$$x = C_1e^t + C_2e^{3t}\quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

与えられた微分方程式の 1 つの解を $x=Ate^{3t}$ と予想する．

$$\frac{dx}{dt} = A(e^{3t}+3te^{3t}) = A(1+3t)e^{3t}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\{3e^{3t}+(1+3t)\cdot 3e^{3t}\} = 3A(2+3t)e^{3t}$$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$3A(2+3t)e^{3t} - 4\cdot A(1+3t)e^{3t} + 3\cdot Ate^{3t} = e^{3t}$$
$$2Ae^{3t} = e^{3t}$$

よって，$2A=1$ より，$A=\frac{1}{2}$

したがって，1 つの解は

$$x = \frac{1}{2}te^{3t}$$

以上より，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}te^{3t} + C_1e^t + C_2e^{3t}}\quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

〔非斉次の特殊解の求め方の別解〕（微分演算子）

与えられた微分方程式は

$$(D^2-4D+3)x = e^{3t}$$

と表せるので

$$x = \frac{1}{D^2-4D+3}e^{3t}$$
$$= \frac{1}{(D-3)(D-1)}e^{3t}$$
$$= \frac{1}{D-3}\left(\frac{1}{D-1}e^{3t}\right)$$
$$= \frac{1}{D-3}\left(\frac{1}{3-1}e^{3t}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{D-3}e^{3t}$$
$$= \frac{1}{2}e^{3t}\frac{1}{(D+3)-3}e^{-3t}e^{3t}$$
$$= \frac{1}{2}e^{3t}\frac{1}{D}1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}te^{3t}}$$

204　2 式を，上から ①, ② とする．

① より，$y=\frac{dx}{dt}+2x+e^{2t}\cdots ①'$

①$'$ を t で微分すると，$\frac{dy}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+2e^{2t}$

これらを，② に代入すると

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+2e^{2t} = x-2\left(\frac{dx}{dt}+2x+e^{2t}\right)+e^{2t}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+3x = -3e^{2t}\cdots ③$$

③ の特性方程式 $\lambda^2+4\lambda+3=0$ を解くと，$\lambda=-3,\ -1$ であるから，斉次の場合の一般解は

$x = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}$

また，③ の 1 つの解を，$x = Ae^{2t}$ と予想すると

$\dfrac{dx}{dt} = 2Ae^{2t}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4Ae^{2t}$

これを ③ に代入すると

$$4Ae^{2t} + 4\cdot 2Ae^{2t} + 3Ae^{2t} = -3e^{2t}$$

$$15Ae^{2t} = -3e^{2t}$$

よって，$15A = -3$ より，$A = -\dfrac{1}{5}$

以上より，x の一般解は

$x = -\dfrac{1}{5}e^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}$

また，$\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2}{5}e^{2t} - C_1e^{-t} - 3C_2e^{-3t}$ であるから，これを ①$'$ に代入して

$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{5}e^{2t} - C_1e^{-t} - 3C_2e^{-3t} \\ &\quad + 2\left(-\frac{1}{5}e^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}\right) + e^{2t} \\ &= \frac{1}{5}e^{2t} + C_1e^{-t} - C_2e^{-3t} \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = -\dfrac{1}{5}e^{2t} + C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{1}{5}e^{2t} + C_1e^{-t} - C_2e^{-3t}} \end{cases} \quad (C_1,\ C_2\text{は任意定数})$$

〔③の特殊解の求め方の別解〕　（微分演算子）

与えられた微分方程式は

$(D^2 + 4D + 3)y = -3e^{2t}$

と表せるので

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{D^2+4D+3}(-3e^{2t}) \\ &= -\frac{3}{D^2+4D+3}e^{2t} \\ &= -\frac{3}{2^2+4\cdot 2+3}e^{2t} \\ &= -\frac{3}{15}e^{2t} = -\frac{1}{5}e^{2t} \end{aligned}$$

205（1）　両辺を t^2 で割ると

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{4}{t}\frac{dx}{dt} + \frac{6}{t^2}x = 0$$

$x = t^\alpha$ の形の解があると予想する．

$\dfrac{dx}{dt} = \alpha t^{\alpha-1}$，$\dfrac{d^2x}{dt^2} = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$\alpha(\alpha-1)t^\alpha - 4\alpha t^\alpha + 6t^\alpha = 0$$

$$\{\alpha(\alpha-1) - 4\alpha + 6\}t^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2 - 5\alpha + 6)t^\alpha = 0$$

$$(\alpha-2)(\alpha-3)t^\alpha = 0$$

よって，$\alpha = 2,\ 3$

したがって，t^2 と t^3 は与えられた微分方程式の解であり，かつ線形独立である．（線形独立であることの証明は略）

よって，求める一般解は

$\boldsymbol{x = C_1t^2 + C_2t^3}$　$(C_1,\ C_2$は任意定数)

（2）　両辺を t^2 で割ると

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{5}{t}\frac{dx}{dt} + \frac{9}{t^2}x = 0$$

$x = t^\alpha$ の形の解があると予想する．

$\dfrac{dx}{dt} = \alpha t^{\alpha-1}$，$\dfrac{d^2x}{dt^2} = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$

これらを，与えられた微分方程式に代入すると

$$\alpha(\alpha-1)t^\alpha - 5\alpha t^\alpha + 9t^\alpha = 0$$

$$\{\alpha(\alpha-1) - 5\alpha + 9\}t^\alpha = 0$$

$$(\alpha^2 - 6\alpha + 9)t^\alpha = 0$$

$$(\alpha-3)^2t^\alpha = 0$$

よって，$\alpha = 3$

したがって，t^3 は与えられた微分方程式の解であるから，$x = Ct^3$ も解である．（C は任意定数）

線形独立である 2 つの解を見つけるために，$x = ut^3$ とおく．（u は t の関数）

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{du}{dt}t^3 + u\cdot(t^3)' \\ &= \frac{du}{dt}t^3 + 3ut^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2u}{dt^2}t^3 + 2\frac{du}{dt}\cdot(t^3)' + u\cdot(t^3)'' \\ &= \frac{d^2u}{dt^2}t^3 + 2\frac{du}{dt}\cdot 3t^2 + u\cdot 6t \\ &= \frac{d^2u}{dt^2}t^3 + 6\frac{du}{dt}t^2 + 6ut \end{aligned}$$

与えられた微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2u}{dt^2}t^4 + 4\frac{du}{dt}t^3 + 2ut^2 - 3\left(\frac{du}{dt}t^3 + 2ut^2\right) + 4ut^2 = 0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}t + \frac{du}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}t\right) = 0$$

よって，$\dfrac{du}{dt}t = C_1$

$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{C_1}{t}$

両辺を t について積分すると

$$\int du = \int \frac{C_1}{t}\,dt$$

$$u = C_1\log|t| + C_2$$

したがって，$x = t^3(C_1\log|t| + C_2)$ は解であり，かつ $t^3\log|t|$ と t^3 は線形独立である．

よって，求める一般解は

$\boldsymbol{x = t^3(C_1\log|t| + C_2)}$　　$(C_1,\ C_2$は任意定数)

206（1）　$\dfrac{dy}{dx} = p$ とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ であるから

$$\frac{dp}{dx} - (p+1)^2 = 0$$

$$\frac{1}{(p+1)^2}\frac{dp}{dx} = 1$$

両辺を x について積分すると

$$\int \frac{1}{(p+1)^2}\,dp = \int dx$$

$-\dfrac{1}{p+1} = x + C_1$　$(C_1$は任意定数)

$$p + 1 = -\frac{1}{x+C_1}$$

$$p = -\frac{1}{x+C_1} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+C_1} - 1$$

両辺を x について積分すると

$$\int dy = \int\left(-\frac{1}{x+C_1} - 1\right)dx$$

$\boldsymbol{y = -\log|x+C_1| - x + C_2}$　$(C_1,\ C_2$は任意定数)

（2）　$\dfrac{dy}{dx} = p$ とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ であるから

$$\frac{dp}{dx} = 2\sqrt{p}$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dx} = 2$$

両辺を x について積分すると

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{p}}\,dp = \int 2\,dx$

$2\sqrt{p} = 2x + c$　(c は任意定数)

$\sqrt{p} = x + \dfrac{c}{2} = x + C_1$　$\left(\dfrac{c}{2} = C_1\right)$

$p = (x + C_1)^2$

$\dfrac{dy}{dx} = (x + C_1)^2$

両辺を x について積分すると

$\displaystyle\int dy = \int (x + C_1)^2\,dx$

$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2}$　(C_1，C_2は任意定数)

207　$\dfrac{dy}{dx} = p$ とおくと，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ であるから

$\dfrac{dp}{dx} + \dfrac{1}{2}p^3 = 0$

$\dfrac{1}{p^3}\,\dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{1}{2}$

両辺を x で積分すると

$\displaystyle\int \frac{1}{p^3}\,dp = -\frac{1}{2}\int dx$

$-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{p^2} = -\dfrac{1}{2}x + c$　(c は任意定数)

$\dfrac{1}{p^2} = x - 2c = x + C_1$　$(-2c = C_1)$

$p^2 = \dfrac{1}{x + C_1}$

$x = 0$ のとき，$p = 1$ であるから

$1 = \dfrac{1}{C_1}$，すなわち，$C_1 = 1$

これより，$p = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ であるが，$p = -\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ は，$x = 0$ のとき，$p = -1$ となるので不適.

よって，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

両辺を x について積分すると

$\displaystyle\int dy = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$y = 2\sqrt{x+1} + C_2$

$x = 0$ のとき，$y = 1$ であるから

$1 = 2\sqrt{1} + C_2$

$1 = 2 + C_2$，すなわち，$C_2 = -1$

以上より，$\boldsymbol{y = 2\sqrt{x+1} - 1}$