1章詳説　関数の展開

§1　関数の展開　(p.64〜p.)

BASIC

233（1）

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{\{(2n+3)-2n\}\{(2n+3)+2n\}}{6n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3(4n+3)}{6n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(4n+3)\cdot\frac{1}{n}}{2n\cdot\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n}}{2} = \frac{4+0}{2} = \mathbf{2}$$

（2）

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n^3-n)\cdot\frac{1}{n^3}}{(n^3+1)\cdot\frac{1}{n^3}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}$$
$$= \frac{3-0}{1+0} = \mathbf{3}$$

（3）

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n-1}-n)(\sqrt{n^2+2n-1}+n)}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n-1})^2-n^2}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1-n^2}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n-1}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+2n-1}+n)\cdot\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}$$
$$= \frac{2-0}{\sqrt{1+0-0}+1} = \frac{2}{1+1} = \mathbf{1}$$

（4）

$$与式 = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-1})^2-(\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)-(n+1)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}} = \mathbf{0}$$

234　それぞれの等比数列の公比を r とする．

（1）　$r = -\dfrac{7}{5} < -1$

よって，この等比数列は，**発散する．（振動する．）**

（2）　$r = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$-1 < r < 1$ より，この等比数列は，**0 に収束する．**

（3）

$$r = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$
$$= 2+\sqrt{3} > 1$$

よって，この等比数列は，**∞ に発散する．**

（4）　$\left\{\dfrac{2^n}{3^n}\right\} = \left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ であるから，$r = \dfrac{2}{3}$

$-1 < r < 1$ より，この等比数列は，**0 に収束する．**

（1）　$f(x) = x\tan\dfrac{2}{x}$ とおき，さらに $\dfrac{2}{x} = y$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} n\tan\frac{2}{n} = \lim_{x\to\infty} x\tan\frac{2}{x}$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{2}{y}\tan y$$
$$= 2\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}$$
$$= 2\cdot 1 = \mathbf{2}$$

（2）　$f(x) = \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ とおき，さらに $x = 2y$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$$
$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}$$
$$= \lim_{y\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right\}^2 = \boldsymbol{e^2}$$

235（1）　関数 $\dfrac{\log x}{e^x}$ をとり，ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{e^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{e^x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^x} = \mathbf{0}$$

（2）　関数 $\dfrac{\log(x^2+1)}{x^2}$ をとり，ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^2+1)}{n^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2+1)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\{\log(x^2+1)\}'}{(x^2)'}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1} = \mathbf{0}$$

236

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{3^n n!+2^n n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{6^n\times\frac{1}{3^n n!}}{(3^n n!+2^n n^3)\times\frac{1}{3^n n!}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6^n}{3^n n!}}{1+\frac{2^n n^3}{3^n n!}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n!}}{1+\frac{2^n}{n!}\cdot\frac{n^3}{3^n}}$$
$$= \frac{0}{1+0\cdot 0} = \mathbf{0}$$

237　第 n 部分和を S_n とすると

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}$$
$$= (\log 2-\log 1)+(\log 3-\log 2)+(\log 4-\log 3)+\cdots$$
$$\cdots+(\log(n+1)-\log n)$$
$$= \log(n+1)-\log 1 = \log(n+1)$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\log(n+1) = \infty$

したがって，この級数は**発散**する．

238（1）　与えられた級数の一般項を a_n とすると，$a_n=\dfrac{n}{2n-1}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0$$

よって，この級数は発散する．

（2）　$a_n=\dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)\cdot\frac{1}{n^2}}{(n+2)(n+3)\cdot\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\frac{1+0}{(1+0)(1+0)}=1\neq 0$$

よって，この級数は発散する．

239　それぞれの等比数列の公比を r とする．

（1）　$r=-\dfrac{1}{3}$

$-1<r<1$ であるからこの等比数列は，**0 に収束する．**

（2）　$r=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$

$-1<r<1$ であるからこの等比数列は，**0 に収束する．**

（3）　$r=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}>1$$

よって，この等比数列は，**∞ に発散する．**

（4）　$\left\{\dfrac{5^n}{3^n}\right\}=\left\{\left(\dfrac{5}{3}\right)^n\right\}$ であるから，$r=\dfrac{5}{3}>1$

よって，この等比数列は，**∞ に発散する．**

240　関数 $y=\dfrac{1}{x\log x}$ と長方形の面積の和について，次の式が成り立つ．

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}+\cdots+\frac{1}{n\log n}>\int_2^{n+1}\frac{1}{x\log x}\,dx$$

ここで，　$\displaystyle\int_2^{n+1}\frac{1}{x\log x}\,dx=\Big[\log|\log x|\Big]_2^{n+1}$　$\cdots$※

$$=\log|\log(n+1)|-\log|\log 2|=\log\left|\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right|$$

与えられた級数の第 n 部分和を S_n とすると，

$$S_n>\log\left|\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right|$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\left|\frac{\log(n+1)}{\log 2}\right|=\infty$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

したがって，この級数は発散する．

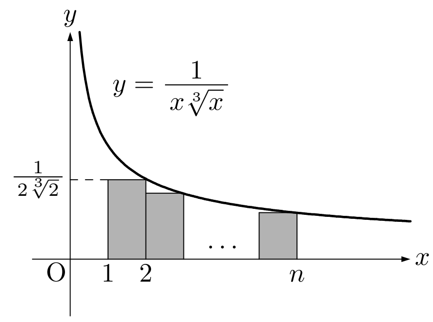
※ 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x\log x}\,dx$ について．（積分定数は省略）

$\log x=t$ とおくと，$\dfrac{1}{x}\,dx=dt$

よって，$\displaystyle\int\frac{1}{x\log x}\,dx=\int\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt=\log|t|=\log|\log x|$

241　図のように，関数 $y=\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$ と影をつけた部分の面積を考えると

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}<\int_1^n\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$$



ここで，$\displaystyle\int_1^n\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\,dx=\int_1^n x^{-\frac{4}{3}}\,dx=\left[-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right]_1^n=-3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{\sqrt[3]{1}}\right)=3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

与えられた級数の第 n 部分和を S_n とすると

$$S_n<1+3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)=4-\frac{3}{\sqrt[3]{n}}<4$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n\leqq 4$ となり，この級数は収束する．

242（1）　$n\geqq 1$ のとき，$0\leqq n^2-1<n^2$

また，$n^4+2n+2>n^4>0$ より，$\dfrac{1}{n^4+2n+2}<\dfrac{1}{n^4}$

よって，$\dfrac{n^2-1}{n^4+2n+2}<\dfrac{n^2}{n^4}=\dfrac{1}{n^2}$

すなわち，$\dfrac{n^2-1}{n^4+2n+2}<\dfrac{1}{n^2}$

（2）　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束する（例題 6）ので，与えられた級数も収束する．

243（1）　$|(-1)^n|=1$，$n^2>0$ より

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\left|\frac{1}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$$

ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束する（例題 6）ので，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|$ も収束する．

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ も収束する．

（2）　$|\cos n|\leqq 1$

また，$\sqrt{n^3+1}>\sqrt{n^3}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$

よって，$\left|\dfrac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}}\right|\leqq\dfrac{1}{|\sqrt{n^3+1}|}<\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ は収束する（問 9）ので，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}}\right|$ も収束する．

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}}$ も収束する．

244　それぞれの等比級数の公比を r とする．

（1）　$r=2$ であるから，この等比級数は**発散**する．

（2）　$r=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$|r|<1$ であるから，この等比級数は**収束**し，その和は

$$\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$
$$=\frac{4-2\sqrt{2}}{2-1}=\boldsymbol{4-2\sqrt{2}}$$

245　点 P の x 座標は

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots$$

となり，初項 1，公比 $\dfrac{1}{2^2}$ の等比級数の和になるから

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}$$
$$=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

点 P の y 座標は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots$$

となり，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2^2}$ の等比級数の和になるから

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

よって，点 P は，$\left(\boldsymbol{\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}}\right)$ に限りなく近づく．

246　与えられたべき級数は，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2}x$ の等比級数だから，$\left|-\dfrac{1}{2}x\right|<1$ のとき，すなわち，$|x|<2$ のときに限り収束するので，収束半径は **2** である．

247　前問より，$1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{8}x^3+\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2^n}x^n+\cdots$ は $|x|<2$ のとき収束し，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}x\right)}=\frac{2}{2+x}$$

よって，$1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{8}x^3+\dfrac{1}{16}x^4+\cdots=\dfrac{2}{x+2}\cdots$①

（1）　$|x|<2$ のとき，①の両辺を x で微分すると

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{4}x^3-\cdots=\{2(x+2)^{-1}\}'$$
$$=-2(x+2)^{-2}$$
$$=-\frac{2}{(x+2)^2}$$

したがって，$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{1}{4}x^3-\cdots=-\dfrac{2}{(x+2)^2}$

（2）　①の両辺を 0 から x まで積分すると

$$x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{32}x^4+\cdots=\int_0^x\frac{2}{x+2}\,dx$$
$$=\Big[2\log|x+2|\Big]_0^x$$
$$=2\{\log|x+2|-\log|2|\}$$
$$=2\log\frac{x+2}{2}$$

したがって，$x-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{12}x^3-\dfrac{1}{32}x^4+\cdots=2\log\dfrac{x+2}{2}$

248　$f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x$ より，$f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x$ より，$f''(0)=-1$

$f'''(x)=\sin x$ より，$f'''(0)=0$

$f^{(4)}(x)=\cos x$ より，$f^{(4)}(0)=1$

$f^{(5)}(x)=-\sin x$

マクローリンの定理を適用すると

$$f(x)=1+\frac{1}{2\,!}\cdot(-1)\cdot x^2+\frac{1}{4\,!}\cdot 1\cdot x^4+R_5$$
$$=\boldsymbol{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+R_5}$$
$$R_5=\frac{1}{5\,!}(-\sin\theta x)x^5$$
$$=\boldsymbol{-\frac{\sin\theta x}{120}x^5}\quad(0<\theta<1)$$

249　$f(-1)=-1$

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ より，$f'(-1)=-1$

$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$ より，$f''(-1)=-2$

$f'''(x)=-\dfrac{3\,!}{x^4}$ より，$f'''(-1)=-6$

$f^{(4)}(x)=\dfrac{4\,!}{x^5}$

テイラーの定理を適用すると

$$f(x)=-1+(-1)\cdot\{x-(-1)\}+\frac{1}{2\,!}\cdot(-2)\{x-(-1)\}^2$$
$$+\frac{1}{3\,!}\cdot(-6)\cdot\{x-(-1)\}^3+R_4$$
$$=\boldsymbol{-1-(x+1)-(x+1)^2-(x+1)^3+R_4}$$
$$R_4=\frac{1}{4\,!}\cdot\frac{4\,!}{\{-1+\theta(x-(-1))\}^5}\{x-(-1)\}^4$$
$$=\boldsymbol{\frac{(x+1)^4}{\{-1+\theta(x+1)\}^5}}\quad(0<\theta<1)$$

250　$f'(x)=2xe^{-x}+x^2\cdot(-e^{-x})=(2x-x^2)e^{-x}$

$f''(x)=(2-2x)e^{-x}+(2x-x^2)\cdot(-e^{-x})=(x^2-4x+2)e^{-x}$

$f'(x)=0$ より，$x(2-x)=0$ すなわち，$x=0,\ 2$

i）$x=0$ のとき

$f''(0)=(0-0+2)e^0=2>0$

また，$f(0)=0$

よって，$x=0$ で**極小値 0** をとる．

ii）$x=2$ のとき

$f''(2)=(4-8+2)e^{-2}=-2e^{-2}<0$

また，$f(2)=2^2e^{-2}=\dfrac{4}{e^2}$

よって，$x=2$ で**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{4}{e^2}}$ をとる．

251　$f'(x)=15x^2+6x+6-6e^x$

これより，$f'(0)=6-6\cdot1=0$

$f''(x)=30x+6-6x^x$

これより，$f''(0)=6-6\cdot1=0$

$f'''(x)=30-6x^x$

これより，$f'''(0)=30-6\cdot1=24\fallingdotseq 0$

以上より，$f(x)$ は $x=0$ で極値をとらない．

252　テイラーの定理より

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2\,!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3\,!}(x-a)^3+\cdots$$
$$+\frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)\,!}(x-a)^{2n}+R_{2n+1}$$

ただし，$R_{2n+1} = \dfrac{f^{(2n+1)}(a+\theta(x-a))}{(2n+1)\,!}(x-a)^{2n+1}, \quad 0<\theta<1$

$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(2n)}(a) = 0$ であるから

$f(x) = f(a) + R_{2n+1}$

すなわち

$$f(x) - f(a) = R_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(a+\theta(x-a))}{(2n+1)\,!}(x-a)^{2n+1}$$

$f^{(2n+1)}(x)$ が連続で，$\displaystyle\lim_{x\to a} f^{(2n+1)}(x) = f^{(2n+1)}(a) \fallingdotseq 0$ であるから，x が a に十分近ければ，$f^{(2n+1)}(a+\theta(x-a))$ と $f^{(2n+1)}(a)$ の正負は一致する．よって，左辺 $f(x)-f(a)$ の正負は，$(x-a)^{2n+1}$ の符号で決まり，これは，$x<a$ のときと $x>a$ ときとで異なる．したがって，関数 $f(x)$ は $x=a$ で極値をとらない．

253　$n=4$ としてテイラーの定理を適用する．

$f(0) = 1$

$f^{(n)}(x) = e^x$ より，$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$

よって

$$f(x) = 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x^2 + \frac{1}{3\,!}\cdot 1\cdot x^3 + R_4$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + R_4$$

$$\varepsilon_3 = R_4 = \frac{1}{4\,!}e^{\theta x}x^4$$

$$= \frac{e^{\theta x}}{24}x^4 \quad 0<\theta<1$$

以上より，$f(x)$ の 3 次近似式は，$\boldsymbol{1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3}$ であるから，e の近似値は

$$e = e^{0+1} \fallingdotseq 1 + 1 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{6}\cdot 1^3$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{6+6+3+1}{6} = \frac{16}{6} = 2.666\cdots$$

$$\boldsymbol{= 2.667}$$

また，誤差の限界は，$e<3$ を用いて

$$|\,\varepsilon_3\,| = \frac{e^\theta}{24}\cdot 1^4 < \frac{3}{24}$$

$$\boldsymbol{= 0.125}$$

254　$f'(x) = -e^{-x}$，$f''(x) = e^{-x}$，$\cdots$ より，$f^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$

よって，$f^{(n)}(0) = (-1)^n$

したがって，マクローリンの定理より

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2\,!}x^3 + \frac{f'''(0)}{3\,!}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2\,!}x^2 - \frac{1}{3\,!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

ここで，$R_n = (-1)^n\dfrac{e^{-\theta x}}{n\,!}x^n \quad 0<\theta<1$

$-\theta x \leqq |-\theta x| = |\theta x|$

また，$0<\theta<1$ より，$|\theta x| \leqq |x|$ であるから，$-\theta x \leqq |x|$

すなわち，$e^{-\theta x} \leqq e^{|x|}$

$$|\,R_n\,| = \left|(-1)^n\frac{e^{-\theta x}}{n\,!}x^n\right| \leqq \left|\frac{e^{|x|}x^n}{n\,!}\right| = e^{|x|}\frac{|\,x\,|^n}{n\,!}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|\,x\,|^n}{n\,!} = 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|\,R_n\,| = 0$ となる．

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n = 0$ が成り立つから，任意の x に対して

$$e^{-x} = \boldsymbol{1 - x + \frac{1}{2\,!}x^2 - \frac{1}{3\,!}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}x^n + \cdots}$$

255（1）　左辺 $= e^{(\pi i)n}$

$$= (e^{\pi i})^n$$

$$= (\cos\pi + i\,\sin\pi)^n$$

$$= (-1 + i\cdot 0)^n$$

$$= (-1)^n = \text{右辺}$$

（2）　左辺 $= e^{(\frac{\pi}{2}i)n}$

$$= (e^{\frac{\pi}{2}i})^n$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}\right)^n$$

$$= (0 + i\cdot 1)^n$$

$$= i^n = \text{右辺}$$

256　$f'(x) = 2ie^{2ix} - 2ie^{-2ix}$

$f''(x) = 4i^2e^{2ix} + 4i^2e^{-2ix} = -4e^{2ix} - 4e^{-2ix}$

よって

左辺 $= (-4e^{2ix} - 4e^{-2ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix})$

$$= -4e^{2ix} - 4e^{-2ix} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix}$$

$$= 0 = \text{右辺}$$

CHECK

257（1）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(4n-5)}{1-3n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-6n-5}{1-3n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(8n^2-6n-5)\cdot\dfrac{1}{n^2}}{(1-3n^2)\cdot\dfrac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8-\dfrac{6}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-3} = -\frac{8}{3}$$

よって，$\boldsymbol{-\dfrac{8}{3}}$ **に収束する．**

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-3})$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-3})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-3})}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)-(2n-3)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-3}} = 0$$

よって，**0 に収束する．**

（3）　$-1 \leqq \sin\dfrac{n}{2} \leqq 1$ であるから，$-\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n}{2} \leqq \dfrac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n}{2} = 0$$

よって，**0 に収束する．**

（4）$a_n = n\sin\dfrac{n\pi}{2}$ とすると

$a_1 = 1\cdot\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

$a_2 = 2\cdot\sin\pi = 0$

$a_3 = 3\cdot\sin\dfrac{3}{2}\pi = -3$

$a_4 = 4\cdot\sin 2\pi = 0$

$a_5 = 5\cdot\sin\dfrac{5}{2}\pi = 5$

$\vdots$

以上より，a_n は**発散（振動）する．**

258　$\dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)=\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{n(n+1)}{2n^2}$

これより

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)\cdot\frac{1}{n^2}}{2n^2\cdot\frac{1}{n^2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ **に収束する．**

259　それぞれの等比数列の公比を r とする．

（1）　$r=\sqrt{7}-\sqrt{3}$

r の絶対値と 1 を比較するために，r^2 を求めると

$$r^2=(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2$$
$$=7-2\sqrt{21}+3$$
$$=10-\sqrt{84}$$

ここで，$9<\sqrt{84}<10$ より，$-10<-\sqrt{84}<-9$ であるから

$10-10<10-\sqrt{84}<10-9$, すなわち $0<10-\sqrt{84}<1$

したがって，$r^2<1$ となるので，$|r|<1$

よって，この等比数列は，**0 に収束する．**

（2）　$r=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

r の絶対値と 1 を比較するために，r^2 を求めると

$$r^2=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$$
$$=6-2\sqrt{12}+2$$
$$=8-\sqrt{48}$$

ここで，$6<\sqrt{48}<7$ より，$-7<-\sqrt{48}<-6$ であるから

$8-7<8-\sqrt{48}<8-6$，すなわち $1<8-\sqrt{48}<2$

よって，$r>1$ なので，この等比数列は，**発散する**

260（1）　関数 $\dfrac{\log x}{\log(x^2+1)}$ をとり，ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log(n^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\log(x^2+1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{\{\log(x^2+1)\}'}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x\cdot x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（2）　関数 $x\left(e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$ をとり，さらに，$\dfrac{1}{x}=y$ とし，ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{n\to\infty}n\left(e^{\frac{2}{n}}-e^{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(e^{2y}-e^{y}\right)$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^{2y}-e^{y}}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{(e^{2y}-e^{y})'}{y'}$$
$$=\lim_{y\to 0}(2e^{2y}-e^{y})$$
$$=2-1=\mathbf{1}$$

261（1）　与えられた級数の一般項を a_n とすると，$a_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}\cdot\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1\neq 0$$

よって，この級数は発散する．

（2）　$n\geqq 1$ のとき，$e^n>1$ であるから，$e^{-n}=\dfrac{1}{e^n}<1$

よって，$\dfrac{e^{-n}}{n^2}<\dfrac{1}{n^2}$

ここで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するので，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{n^2}$ も収束する．

262　それぞれの等比級数の公比を r とする．

（1）　$r=\dfrac{\frac{1}{3\sqrt{3}}}{\frac{1}{9}}=\sqrt{3}>1$ であるから，この等比級数は**発散**する．

（2）　$r=-\dfrac{1}{3}$ より，$|r|<1$ であるから，この等比級数は**収束**し，その和は

$$\frac{3}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{1+\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{3}{\frac{4}{3}}=\boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

263　与えられたべき級数は，初項 1，公比 $3x^2$ の等比級数だから，$|3x^2|<1$ のとき，すなわち，$|x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときに限り収束するので，収束半径は $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ である．

264　$f(0)=\dfrac{1}{1+0}=1$

$f'(x)=-(1+x)^{-2}=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ より，$f'(0)=-1$

$f''(x)=2(1+x)^{-3}=\dfrac{2}{(1+x)^3}$ より，$f''(0)=2$

$f'''(x)=-6(1+x)^{-4}=-\dfrac{3\,!}{(1+x)^4}$ より，$f'''(0)=-6$

$f^{(4)}(x)=\dfrac{4\,!}{(1+x)^5}$

マクローリンの定理を適用すると

$$f(x)=1+(-1)\cdot x+\frac{1}{2\,!}\cdot 2x^2+\frac{1}{3\,!}\cdot(-6)\cdot x^3+R_4$$
$$\boldsymbol{=1-x+x^2-x^3+R_4}$$
$$R_4=\frac{1}{4\,!}\cdot\frac{4\,!}{(1+\theta x)^5}x^4$$
$$=\boldsymbol{\frac{x^4}{(1+\theta x)^5}}\quad(0<\theta<1)$$

265　$f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \log x + 1$

$f''(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0$ より，$\log x + 1 = 0$ すなわち，$x = \dfrac{1}{e}$

$x = \dfrac{1}{e}$ のとき

$f''\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0$

また，$f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} \cdot \log \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{e} \cdot (-1) = -\dfrac{1}{e}$

よって，$x = \dfrac{1}{e}$ で**極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{e}}$ をとる．

266　$n = 3$ としてテイラーの定理を適用する．

$f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より，$f'(1) = \dfrac{1}{2}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$ より，$f''(1) = -\dfrac{1}{4}$

$f'''(x) = \dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)(x-1)^2 + R_3 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + R_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = R_3 &= \frac{1}{3!} \cdot \frac{3\{1+\theta(x-1)\}^{-\frac{5}{2}}}{8}(x-1)^3 \\ &= \frac{1}{16\{1+\theta(x-1)\}^{\frac{5}{2}}}(x-1)^3 \qquad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

以上より，$f(x)$ の 2 次近似式は，$\boldsymbol{1 + \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{8}(x-1)^2}$

であるから，$\sqrt{1.2}$ の近似値は

$$\begin{aligned} \sqrt{1.2} &\fallingdotseq 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.2 - \frac{1}{8} \cdot 0.2^2 \\ &= 1 + 0.1 - \frac{1}{8} \cdot 0.04 \\ &= \frac{8 + 0.8 - 0.04}{8} = \frac{8.76}{8} = \mathbf{1.095} \end{aligned}$$

また，誤差の限界は

$$\begin{aligned} |\,\varepsilon_2\,| = \frac{1}{16(1+0.2\theta)^{\frac{5}{2}}}(0.2)^3 &< \frac{1}{16} \cdot 0.008 \\ &= \mathbf{0.0005} \end{aligned}$$

267　$f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$

$f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$f'''(x) = \lambda^3 e^{\lambda x}$

$f^{(4)}(x) = \lambda^4 e^{\lambda x}$

（1）上の式を与式に代入して

$$\lambda^3 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0$$

$$(\lambda^3 - 3\lambda - 2)e^{\lambda x} = 0$$

$e^{\lambda x} \neq 0$ より，$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$

$f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$ とおくと，$f(-1) = 0$ より

$f(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$

よって，$(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$ より，$\boldsymbol{\lambda = -1,\ 2}$

（2）上の式を与式に代入して

$$\lambda^4 e^{\lambda x} + \lambda^2 e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2+1)e^{\lambda x} = 0$$

$e^{\lambda x} \neq 0$ より，$\lambda^2(\lambda^2+1) = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$ より，$\lambda = \pm i$

よって，$\boldsymbol{\lambda = 0,\ \pm i}$

∎