2章　偏微分

練習問題 1-A

1. $f_x(0,\ 0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,\ 0)-f(0,\ 0)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{h^3-0}{h^2+0}-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{h^3}{h^2}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=\mathbf{1}$

$f_y(0,\ 0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0,\ 0+h)-f(0,\ 0)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{0-h^3}{0+h^2}-0}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{-h^3}{h^2}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{-h}{h}=\mathbf{-1}$

2. (1) $z_x=\dfrac{2x(x-3y)-x^2y\cdot 1}{(x-3y)^2}$

$=\dfrac{2x^2y-6xy^2-x^2y}{(x-3y)^2}$

$=\dfrac{x^2y-6xy^2}{(x-3y)^2}=\boldsymbol{\dfrac{xy(x-6y)}{(x-3y)^2}}$

$z_y=\dfrac{x^2(x-3y)-x^2y\cdot(-3)}{(x-3y)^2}$

$=\dfrac{x^3-3x^2y+3x^2y}{(x-3y)^2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x^3}{(x-3y)^2}}$

(2) $z_x=1\cdot e^{-xy}+x\cdot(-ye^{-xy})$

$=e^{-xy}-xye^{-xy}$

$=\boldsymbol{(1-xy)e^{-xy}}$

$z_y=x\cdot(-xe^{-xy})$

$=\boldsymbol{-x^2e^{-xy}}$

(3) $z_x=\dfrac{1}{\cos(x-2y)}\cdot\{-\sin(x-2y)\cdot 1\}$

$=-\dfrac{\sin(x-2y)}{\cos(x-2y)}=\boldsymbol{-\tan(x-2y)}$

$z_y=\dfrac{1}{\cos(x-2y)}\cdot\{-\sin(x-2y)\cdot(-2)\}$

$=\dfrac{2\sin(x-2y)}{\cos(x-2y)}=\boldsymbol{2\tan(x-2y)}$

(4) $z_x=2\sin(x+y)\cos(x+y)\cdot 1-2\sin x\cos x$

$=\boldsymbol{\sin 2(x+y)-\sin 2x}$　(倍角の公式により)

$z_y=2\sin(x+y)\cos(x+y)\cdot 1-2\sin y\cos y$

$=\boldsymbol{\sin 2(x+y)-\sin 2y}$　(倍角の公式により)

3. (1) $z_x=-\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{1}{y}$　　$z_y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{y^2}$

$=-\dfrac{x^2+y^2}{x^2y}$　　$=\dfrac{x^2+y^2}{xy^2}$

よって，$\boldsymbol{dz=-\dfrac{x^2+y^2}{x^2y}dx+\dfrac{x^2+y^2}{xy^2}dy}$

(2) $z_x=y\sin(x-y)+xy\cdot 1\cdot\cos(x-y)$

$=y\sin(x-y)+xy\cos(x-y)$

$z_y=x\sin(x-y)+xy\cdot(-1)\cdot\cos(x-y)$

$=x\sin(x-y)-xy\cos(x-y)$

よって

$\boldsymbol{dz=\{y\sin(x-y)+xy\cos(x-y)\}dx}$

$\boldsymbol{+\{x\sin(x-y)-xy\cos(x-y)\}dy}$

4. (1) $z_x=8x$　　$z_y=18y$

よって，点 $(-2,\ -1,\ 25)$ における接平面の方程式は

$z-25=8\cdot(-2)(x+2)+18\cdot(-1)(y+1)$

$z-25=-16(x+2)-18(y+1)$

$z-25=-16x-32-18y-18$

すなわち，$\boldsymbol{16x+18y+z=-25}$

(2) $z_x=\dfrac{1}{2\sqrt{3-x^2-y^2}}\cdot(-2x)$

$=-\dfrac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$

$z_y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2-y^2}}\cdot(-2y)$

$=-\dfrac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$

よって，点 $(1,\ 1,\ 1)$ における接平面の方程式は

$z-1=-\dfrac{1}{\sqrt{3-1^2-1^2}}(x-1)-\dfrac{1}{\sqrt{3-1^2-1^2}}(y-1)$

$z-1=-(x-1)-(y-1)$

$z-1=-x+1-y+1$

すなわち，$\boldsymbol{x+y+z=3}$

(3) $z_x=\cos(x+y)$　　$z_y=\cos(x+y)$

また，$x=\dfrac{\pi}{2}$，$y=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$z=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\pi=0$ であるから，点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ における接平面の方程式は

$z-0=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(y-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$z=\cos\pi\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\pi\left(y-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$z=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)-\left(y-\dfrac{\pi}{2}\right)$

すなわち，$\boldsymbol{x+y+z=\pi}$

5. (1) $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

$=\cos x\cos y\cdot e^t+\sin x\cdot(-\sin y)\cdot\dfrac{1}{t}$

$\boldsymbol{=e^t\cos(e^t)\cos(\log t)-\dfrac{1}{t}\sin(e^t)\sin(\log t)}$

(2) $z=\sin(e^t)\cos(\log t)$

$\dfrac{dz}{dt}=\{\sin(e^t)\}'\cos(\log t)+\sin(e^t)\{\cos(\log t)\}'$

$=\cos(e^t)\cdot e^t\cos(\log t)+\sin(e^t)\cdot\{-\sin(\log t)\}\cdot\dfrac{1}{t}$

$\boldsymbol{=e^t\cos(e^t)\cos(\log t)-\dfrac{1}{t}\sin(e^t)\sin(\log t)}$

6. $z_u = z_x x_u + z_y y_u$

$$= \frac{2x}{y}\cdot 1 - \frac{x^2}{y^2}\cdot 2$$

$$= \frac{2xy - 2x^2}{y^2} = \boldsymbol{\frac{2x(y-x)}{y^2}}$$

$z_v = z_x x_v + z_y y_v$

$$= \frac{2x}{y}\cdot(-2) - \frac{x^2}{y^2}\cdot 1$$

$$= \frac{-4xy - x^2}{y^2} = \boldsymbol{-\frac{x(4y+x)}{y^2}}$$

練習問題 1-B

1. $f(x,\ y)$ が点 $(0,\ 0)$ で連続であるための条件は，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\ y)$ が存在し

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\ y) = f(0,\ 0)$$

となることである．

ここで，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,\ y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{2x^2+2y^2}\right)$ を調べるために，まず $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{2x^2+2y^2}$ を考える．

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと，$(x,\ y)\to(0,\ 0)$ のとき，$r\to 0$ であるから

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{2x^2+2y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^3 + (r\sin\theta)^3}{2(r\cos\theta)^2 + 2(r\sin\theta)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{2r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{2r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{2}$$

$0 \leqq \left|\cos^3\theta + \sin^3\theta\right| \leqq 1$ より

$$0 \leqq \left|\frac{r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{2}\right| \leqq \left|\frac{r}{2}\right| = \frac{r}{2}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{r}{2} = 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{2} = 0$

以上より

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{2x^2+2y^2}\right) = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

したがって，$f(0,\ 0) = \dfrac{\pi}{2}$ であれば，$f(x,\ y)$ は，点 $(0,\ 0)$ で連続となる．よって，$\boldsymbol{k = \dfrac{\pi}{2}}$

2. （1） $z_x = 2ax + by, \quad z_y = bx + 2cy$

よって

$$左辺 = x(2ax+by) + y(bx+2cy)$$

$$= 2ax^2 + bxy + bxy + 2cy^2$$

$$= 2(ax^2 + bxy + cy^2)$$

$$= 2z = 右辺$$

（2）与えられた等式の両辺を t で偏微分すると

$$f_x(tx,\ ty)\frac{\partial}{\partial t}(tx) + f_y(tx,\ ty)\frac{\partial}{\partial t}(ty) = nt^{n-1}f(x,\ y)$$

$$xf_x(tx,\ ty) + yf_y(tx,\ ty) = nt^{n-1}f(x,\ y)$$

であるから，ここで，$t = 1$ とおけば

$$xf_x(x,\ y) + yf_y(x,\ y) = nf(x,\ y)$$

すなわち，$xz_x + yz_y = nz$

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2}f(u) + \dfrac{1}{x}\dfrac{d}{du}f(u)\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$

$$= -\frac{1}{x^2}f(u) - \frac{y}{x^3}\frac{d}{du}f(u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{d}{du}f(u)\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{d}{du}f(u)$$

よって

$$左辺 = x\left(-\frac{1}{x^2}f(u) - \frac{y}{x^3}\frac{d}{du}f(u)\right) + y\cdot\frac{1}{x^2}\frac{d}{du}f(u) + z$$

$$= -\frac{1}{x}f(u) - \frac{y}{x^2}\frac{d}{du}f(u) + \frac{y}{x^2}\frac{d}{du}f(u) + \frac{1}{x}f(u)$$

$$= 0 = 右辺$$

4. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ より

$$\frac{\partial T}{\partial l} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{l}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{gl}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi\sqrt{l}\cdot\left(-\frac{1}{2g\sqrt{g}}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

よって，$\Delta T \fallingdotseq \dfrac{\partial T}{\partial l}\Delta l + \dfrac{\partial T}{\partial g}\Delta g$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l - \frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}\Delta g$$

したがって

$$\frac{\Delta T}{T} \fallingdotseq \left(\frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l - \frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}\Delta g\right)\times\frac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{gl}}\Delta l - \frac{1}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}\Delta g\right)\times\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta g}{g}\right)$$

すなわち，$\dfrac{\Delta T}{T} \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Delta l}{l} - \dfrac{\Delta g}{g}\right)$

〔別解〕

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ の両辺の対数をとると

$$\log T = \log\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$$

$$= \log 2\pi + \log\sqrt{l} - \log\sqrt{g}$$

$$= \log 2\pi + \frac{1}{2}\log l - \frac{1}{2}\log g$$

両辺の全微分をとると

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l} - \frac{1}{2}\frac{dg}{g}$$

$\Delta l,\ \Delta g$ は微小であるから

$$\frac{\Delta T}{T} \fallingdotseq \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta g}{g}\right)$$

5. （1） $f_x(0,\ y) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,\ y) - f(0,\ y)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{|hy| - |0\cdot y|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{|hy|}{h}$$

$xy \neq 0$ より，$hy \neq 0$ であるから，この極限値は存在しない．

$$f_y(x,\ 0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,\ 0+h) - f(x,\ 0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{|xh| - |x\cdot 0|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{|xh|}{h}$$

$xy \fallingdotseq 0$ より，$xh \fallingdotseq 0$ であるから，この極限値は存在しない．

（2）$f_x(0,\ 0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h,\ 0) - f(0,\ 0)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{|h \cdot 0| - |0 \cdot 0|}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

$f_y(0,\ 0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0,\ 0+h) - f(0,\ 0)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{|0 \cdot h| - |0 \cdot 0|}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0$

よって，点 $(0,\ 0)$ における偏微分係数はいずれも存在し，その値は 0 である．

$\Delta z = f(0 + \Delta x,\ 0 + \Delta y) - f(0,\ 0)$

$= f_x(0,\ 0)\Delta x + f_y(0,\ 0)\Delta y + \varepsilon$ とすると

$|\Delta x\, \Delta y| - 0 = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \varepsilon$ より，$\varepsilon = |\Delta x\, \Delta y|$

ここで，$\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ について調べる．

$\Delta x = r\cos\theta,\ \Delta y = r\sin\theta$ とおくと，$(\Delta x,\ \Delta y) \to (0,\ 0)$ のとき，$r \to 0$ であるから

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{|\Delta x\, \Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{|r\cos\theta \cdot r\sin\theta|}{\sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^2|\cos\theta\sin\theta|}{r\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}$$

$$= \lim_{r \to 0} r|\cos\theta\sin\theta|$$

$0 \leqq |\cos\theta\sin\theta| = \left|\dfrac{\sin 2\theta}{2}\right| \leqq \dfrac{1}{2}$ より

$0 \leqq r|\cos\theta\sin\theta| \leqq \dfrac{r}{2}$

ここで，$\displaystyle\lim_{r \to 0} \frac{r}{2} = 0$ であるから，$\displaystyle\lim_{r \to 0} r|\cos\theta\sin\theta| = 0$

すなわち，$\displaystyle\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ となるので，$f(x,\ y)$ は，$(0,\ 0)$ で全微分可能である．

∎