2章　偏微分

問 1

（1） $z_y = 3x \cdot 2y - 3y^2 = 6xy - 3y^2$

よって

$$z_{yx} = \boldsymbol{6y}$$

$$z_{yy} = \boldsymbol{6x - 6y}$$

（2） $z_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$

よって

$$z_{yx} = \frac{-2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\boldsymbol{-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$z_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}}$$

問 2

（1） $z_x = -2 \cdot 4x^3y^3 = -8x^3y^3$

よって

$$z_{xx} = -8y^3 \cdot 3x^2$$

$$= \boldsymbol{-24x^2y^3}$$

$$z_{xy} = 8x^3 \cdot 3y^2$$

$$= \boldsymbol{-24x^3y^2}$$

$z_y = -2x^4 \cdot 3y^2 + 10y = -6x^4y^2 + 10y$

よって

$$z_{yx} = -6y^2 \cdot 4x^3$$

$$= \boldsymbol{-24x^3y^2}$$

$$z_{yy} = -6x^4 \cdot 2y + 10$$

$$= \boldsymbol{-12x^4y + 10}$$

（2） $z_x = e^{x^2-y^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2-y^2}$

よって

$$z_{xx} = 2 \cdot e^{x^2-y^2} + 2x \cdot 2xe^{x^2-y^2}$$

$$= 2e^{x^2-y^2} + 4x^2e^{x^2-y^2}$$

$$= \boldsymbol{2(2x^2+1)e^{x^2-y^2}}$$

$$z_{xy} = 2x \cdot e^{x^2-y^2} \cdot (-2y)$$

$$= \boldsymbol{-4xye^{x^2-y^2}}$$

$z_y = e^{x^2-y^2} \cdot (-2y) = -2ye^{x^2-y^2}$

よって

$$z_{yx} = -2ye^{x^2-y^2} \cdot 2x$$

$$= \boldsymbol{-4xye^{x^2-y^2}}$$

$$z_{yy} = -2 \cdot e^{x^2-y^2} - 2ye^{x^2-y^2} \cdot (-2y)$$

$$= -2e^{x^2-y^2} + 4y^2e^{x^2-y^2}$$

$$= \boldsymbol{2(2y^2-1)e^{x^2-y^2}}$$

（3） $z_x = -\sin 2x \cdot 2 \cdot \sin 7y = -2\sin 2x \sin 7y$

よって

$$z_{xx} = -2\cos 2x \cdot 2 \cdot \sin 7y$$

$$= \boldsymbol{-4\cos 2x \sin 7y}$$

$$z_{xy} = -2\sin 2x \cdot \cos 7y \cdot 7$$

$$= \boldsymbol{-14\sin 2x \cos 7y}$$

$z_y = \cos 2x \cdot \cos 7y \cdot 7 = 7\cos 2x \cos 7y$

よって

$$z_{yx} = 7(-\sin 2x) \cdot 2 \cdot \cos 7y$$

$$= \boldsymbol{-14\sin 2x \cos 7y}$$

$$z_{yy} = 7\cos 2x \cdot (-\sin 7y) \cdot 7$$

$$= \boldsymbol{-49\cos 2x \sin 7y}$$

（4） $z_x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

よって

$$z_{xx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$z_{xy} = \frac{-x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$= \frac{-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$z_y = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

よって

$$z_{yx} = \frac{-y \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$= \frac{-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$z_{yy} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}$$

問 3

（1） $z_x = 3x^2y^2 - y^3$

これより，$z_{xy} = 3x^2 \cdot 2y - 3y^2$

$= \boldsymbol{6x^2y - 3y^2}$

$z_y = x^3 \cdot 2y - x \cdot 3y^2 = 2x^3y - 3xy^2$

これより，$z_{yx} = 6x^2 \cdot y - 3 \cdot y^2$

$= \boldsymbol{6x^2y - 3y^2}$

また，$z_{xx} = 6xy^2$ より，$z_{xxy} = 6x \cdot 2y$

$= \boldsymbol{12xy}$

$z_{xy} = 6x^2y - 3y^2$ より，$z_{xyx} = 12x \cdot y$

$= \boldsymbol{12xy}$

$z_{yx} = 6x^2y - 3y^2$ より，$z_{yxx} = 12x \cdot y$

$= \boldsymbol{12xy}$

以上より，$\boldsymbol{z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}}$

（2） $z_x = \cos(x+2y) \cdot 1 = \cos(x+2y)$

これより，$z_{xy} = -\sin(x+2y) \cdot 2$

$= \boldsymbol{-2\sin(x+2y)}$

$z_y = -\cos(x+2y) \cdot 2 = -2\cos(x+2y)$

これより，$z_{yx} = -2\sin(x+2y) \cdot 1$

$= \boldsymbol{-2\sin(x+2y)}$

また，$z_{xx} = -\sin(x+2y) \cdot 1$ より

$= -\sin(x+2y)$

$z_{xxy} = -\cos(x+2y) \cdot 2$

$= \boldsymbol{-2\cos(x+2y)}$

$z_{xy} = -2\sin(x+2y)$ より，$z_{xyx} = -2\cos(x+2y) \cdot 1$

$= \boldsymbol{-2\cos(x+2y)}$

$z_{yx} = -2\sin(x+2y)$ より，$z_{yxx} = -2\cos(x+2y) \cdot 1$

$= \boldsymbol{-2\cos(x+2y)}$

以上より，$\boldsymbol{z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}}$

問 4

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y} r\cos\theta \\
&= -r\left(\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta - \frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

※ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ は 1 式で書くと，横に長くなるので部分的に計算します．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \sin\theta + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta \\
&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta \\
&= \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r\cos\theta\right\}\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta \\
&= -r\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta\right) + \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}\cos\theta \\
&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}(-\sin\theta) \\
&= \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} r\cos\theta\right\}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta \\
&= -r\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta\right) - \frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \\
&= -r\left\{-r\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta\right) + \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta\right. \\
&\qquad \left. + r\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right\} \\
&= r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta\right) - r\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta \\
&\qquad - r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta\right) - r\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta \\
&= \boldsymbol{r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta\right)} \\
&\qquad \boldsymbol{-r\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)}
\end{aligned}
$$

これと例題 2 の結果より

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\theta\right) \\
&\quad - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right) \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right) \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \text{右辺}
\end{aligned}
$$

問 5

（1） $z_x = 2x + y - 4$

$z_y = x + 2y - 2$

よって，極値をとり得る点の座標が満たす必要条件は

$$
\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 & \cdots① \\ x + 2y - 2 = 0 & \cdots② \end{cases}
$$

① より，$y = -2x + 4$

これを ② に代入して

$x + 2(-2x + 4) - 2 = 0$

$x - 4x + 8 - 2 = 0$

$-3x = -6$

$x = 2$

これより，$y = -2 \cdot 2 + 4 = 0$

したがって，極値をとり得る点は **(2，0)**

（2） $z_x = 3x^2 - 4y + 4$

$z_y = -4x - 2y$

よって，極値をとり得る点の座標が満たす必要条件は

$$
\begin{cases} 3x^2 - 4y + 4 = 0 & \cdots① \\ -4x - 2y = 0 & \cdots② \end{cases}
$$

② より，$y = -2x$

これを ① に代入して

$$3x^2-4\cdot(-2x)+4=0$$
$$3x^2+8x+4=0$$
$$(3x+2)(x+2)=0$$
$$x=-\frac{2}{3},\ -2$$

$x=-\dfrac{2}{3}$ のとき，$y=\dfrac{4}{3}$

$x=-2$ のとき，$y=4$

したがって，極値をとり得る点は $\boldsymbol{\left(-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)}$，$\boldsymbol{(-2,\ 4)}$

問 6

（1） $z_x=2x+y-4=0$

$z_y=x+2y-2=0$

これを解いて，$x=2,\ y=0$

よって，極値をとり得る点は，$(2,\ 0)$ である．

第 2 次導関数は

$z_{xx}=2,\ \ z_{xy}=1,\ \ z_{yy}=2$ であるから，$(2,\ 0)$ に対して

$$H=2\cdot 2-1^2$$
$$=3>0$$

また，$z_{xx}=2>0$

以上より，z は，点 $(2,\ 0)$ で極小となる．

極小値は

$$z=2^2+2\cdot 0+0^2-4\cdot 2-2\cdot 0$$
$$=4-8=-4$$

よって，z は，点 $(2,\ 0)$ で**極小値 -4** をとる．

（2） $z_x=\cos x=0$

$z_y=\sin y=0$

$0<x<2\pi,\ 0<y<2\pi$ において，$x=\dfrac{\pi}{2},\ y=\pi$

よって，極値をとり得る点は，$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ である．

第 2 次導関数は

$z_{xx}=-\sin x,\ \ z_{xy}=0,\ \ z_{yy}=\cos y$ であるから，$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ に対して

$$H=-\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\pi-0^2$$
$$=-1\cdot(-1)=1>0$$

また，$z_{xx}=-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1<0$

以上より，z は，点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ で極大となる．

極大値は

$$z=\sin\frac{\pi}{2}-\cos\pi$$
$$=1-(-1)=2$$

よって，z は，点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ で**極大値 2** をとる．

（3） $z_x=e^{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}(x+y^2)+e^{\frac{x}{2}}\cdot 1=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2+2)=0$

$z_y=e^{\frac{x}{2}}\cdot 2y=2e^{\frac{x}{2}}y=0$

$e^{\frac{x}{2}}\neq 0$ より

$$\begin{cases} x+y^2+2=0 & \cdots ① \\ y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② の $y=0$ を ① に代入して

$x+2=0$，すなわち，$x=-2$

よって，極値をとり得る点は，$(-2,\ 0)$ である．

第 2 次導関数は

$$z_{xx}=\frac{1}{2}\left\{e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}(x+y^2+2)+e^{\frac{x}{2}}\cdot 1\right\}$$
$$=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2+4)$$
$$z_{xy}=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cdot 2y$$
$$=e^{\frac{x}{2}}y$$
$$z_{yy}=2e^{\frac{x}{2}}$$

であるから，$(-2,\ 0)$ に対して

$$H=\frac{1}{4}e^{-1}(-2+4)\cdot 2e^{-1}-(e^{-1}\cdot 0)^2$$
$$=e^{-2}>0$$

また

$$z_{xx}=\frac{1}{4}e^{-1}(-2+4)$$
$$=\frac{1}{2}e^{-1}>0$$

以上より，z は，点 $(-2,\ 0)$ で極小となる．

極小値は

$$z=e^{-1}(-2+0)=-2e^{-1}$$

よって，z は，点 $(-2,\ 0)$ で**極小値 $-2e^{-1}$** をとる．

問 7

（1） $f=x^2+y^2-6x+8y$ とおくと

$f_x=2x-6$

$f_y=2y+8$

よって

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-6}{2y+8}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{x-3}{y+4}}$$

（2） $f=x+y+\log x+\log y$ とおくと

$f_x=1+\dfrac{1}{x}$

$f_y=1+\dfrac{1}{y}$

よって

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{y}}=-\frac{xy+y}{xy+x}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{y(x+1)}{x(y+1)}}$$

（3） $f=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-1$ とおくと

$f_x=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$f_y=\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$

よって

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}}=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}}$$

（4） $f=xe^y-ye^x$ とおくと

$f_x=e^y-ye^x$

$f_y=xe^y-e^x$

よって

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y-ye^x}{xe^y-e^x}=\boldsymbol{\frac{ye^x-e^y}{xe^y-e^x}}$$

問 8

（1） $f=yz+zx+xy-1$ とおくと

$f_x=z+y$

$f_y = z + x$

$f_z = y + x$

よって，$x + y \neq 0$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\boldsymbol{\frac{y+z}{x+y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\boldsymbol{\frac{z+x}{x+y}}$$

（2） $f = x^3 + y^3 + z^3 - xyz$ とおくと

$f_x = 3x^2 - yz$

$f_y = 3y^2 - zx$

$f_z = 3z^2 - xy$

よって，$3z^2 - xy \neq 0$ のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\boldsymbol{\frac{3x^2-yz}{3z^2-xy}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\boldsymbol{\frac{3y^2-zx}{3z^2-xy}}$$

問 9

（1） $f = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1$ とおくと

$f_x = \dfrac{2x}{a^2}$

$f_y = \dfrac{2y}{b^2}$

$f_z = -\dfrac{2z}{c^2}$

よって，点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ における接平面の方程式は

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) - \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

$$\frac{x_0}{a^2}x - \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{{y_0}^2}{b^2} - \frac{z_0}{c^2}z + \frac{{z_0}^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z_0}{c^2}z = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} - \frac{{z_0}^2}{c^2}$$

ここで，点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ は，与えられた曲面上の点なので

$$\text{右辺} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} - \frac{{z_0}^2}{c^2} = 1$$

よって，求める方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z_0}{c^2}z = 1}$$

（2） $f = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z$ とおくと

$f_x = \dfrac{2x}{a^2}$

$f_y = \dfrac{2y}{b^2}$

$f_z = -1$

よって，点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ における接平面の方程式は

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$\frac{x_0}{a^2}x - \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{{y_0}^2}{b^2} - \frac{z}{2} + \frac{z_0}{2} = 0$$

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z}{2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} - \frac{z_0}{2}$$

両辺から $\dfrac{z_0}{2}$ を引くと

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z}{2} - \frac{z_0}{2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} - z_0$$

ここで，点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ は，与えられた曲面上の点なので

$$\text{右辺} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} - z_0 = 0$$

よって，求める方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z+z_0}{2} = 0}$$

問 10

$\varphi(x,\ y) = x^2 + y^2 - 1,\ \ f(x,\ y) = xy$ とおく．

$\varphi_x = 2x, \quad \varphi_y = 2y$

また

$f_x = y, \quad f_y = x$

よって，$\dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{2y}$ より，$x^2 = y^2 \cdots$①

これを，$x^2 + y^2 = 1$ に代入して

$2x^2 = 1$

$x^2 = \dfrac{1}{2}$

$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

① に代入して

$\dfrac{1}{2} = y^2$

$y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

以上より，極値をとり得る点は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

例題 6 と同様に，最大値・最小値は極値をとり得る点でとることとなる．

各点における z の値を求めると

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき，$z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき，$z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき，$z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき，$z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$

以上より

点 $\boldsymbol{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ (複号同順) において，最大値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

点 $\boldsymbol{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ (複号同順) において，最小値 $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

問 11

円柱の底面の半径を x，高さを y とおく．

体積が一定であるから，$\pi x^2 y = c$ (c は正の定数) とするときの，$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ の最小値を考えればよい．

$\varphi(x,\ y) = \pi x^2 y - c$ とすれば

$\varphi_x = 2\pi xy, \quad \varphi_y = \pi x^2$

また

$S_x = 4\pi x + 2\pi y, \quad S_y = 2\pi x$

よって，$\dfrac{4\pi x + 2\pi y}{2\pi xy} = \dfrac{2\pi x}{\pi x^2}$ より，$\dfrac{2x+y}{y} = 2$

すなわち，$y = 2x$

これを，$\pi x^2 y = c$ に代入して

$2\pi x^3 = c$

$x^3 = \dfrac{c}{2\pi}$

$x > 0$ より，これを満たす x はただ一つ存在する．最小値が存在し，極値をとり得る点が一つであるから，この点が最小値を与える点である．

このとき，$y = 2x$ であるから，半径と高さの比は

$x : y = x : 2x = \boldsymbol{1 : 2}$

問 12

（1） $f(x,\ y,\ \alpha) = (x - \alpha)^2 + (y + \alpha)^2 - 1$ とおくと

$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = -2(x - \alpha) + 2(y + \alpha)$

よって，包絡線の方程式は，次の 2 式から α を消去すればよい．

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y+\alpha)^2 - 1 = 0 & \cdots① \\ -2(x-\alpha) + 2(y+\alpha) = 0 & \cdots② \end{cases}$$

② より

$-2x+2\alpha+2y+2\alpha=0$

$4\alpha=2x-2y$

$\alpha=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}y$

これを，① に代入して

$\left(x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}y\right)^2-1=0$

$\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y\right)^2-1=0$

$2\left\{\dfrac{1}{2}(x+y)\right\}^2-1=0$

$\dfrac{1}{2}(x+y)^2-1=0$

$(x+y)^2-2=0$

$x+y=\pm\sqrt{2}$

$\boldsymbol{y=-x\pm\sqrt{2}}$

（2） $f(x,\ y,\ \alpha)=\alpha x^2+\dfrac{1}{\alpha}-y$ とおくと

$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha)=x^2-\dfrac{1}{\alpha^2}$

よって，包絡線の方程式は，次の 2 式から α を消去すればよい．

$$\begin{cases}\alpha x^2+\dfrac{1}{\alpha}-y=0 & \cdots ① \\ x^2-\dfrac{1}{\alpha^2}=0 & \cdots ②\end{cases}$$

② より

$x^2=\dfrac{1}{\alpha^2}$

$\alpha^2=\dfrac{1}{x^2}$

$\alpha=\pm\dfrac{1}{x}$

これを，① に代入して

$\pm\dfrac{1}{x}\cdot x^2\pm\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}-y=0$ （複号同順）

$\pm x\pm x-y=0$

$\boldsymbol{y=\pm 2x}$

∎