3章　重積分

§1　2重積分　(p.59〜p.72)

問 1

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=1$ より，$z=-\frac{2}{3}x-\frac{y}{2}+2$

また，領域 D を

$D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2\}$ とすれば

$$\boldsymbol{V=\iint_D\left(-\frac{2}{3}x-\frac{y}{2}+2\right)dx\,dy}$$

問 2

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_0^1\left\{\int_1^2(x^2-xy)\,dx\right\}dy\\
&=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}yx^2\right]_1^2dy\\
&=\int_0^1\left\{\left(\frac{8}{3}-2y\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}y\right)\right\}dy\\
&=\int_0^1\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{2}y\right)dy\\
&=\left[\frac{7}{3}y-\frac{3}{4}y^2\right]_0^1\\
&=\frac{7}{3}-\frac{3}{4}=\frac{28-9}{12}=\boldsymbol{\frac{19}{12}}
\end{aligned}$$

問 3

（1）

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_0^2\left\{\int_0^1(x+y)\,dy\right\}dx\\
&=\int_0^2\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1dx\\
&=\int_0^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx\\
&=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right]_0^2\\
&=2+1=\boldsymbol{3}
\end{aligned}$$

（2）

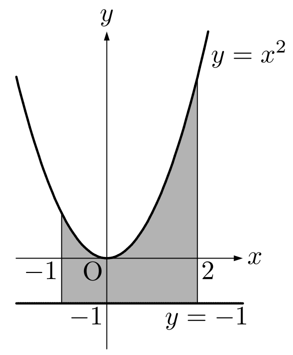
$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_{-1}^3\left\{\int_{-2}^1x^2y\,dy\right\}dx\\
&=\int_{-1}^3\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{-2}^1dx\\
&=\int_{-1}^3\left(\frac{1}{2}x^2-2x^2\right)dx\\
&=\int_{-1}^3\left(-\frac{3}{2}x^2\right)dx\\
&=\left[-\frac{1}{2}x^3\right]_{-1}^3\\
&=-\frac{27}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{28}{2}=\boldsymbol{-14}
\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\,dy\right\}dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin(x+y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin x\right\}dx\\
&=\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\left(-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right)\\
&=\{-(-1)+0\}-\{0+1\}=\boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

問 4

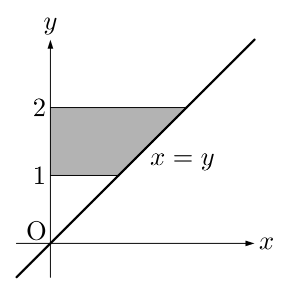
（1）　領域を図示すると



よって

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_{-1}^2\left\{\int_{-1}^{x^2}x\,dy\right\}dx\\
&=\int_{-1}^2\left[xy\right]_{-1}^{x^2}dx\\
&=\int_{-1}^2\{x^3-(-x)\}\,dx\\
&=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^2\\
&=(4+2)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\\
&=6-\frac{3}{4}=\boldsymbol{\frac{21}{4}}
\end{aligned}$$

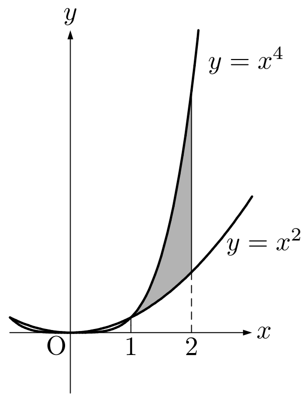
（2）　領域を図示すると



よって

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_1^2\left\{\int_0^y(x^2+y^2)\,dx\right\}dy\\
&=\int_1^2\left[\frac{1}{3}x^3+y^2x\right]_0^ydy\\
&=\int_1^2\left(\frac{1}{3}y^3+y^3\right)dy\\
&=\int_1^2\frac{4}{3}y^3\,dy\\
&=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{4}y^4\right]_1^2\\
&=\frac{1}{3}(16-1)\\
&=\frac{1}{3}\cdot 15=\boldsymbol{5}
\end{aligned}$$

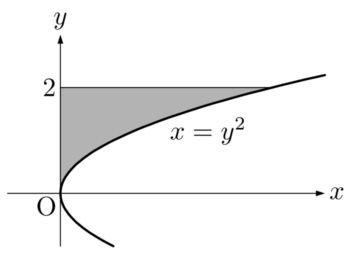
（3）　領域を図示すると



よって

$$\text{与式} = \int_1^2 \left\{ \int_{x^2}^{x^4} \frac{\sqrt{y}}{x}\,dy \right\} dx$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{x} \left[\frac{2}{3} y\sqrt{y} \right]_{x^2}^{x^4} dx$$
$$= \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{x}(x^4\sqrt{x^4} - x^2\sqrt{x^2})\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{x}(x^4|x^2| - x^2|x|)\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{x}(x^6 - x^3)\,dx \quad (x > 0 \text{ より})$$
$$= \frac{2}{3}\int_1^2 (x^5 - x^2)\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2$$
$$= \frac{2}{3}\left\{ \left(\frac{64}{6} - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) \right\}$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{64 - 16 - 1 + 2}{6}$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{49}{6} = \boldsymbol{\frac{49}{9}}$$

（4）　領域を図示すると



よって

$$\text{与式} = \int_0^2 \left\{ \int_0^{y^2} (2x + y)\,dx \right\} dy$$
$$= \int_0^2 \left[x^2 + xy \right]_0^{y^2} dy$$
$$= \int_0^2 (y^4 + y^3)\,dy$$
$$= \left[\frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{4}y^4 \right]_0^2$$
$$= \frac{32}{5} + 4 = \boldsymbol{\frac{52}{5}}$$

問 5

（1）　$x + 2y \leqq 2$ より，$y \leqq -\dfrac{1}{2}x + 1$ であるから，領域 D は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq x \leqq 2,\ \ 0 \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x + 1$

したがって

$$\text{与式} = \int_0^2 \left\{ \int_0^{-\frac{1}{2}x+1} (x + y)\,dy \right\} dx$$
$$= \int_0^2 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{-\frac{1}{2}x+1} dx$$
$$= \int_0^2 \left\{ x\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)^2 \right\} dx$$
$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^2 (-3x^2 + 4x + 4)\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\left[-x^3 + 2x^2 + 4x \right]_0^2$$
$$= \frac{1}{8}(-8 + 8 + 8) = \frac{1}{8} \cdot 8 = \mathbf{1}$$

〔別解〕

$x + 2y \leqq 2$ より，$x \leqq -2y + 2$ であるから，領域 D は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq y \leqq 1,\ \ 0 \leqq x \leqq -2y + 2$

したがって

$$\text{与式} = \int_0^1 \left\{ \int_0^{-2y+2} (x + y)\,dx \right\} dy$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + yx \right]_0^{-2y+2} dy$$
$$= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(-2y + 2)^2 + y(-2y + 2) \right\} dy$$
$$= \int_0^1 (2y^2 - 4y + 2 - 2y^2 + 2y)\,dy$$
$$= -2\int_0^1 (y - 1)\,dy$$
$$= -2\left[\frac{1}{2}y^2 - y \right]_0^1$$
$$= -2\left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \mathbf{1}$$

（2）　$x^2 + y^2 \leqq 1$ より，$y^2 \leqq 1 - x^2$，すなわち $-\sqrt{1 - x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2}$ であるから，領域 D は次の不等式で表すことができる．

$-1 \leqq x \leqq 1,\ \ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2}$

したがって

$$\text{与式} = \int_{-1}^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \right\} dx$$
$$= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1 - x^2)\,dx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\int_0^1 (1 - x^2)\,dx$$
$$= \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$
$$= 1 - \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

〔別解〕

$x^2 + y^2 \leqq 1$ より，$x^2 \leqq 1 - y^2$，すなわち $-\sqrt{1 - y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1 - y^2}$ であるから，領域 D は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq y \leqq 1,\ \ -\sqrt{1 - y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1 - y^2}$

したがって

$$\text{与式} = \int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y\,dx \right\} dy$$
$$= \int_0^1 \left\{ 2y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \right\} dy$$
$$= \int_0^1 2y \Big[\ x\ \Big]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy$$
$$= \int_0^1 2y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$1-y^2=t$ とおくと，$-2y\,dy=dt$ より，$2y\,dy=-dt$

また，y と t の対応は

y	$0 \ \to\ 1$
t	$1 \ \to\ 0$

よって

$$\text{与式} = \int_1^0 \sqrt{t}(-dt)$$
$$= -\int_1^0 \sqrt{t}\,dt$$
$$= \int_0^1 \sqrt{t}\,dt$$
$$= \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

問 6

（1）　$x=5-\frac{5}{2}y$ より，$y=2-\frac{2}{5}x$ であるから，領域は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq x \leqq \frac{5}{2}$，$1 \leqq y \leqq 2-\frac{2}{5}x$

したがって

$$\text{与式} = \boldsymbol{\int_0^{\frac{5}{2}} \left\{ \int_1^{2-\frac{2}{5}x} f(x,\ y)\,dy \right\} dx}$$

（2）　$y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$，$x \geqq 0$ より，$4y^2=4-x^2$，すなわち，$x=2\sqrt{1-y^2}$ であるから，領域は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq y \leqq 1$，$0 \leqq x \leqq 2\sqrt{1-y^2}$

したがって

$$\text{与式} = \boldsymbol{\int_0^1 \left\{ \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} f(x,\ y)\,dx \right\} dy}$$

（3）　$y=\log x$ より，$x=e^y$ であるから，領域は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq y \leqq 1$，$e^y \leqq x \leqq e$

したがって

$$\text{与式} = \boldsymbol{\int_0^1 \left\{ \int_{e^y}^{e} f(x,\ y)\,dx \right\} dy}$$

（4）　$x=\sqrt{y}$ より，$y=x^2$ であるから，領域は次の不等式で表すことができる．

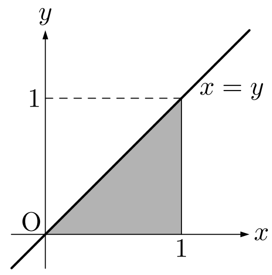
$0 \leqq x \leqq 1$，$x^2 \leqq y \leqq 1$

したがって

$$\text{与式} = \boldsymbol{\int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{1} f(x,\ y)\,dy \right\} dx}$$

問 7

$0 \leqq y \leqq 1$，$y \leqq x \leqq 1$ であるから，領域は図のようになる．



この領域は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq x$ と表せるので

$$\text{与式} = \int_0^1 \left\{ \int_0^x \sin x^2\,dy \right\} dx$$
$$= \int_0^1 \sin x^2 \Big[\ y\ \Big]_0^x dx$$
$$= \int_0^1 x\sin x^2\,dx$$

$x^2=t$ とおくと，$2x\,dx=dt$ より，$x\,dx=\frac{1}{2}dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \ \to\ 1$
t	$0 \ \to\ 1$

よって

$$\text{与式} = \int_0^1 \sin t\cdot\frac{1}{2}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sin t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}(-\cos 1+\cos 0)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(1-\cos 1)}$$

問 8

求める体積を V とする．$x+y=2$ より，$y=2-x$ であるから，領域は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq x \leqq 2$，$0 \leqq y \leqq 2-x$

この領域内で $z=4-x^2 \geqq 0$ なので

$$V = \int_0^2 \left\{ \int_0^{2-x} (4-x^2)\,dy \right\} dx$$
$$= \int_0^2 (4-x^2)\Big[\ y\ \Big]_0^{2-x} dx$$
$$= \int_0^2 (4-x^2)(2-x)\,dx$$
$$= \int_0^2 (x^3-2x^2-4x+8)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-2x^2+8x\right]_0^2$$
$$= 4-\frac{16}{3}-8+16$$
$$= \frac{12-16+24}{3} = \boldsymbol{\frac{20}{3}}$$

問 9

（1）　領域 D を，$x^2+y^2 \leqq a^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ とすると，この領域は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq x \leqq a$，$0 \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2}$

この領域内で，$z=y \geqq 0$ であるから，求める体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
V &= 2\iint_D y\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy \right\} dx \\
&= 2\int_0^a \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
&= \int_0^a (a^2-x^2)\,dx \\
&= \left[a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\
&= a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3}
\end{aligned}
$$

（2） 領域 D を，$x^2+y^2 \leqq a^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ とすると，この領域は次の不等式で表すことができる．

$$0 \leqq x \leqq a,\quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2}$$

この領域内で，$z=\sqrt{a^2-x^2} \geqq 0$ であるから，求める体積を V とすると

$$
\begin{aligned}
V &= 4\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy \\
&= 4\int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}\,dy \right\} dx \\
&= 4\int_0^a \left\{ \sqrt{a^2-x^2}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right\} dx \\
&= 4\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \left[\ y\ \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
&= 4\int_0^a (a^2-x^2)\,dx \\
&= 4\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\
&= 4\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3 \right) = \boldsymbol{\frac{8}{3}a^3}
\end{aligned}
$$

∎