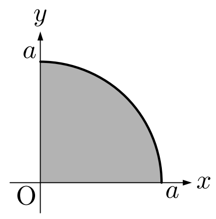
3章　重積分

§ 2　変数の変換と重積分　(p.75〜p.90)

問 1

（1）　領域を図示すると



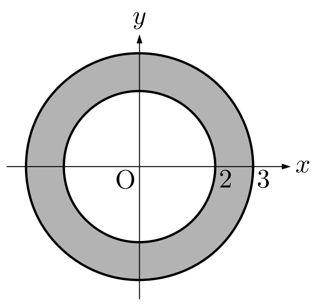
よって，領域 D は，次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq a,\ \ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

したがって

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \iint_D r\cos\theta \cdot r\,drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^a r^2\cos\theta\,dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[\frac{1}{3}r^3 \right]_0^a d\theta \\
&= \frac{1}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{3}a^3 \Big[\sin\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{3}a^3(1-0) = \boldsymbol{\frac{1}{3}a^3}
\end{aligned}$$

（2）　領域を図示すると



よって，領域 D は，次の不等式で表すことができる．

$2 \leqq r \leqq 3,\ \ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

したがって

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \iint_D \sqrt{r^2} \cdot r\,drd\theta \\
&= \iint_D |\,r\,| \cdot r\,drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_2^3 r^2\,dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}r^3 \right]_2^3 d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (27-8)\,d\theta \\
&= \frac{19}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{19}{3}\Big[\ \theta\ \Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{19}{3}\cdot 2\pi = \boldsymbol{\frac{38}{3}\pi}
\end{aligned}$$

問 2

曲面と xy 平面との交線は，曲面の方程式において $z=0$ とすれば，$4-x^2-y^2=0$，すなわち，$x^2+y^2=4$ である。

領域 D を，$x^2+y^2 \leqq 4$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ とし，求める体積を V とすれば

$$V = 4\iint_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

極座標に変換すると，領域 D は，次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq 2,\ \ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

したがって

$$\begin{aligned}
V &= 4\iint_D (4-r^2)\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^2 (4r-r^3)\,dr \right\} d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^2 d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8-4)d\theta \\
&= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= 16\Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 16\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{8\pi}
\end{aligned}$$

問 3

（1）　円錐と xy 平面との交線は，円錐の方程式において $z=0$ とすれば

$$\begin{aligned}
&h - \frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2} = 0 \\
&h = \frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2} \\
&2a = \sqrt{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

すなわち，$x^2+y^2=(2a)^2$ である。

領域 D を，$x^2+y^2 \leqq (2a)^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ とし，求める体積を V とすれば

$$V = 4\iint_D \left(h - \frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2} \right) dx\,dy$$

極座標に変換すると，領域 D は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq 2a,\ \ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

したがって

$$\begin{aligned}
V &= 4\iint_D \left(h - \frac{h}{2a}\sqrt{r^2} \right)\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ h\int_0^{2a} \left(r - \frac{1}{2a}r^2 \right) dr \right\} d\theta \\
&= 4h\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{6a}r^3 \right]_0^{2a} d\theta \\
&= 4h\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2a^2 - \frac{4}{3}a^2 \right) d\theta \\
&= \frac{8}{3}a^2h\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \frac{8}{3}a^2h\Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{8}{3}a^2h\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi a^2 h}
\end{aligned}$$

（2）　領域 D を，$(x-a)^2+y^2 \leqq a^2$，$y \geqq 0$ とし，求める体積を V とすれば

$$V=2\iint_D\left(h-\frac{h}{2a}\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy$$

極座標に変換すると，領域 D は次の不等式で表すことができる．

$0\leqq r\leqq 2a\cos\theta,\ \ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

したがって

$$\begin{aligned}V&=2\iint_D\left(h-\frac{h}{2a}\sqrt{r^2}\right)\cdot r\,dr\,d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{h\int_0^{2a\cos\theta}\left(r-\frac{1}{2a}r^2\right)dr\right\}d\theta\\&=2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{6a}r^3\right]_0^{2a\cos\theta}d\theta\\&=2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2a^2\cos^2\theta-\frac{4}{3}a^2\cos^3\theta\right)d\theta\\&=\frac{4}{3}a^2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta-2\cos^3\theta)d\theta\\&=\frac{4}{3}a^2h\left(3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{2}{3}\right)\\&=\frac{4}{3}a^2h\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{4}{3}\right)\\&=\frac{4}{3}a^2h\cdot\frac{1}{12}(9\pi-16)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{9}(9\pi-16)a^2h}\end{aligned}$$

問 4

$y+2x=u\cdots①,\ \ y-2x=v\cdots②$ とする．

① − ② より，$4x=u-v$ であるから

$x=\frac{u-v}{4}$

よって，$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{4},\ \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{4}$

① + ② より，$2y=u+v$ であるから

$y=\frac{u+v}{2}$

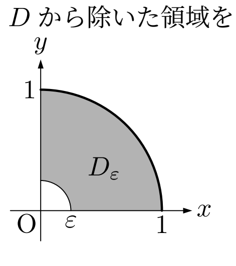
よって，$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2},\ \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{2}$

また，$0\leqq u\leqq 2,\ \ 0\leqq v\leqq 2,\ \ \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}与式&=\iint_D\left(\frac{u-v}{4}+\frac{u+v}{2}\right)\cdot\left|\frac{1}{4}\right|du\,dv\\&=\frac{1}{16}\iint_D(3u+v)\,du\,dv\\&=\frac{1}{16}\int_0^2\left\{\int_0^2(3u+v)\,du\right\}dv\\&=\frac{1}{16}\int_0^2\left[\frac{3}{2}u^2+vu\right]_0^2dv\\&=\frac{1}{16}\int_0^2(6+2v)\,dv\\&=\frac{1}{16}\left[6v+v^2\right]_0^2\\&=\frac{1}{16}(12+4)=\boldsymbol{1}\end{aligned}$$

問 5

被積分関数は，点 $(0,\ 0)$ で定義されないので，原点を中心とする半径 ε $(0<\varepsilon<1)$ の円の内部を D から除いた領域を D_ε とする．



（1）

$$与式=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

極座標に変換すると，領域 D_ε は次の不等式で表すことができる．

$\varepsilon\leqq r\leqq 1,\ \ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

したがって

$$\begin{aligned}与式&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{r^2}}\cdot r\,dr\right\}d\theta\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_\varepsilon^1 dr\right\}d\theta\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\ r\ \right]_\varepsilon^1d\theta\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\varepsilon)\,d\theta\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}(1-\varepsilon)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}(1-\varepsilon)\left[\ \theta\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

（2）

$$与式=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

極座標に変換すると，領域 D_ε は次の不等式で表すことができる．

$\varepsilon\leqq r\leqq 1,\ \ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

したがって

$$\begin{aligned}与式&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_\varepsilon^1\frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2}}\cdot r\,dr\right\}d\theta\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_\varepsilon^1 r\cos\theta\,dr\right\}d\theta\\&=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left[\frac{1}{2}r^2\right]_\varepsilon^1d\theta\\&=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta(1-\varepsilon^2)\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}(1-\varepsilon^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}(1-\varepsilon^2)\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}(1-\varepsilon^2)(1-0)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

問 6

（1）

$$\begin{aligned}与式&=\int_0^a\left\{\int_0^a\frac{1}{(x+1)^2(y+2)^2}\,dx\right\}dy\\&=\int_0^a\left\{\frac{1}{(y+2)^2}\int_0^a\frac{1}{(x+1)^2}\,dx\right\}dy\\&=\int_0^a\frac{1}{(y+2)^2}\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^a dy\\&=\int_0^a\frac{1}{(y+2)^2}\left(-\frac{1}{a+1}+1\right)dy\\&=\left(1-\frac{1}{a+1}\right)\int_0^a\frac{1}{(y+2)^2}\,dy\\&=\frac{a}{a+1}\left[-\frac{1}{y+2}\right]_0^a\\&=\frac{a}{a+1}\left(-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{a}{a+1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}\right)\\&=\frac{a}{a+1}\cdot\frac{a}{2(a+2)}=\boldsymbol{\frac{a^2}{2(a+1)(a+2)}}\end{aligned}$$

（2） $$与式 = \lim_{a\to\infty}\iint_{D_a}\frac{1}{(x+1)^2(y+2)^2}\,dx\,dy$$
$$= \lim_{a\to\infty}\frac{a^2}{2(a+1)(a+2)}$$
$$= \lim_{a\to\infty}\frac{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}{2(a+1)(a+2)\cdot\frac{1}{a^2}}$$
$$= \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{2}{a}\right)}$$
$$= \frac{1}{2(1+0)(1+0)} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

問 7 ※ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明済みとします.

（1） $$左辺 = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$
$\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx$ において，$x=-t$ とおくと，$dx=-dt$

また，x と t の対応は

x	$-\infty$	$\to$	0
t	∞	$\to$	0

よって
$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx = \int_\infty^0 e^{-(-t)^2}(-dt)$$
$$= -\int_\infty^0 e^{-t^2}\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$
したがって
$$左辺 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$
$$= 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$
$$= 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} = 右辺$$

（2） $\dfrac{x}{\sqrt{2}} = t$ とおくと，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}dx = dt$，すなわち，$dx = \sqrt{2}\,dt$

また，x と t の対応は

x	$-\infty$	$\to$	∞
t	$-\infty$	$\to$	∞

よって
$$左辺 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\cdot\sqrt{2}\,dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = 1 = 右辺$$

問 8

$z = 4-x^2$ について
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
よって，求める面積を S とすると
$$S = \iint_D \sqrt{(-2x)^2+0^2+1}\,dx\,dy$$
$$= \int_0^2\left\{\int_0^x \sqrt{4x^2+1}\,dy\right\}dx$$
$$= \int_0^2 \sqrt{4x^2+1}\left\{\int_0^x dy\right\}dx$$
$$= \int_0^2 \sqrt{4x^2+1}\Big[\,y\,\Big]_0^x\,dx$$
$$= \int_0^2 x\sqrt{4x^2+1}\,dx$$
$4x^2+1=t$ とおくと，$8x\,dx = dt$，すなわち，$xdx = \dfrac{1}{8}\,dt$

また，x と t の対応は

x	0	$\to$	2
t	1	$\to$	17

よって
$$S = \int_1^{17}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{8}\,dt$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^{17}$$
$$= \frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1) = \boldsymbol{\frac{17\sqrt{17}-1}{12}}$$

問 9

$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ について
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$
ここで
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1$$
$$= \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2 + 1$$
$$= \frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2} + 1 = \frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}$$
よって，求める面積を S とすると
$$S = \iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$
$$= \iint_D \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$
$$= a\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$
領域 D' を，$x^2+y^2 \leqq b^2$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ とし， 極座標に変換すると，領域 D' は次の不等式で表すことができる.
$$0 \leqq r \leqq b,\quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$
よって
$$S = 4a\iint_{D'} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$
$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\right\}d\theta$$
ここで，$\displaystyle\int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr$ について，$a^2-r^2=t$ とおくと

$-2r\,dr = dt$ より，$r\,dr = -\dfrac{1}{2}\,dt$

また，r と t の対応は

r	0	$\to$	b
t	a^2	$\to$	a^2-b^2

よって

$$\int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr = \int_{a^2}^{a^2-b^2} \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{a^2}^{a^2-b^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{t}\right]_{a^2}^{a^2-b^2}$$
$$= -(\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2})$$
$$= a-\sqrt{a^2-b^2}$$

したがって

$$S = 4a\iint_{D'}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$
$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a-\sqrt{a^2-b^2})\,d\theta$$
$$= 4a(a-\sqrt{a^2-b^2})\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$
$$= 4a(a-\sqrt{a^2-b^2})\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 4a(a-\sqrt{a^2-b^2})\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2})}$$

問 10

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

極座標に変換すると，領域 D は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq a,\quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

よって

$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr\right\}d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr\right\}d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr$ について，$a^2-r^2=t$ とおくと

$-2r\,dr = dt$ より，$r\,dr = -\dfrac{1}{2}\,dt$

また，r と t の対応は

r	$0 \to a$
t	$a^2 \to 0$

よって

$$\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr = \int_{a^2}^0 \sqrt{t}\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{a^2}^0\sqrt{t}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{a^2}\sqrt{t}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^{a^2}$$
$$= \frac{1}{3}a^2\sqrt{a^2} = \frac{1}{3}a^3$$

したがって

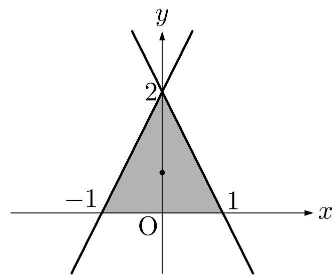
$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}a^3\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}d\theta$$
$$= \frac{1}{3}a^3\Big[\,\theta\,\Big]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{3}a^3\cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi a^3$$

また，$\displaystyle\iint_D dx\,dy = \pi a^2$ であるから，求める平均は

$$\frac{\displaystyle\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy} = \frac{\frac{2}{3}\pi a^3}{\pi a^2} = \boldsymbol{\frac{2}{3}a}$$

問 11　図形が表す領域を D，重心の座標を $(\overline{x},\ \overline{y})$ とする．

（1）　領域 D は，y 軸に関して対称だから，$\overline{x}=0$



$y=2x+2$ より，$x=\dfrac{1}{2}y-1$

$y=-2x+2$ より，$x=-\dfrac{1}{2}y+1$

よって，領域は，$0\leqq y\leqq 2,\ \ \dfrac{1}{2}y-1\leqq x\leqq -\dfrac{1}{2}y+1$

以上より

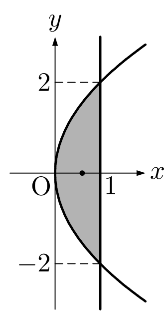
$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^2\left\{\int_{\frac{1}{2}y-1}^{-\frac{1}{2}y+1} y\,dx\right\}dy$$
$$= \int_0^2 y\Big[\,x\,\Big]_{\frac{1}{2}y-1}^{-\frac{1}{2}y+1}dy$$
$$= \int_0^2 y\left\{\left(-\frac{1}{2}y+1\right)-\left(\frac{1}{2}y-1\right)\right\}dy$$
$$= \int_0^2 y(-y+2)\,dy$$
$$= \int_0^2 (2y-y^2)\,dy$$
$$= \left[y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^2$$
$$= \left(4-\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

また，$\displaystyle\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$ であるから　（三角形の面積）

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

よって，求める重心の座標は，$\boldsymbol{\left(0,\ \frac{2}{3}\right)}$

（2）　領域 D は，x 軸に関して対称だから，$\overline{y}=0$



$y^2=4x$ より，$x=\dfrac{1}{4}y^2$

よって，領域は，$-2\leqq y\leqq 2,\ \ \dfrac{1}{4}y^2\leqq x\leqq 1$

以上より

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\left\{\int_{\frac{1}{4}y^2}^{1} x\,dx\right\}dy$$
$$= \int_{-2}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{4}y^2}^{1} dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{1}{16}y^4\right)dy$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{2}\left(1-\frac{1}{16}y^4\right)dy$$
$$= \left[y-\frac{1}{80}y^5\right]_0^2$$
$$= 2-\frac{32}{80}=\frac{8}{5}$$

また

$$\iint_D dx\,dy = \int_{-2}^{2}\left\{\int_{\frac{1}{4}y^2}^{1} dx\right\}dy$$
$$= \int_{-2}^{2}\Big[\ x\ \Big]_{\frac{1}{4}y^2}^{1} dy$$
$$= \int_{-2}^{2}\left(1-\frac{1}{4}y^2\right)dy$$
$$= 2\int_{0}^{2}\left(1-\frac{1}{4}y^2\right)dy$$
$$= 2\left[y-\frac{1}{12}y^3\right]_0^2$$
$$= 2\left(2-\frac{8}{12}\right)=\frac{8}{3}$$

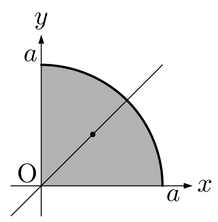
よって

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{5}$$

したがって，求める重心の座標は，$\left(\boldsymbol{\frac{3}{5}},\ \mathbf{0}\right)$

問 12

領域 D は，直線 $y=x$ に関して対称だから，$\overline{x}=\overline{y}$



$x^2+y^2=a^2$，$y \geqq 0$ より，$y=\sqrt{a^2-x^2}$

よって，領域は，$0 \leqq x \leqq a$，$0 \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2}$

以上より

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^a\left\{\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\right\}dx$$
$$= \int_0^a x\Big[\ y\ \Big]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$
$$= \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

ここで，$a^2-x^2=t$ とおくと

$-2x\,dr=dt$ より，$x\,dr=-\dfrac{1}{2}\,dt$

また，x と t の対応は

x	0	$\to$	a
t	a^2	$\to$	0

よって

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{a^2}^{0}\sqrt{t}\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{a^2}^{0}\sqrt{t}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{a^2}\sqrt{t}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^{a^2}$$
$$= \frac{1}{3}a^2\sqrt{a^2}=\frac{1}{3}a^3$$

また，$\displaystyle\iint_D dx\,dy=\frac{1}{4}\pi a^2$ であるから

$$\overline{x}=\overline{y}=\frac{\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy}=\frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{4}\pi a^2}=\frac{4a}{3\pi}$$

したがって，求める重心の座標は，$\left(\boldsymbol{\frac{4a}{3\pi}},\ \boldsymbol{\frac{4a}{3\pi}}\right)$

∎