4章　微分方程式

§1　1階微分方程式 (p.105〜p.106)

練習問題 1-A

1. （1）（変数分離形）

両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\,\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+1}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{1}{t+1}\,dt$$

これより

$$\log|x|=\log|t+1|+c$$
$$\log|x|-\log|t+1|=c$$
$$\log\left|\frac{x}{t+1}\right|=c$$

よって

$$\left|\frac{x}{t+1}\right|=e^c$$
$$\frac{x}{t+1}=\pm e^c$$
$$x=\pm e^c(t+1)$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$\boldsymbol{x=C(t+1)}$　（C は任意定数）

（2）（変数分離形）

両辺を $\dfrac{x^2-1}{x}$ で割ると

$$\frac{x}{x^2-1}\,\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{x}{x^2-1}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt$$
$$\int\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\,dx=2\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|x^2-1|=2\log|t|+c$$
$$\log|x^2-1|-\log|t|^2=c$$
$$\log\frac{|x^2-1|}{t^2}=c$$

よって

$$\frac{|x^2-1|}{t^2}=e^c$$
$$|x^2-1|=e^ct^2$$
$$x^2-1=\pm e^ct^2$$
$$x^2=\pm e^ct^2+1$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$\boldsymbol{x^2=Ct^2+1}$　（C は任意定数）

（3）（同次形）

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\cdot\left(\dfrac{x}{t}\right)^2-1}{2\cdot\dfrac{x}{t}}$$

$u=\dfrac{x}{t}$，すなわち，$x=ut$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを与えられた微分方程式に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=\frac{2u^2-1}{2u}=u-\frac{1}{2u}$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{2u}$

$2u\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int 2u\,du=-\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$u^2=-\log|t|+C$　（C は任意定数）

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$ であるから

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2=-\log|t|+C$$
$$\frac{x^2}{t^2}=-\log|t|+C$$

$\boldsymbol{x^2=t^2(-\log|t|+C)}$　（C は任意定数）

（4）（同次形）

$$\frac{dx}{dt}=2\cdot\frac{x}{t}+1$$

$u=\dfrac{x}{t}$，すなわち，$x=ut$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを与えられた微分方程式に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=2u+1$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt}=u+1$

$\dfrac{1}{u+1}\,\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{u+1}\,du=\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$\log|u+1|=\log|t|+c$　（C は任意定数）

$$\log|u+1|-\log|t|=c$$
$$\log\left|\frac{u+1}{t}\right|=c$$

よって

$$\left|\frac{u+1}{t}\right|=e^c$$
$$\frac{u+1}{t}=\pm e^c$$
$$u+1=\pm e^ct$$
$$u=\pm e^ct-1$$

$C=\pm e^c$ とおくと，$u=Ct-1$

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$ であるから

$$\frac{x}{t}=Ct-1$$

$\boldsymbol{x=t(Ct-1)}$　（C は任意定数）

（5）（1階線形）

i）斉次1階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}+x=0$$
$$\frac{dx}{dt}=-x$$
$$\frac{1}{x}\,\frac{dx}{dt}=-1$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=-\int dt$$

これより

$\log|x|=-t+c$　（c は任意定数）

よって

$$|x|=e^{-t+c}$$
$$=e^ce^{-t}$$
$$x=\pm e^ce^{-t}$$

$\pm e^c=C$ とおくと，$x=Ce^{-t}$

ii） $x = ue^{-t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}e^{-t} - ue^{-t}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}e^{-t} - ue^{-t} + ue^{-t} = te^{-t}$$

$$\frac{du}{dt}e^{-t} = te^{-t}$$

$$\frac{du}{dt} = t$$

両辺を t について積分すると

$$\int du = \int t\,dt$$

これより

$$u = \frac{1}{2}t^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって

$$\boldsymbol{x = \left(\frac{1}{2}t^2 + C\right)e^{-t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

〔別解〕

$$\int dt = t$$

方程式の両辺に，e^t をかけると

$$e^t\frac{dx}{dt} + e^t x = te^{-t}e^t$$

$$(e^t x)' = t$$

よって

$$e^t x = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

したがって

$$\boldsymbol{x = \left(\frac{1}{2}t^2 + C\right)e^{-t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

（6）（1 階線形・同次形）

i ）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{2t} = 0$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|x| = \frac{1}{2}\log|t| + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\log|x| - \log\sqrt{t} = c \quad (t > 0 \text{ より})$$

$$\log\frac{|x|}{\sqrt{t}} = c$$

よって

$$\frac{|x|}{\sqrt{t}} = e^c$$

$$|x| = e^c\sqrt{t}$$

$$x = \pm e^c\sqrt{t}$$

$\pm e^c = C$ とおくと，$x = C\sqrt{t}$ （C は任意定数）

ii） $x = u\sqrt{t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\sqrt{t} + \frac{u}{2\sqrt{t}}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}\sqrt{t} + \frac{u}{2\sqrt{t}} - \frac{u\sqrt{t}}{2t} = 1$$

$$\frac{du}{dt}\sqrt{t} = 1$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

両辺を t について積分すると

$$\int du = \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

これより

$$u = 2\sqrt{t} + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって

$$x = \left(2\sqrt{t} + C\right)\sqrt{t}, \text{ すなわち}$$

$$\boldsymbol{x = 2t + C\sqrt{t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

〔別解〕

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{x}{t} + 1$$

$u = \dfrac{x}{t}$，すなわち，$x = ut$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$$

これを与えられた微分方程式に代入して

$$u + t\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}u + 1$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{2}u + 1$

$\dfrac{1}{u-2}\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{2t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{u-2}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|u-2| = -\frac{1}{2}\log t + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\log|u-2| + \log\sqrt{t} = c \quad (t > 0 \text{ より})$$

$$\log|u-2|\sqrt{t} = c$$

よって

$$|u-2|\sqrt{t} = e^c$$

$$(u-2)\sqrt{t} = \pm e^c$$

$$u - 2 = \pm e^c \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$u = \pm e^c \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} + 2$$

$C = \pm e^c$ とおくと，$u = \dfrac{C}{\sqrt{t}} + 2$

ここで，$u = \dfrac{x}{t}$ であるから

$$\frac{x}{t} = \frac{C}{\sqrt{t}} + 2$$

$$x = t\left(\frac{C}{\sqrt{t}} + 2\right)$$

$$\boldsymbol{x = 2t + C\sqrt{t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

〔別解〕

$$\int\left(-\frac{1}{2t}\right)dt = -\frac{1}{2}\log|t| = \log\frac{1}{\sqrt{t}} \quad (t > 0 \text{ より})$$

ここで，$e^{\log\frac{1}{\sqrt{t}}} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

方程式の両辺に，$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ をかけると

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2t\sqrt{t}}x = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}x\right)' = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

よって

$$\frac{x}{\sqrt{t}} = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{t} + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

したがって

$$x = (2\sqrt{t} + C)\sqrt{t}, \text{ すなわち}$$

$$\boldsymbol{x = 2t + C\sqrt{t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

2. （1）（変数分離形）

両辺を x^2 で割ると

$$\frac{1}{x^2}\,\frac{dx}{dt}=4t^3$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx=\int 4t^3\,dt$$

これより

$$-\frac{1}{x}=t^4+C \quad (C\text{ は任意定数})$$

これに，$t=0$，$x=1$ を代入すると

$$-1=0^4+C$$

$C=-1$　よって

$$-\frac{1}{x}=t^4-1$$

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{t^4-1}}$$

（2）（変数分離形）

両辺を x^2+1 で割ると

$$\frac{1}{x^2+1}\,\frac{dx}{dt}=1$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=\int dt$$

これより

$$\tan^{-1}x=t+C \quad (C\text{ は任意定数})$$

これに，$t=0$，$x=1$ を代入すると

$$\tan^{-1}1=0+C$$

$C=\frac{\pi}{4}$　よって

$$\tan^{-1}x=t+\frac{\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{x=\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

（3）（同次形）

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{x}{t}\right)^2+\frac{x}{t}$$

$u=\frac{x}{t}$，すなわち，$x=ut$ とおくと

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを与えられた微分方程式に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=u^2+u$$

すなわち，$t\frac{du}{dt}=u^2$

$\frac{1}{u^2}\,\frac{du}{dt}=\frac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{u^2}\,du=\int \frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$-\frac{1}{u}=\log|t|+C \quad (C\text{ は任意定数})$$

$$u=-\frac{1}{\log|t|+C}$$

ここで，$u=\frac{x}{t}$ であるから

$$\frac{x}{t}=-\frac{1}{\log|t|+C}$$

$$x=-\frac{t}{\log|t|+C}$$

これに，$t=1$，$x=\frac{1}{2}$ を代入すると

$$\frac{1}{2}=-\frac{1}{\log 1+C}$$

$$C=-2$$

よって，$x=-\frac{t}{\log|t|-2}$

すなわち，$\boldsymbol{x=\frac{t}{2-\log|t|}}$

（4）（1階線形）

i）斉次1階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}+x\sin t=0$$

$$\frac{1}{x}\,\frac{dx}{dt}=-\sin t$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{x}\,dx=-\int \sin t\,dt$$

これより

$$\log|x|=\cos t+c \quad (c\text{ は任意定数})$$

よって

$$|x|=e^{\cos t+c}$$

$$=e^ce^{\cos t}$$

$$x=\pm e^ce^{\cos t}$$

$\pm e^c=C$ とおくと，$x=Ce^{\cos t}$　（C は任意定数）

ii）　$x=ue^{\cos t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}e^{\cos t}-ue^{\cos t}\sin t$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}e^{\cos t}-ue^{\cos t}\sin t+ue^{\cos t}\sin t=e^{\cos t}$$

$$\frac{du}{dt}e^{\cos t}=e^{\cos t}$$

$$\frac{du}{dt}=1$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int dt$$

これより

$$u=t+C \quad (C\text{ は任意定数})$$

よって

$$x=(t+C)e^{\cos t}$$

これに，$t=\frac{\pi}{2}$，$x=0$ を代入すると

$$0=\left(\frac{\pi}{2}+C\right)e^{\cos\frac{\pi}{2}}$$

すなわち，$C=-\frac{\pi}{2}$

よって，$\boldsymbol{x=\left(t-\frac{\pi}{2}\right)e^{\cos t}}$

〔一般解の求め方の別解〕

$$\int \sin t\,dt=-\cos t$$

方程式の両辺に，$e^{-\cos t}$ をかけると

$$e^{-\cos t}\frac{dx}{dt}+e^{-\cos t}\sin t\cdot x=1$$

$$(e^{-\cos t}x)'=1$$

よって

$$e^{-\cos t}x=\int dt$$

$$=t+C \quad (C\text{ は任意定数})$$

したがって

$$x=(t+C)e^{\cos t} \quad (C\text{ は任意定数})$$

3. （1）

$$t\frac{dx}{dt}=-x$$

$$\frac{1}{x}\,\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{x}\,dx=-\int \frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|x|=-\log|t|+c \quad (c\text{ は任意定数})$$

$$\log|x|+\log|t|=c$$

$$\log|xt|=c$$

よって

$$|xt| = e^c$$

$$xt = \pm e^c$$

$$x = \pm e^c \cdot \frac{1}{t}$$

$\pm e^c = C$ とおくと，$\boldsymbol{x = \dfrac{C}{t}}$ 　（C は任意定数）

（2）$x = \dfrac{u}{t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{1}{t} - \frac{u}{t^2}$$

微分方程式に代入すると

$$t\left(\frac{du}{dt}\frac{1}{t} - \frac{u}{t^2}\right) + \frac{u}{t} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{u}{t} + \frac{u}{t} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{t}{1+t^2}$$

両辺を t について積分すると

$$\int du = \int \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$\int du = \frac{1}{2}\int \frac{(1+t^2)'}{1+t^2}\,dt$$

これより

$$u = \frac{1}{2}\log(1+t^2) + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{2}\log(1+t^2) + C\right\}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

4. $\dfrac{di}{dt} = -i + E$

$$\frac{1}{i-E}\frac{di}{dt} = -1$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{i-E}\,di = -\int dt$$

これより

$$\log|i-E| = -t + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

よって

$$|i-E| = e^{-t+c}$$

$$i - E = \pm e^c e^{-t}$$

$C = \pm e^c$ とおくと，$i = Ce^{-t} + E$

これに，$t = 0$，$i = 0$ を代入すると

$$0 = Ce^0 + E$$

$$C = -E$$

よって

$$i = -Ee^{-t} + E$$

$$\boldsymbol{i = E(1 - e^{-t})}$$

練習問題 1-B

1. （1）$u = \sqrt{2t+x+4}$ より，$u \geqq 0$

また，両辺を t で微分すると

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2t+x+4}}\cdot(2t+x+4)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2t+x+4}}\cdot\left(2 + \frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{2u}(2+u)$$

よって，$\boldsymbol{2u\dfrac{du}{dt} = u + 2}$

（2）$2u\dfrac{du}{dt} = u + 2$

$$\frac{2u}{u+2}\frac{du}{dt} = 1$$

$$\frac{2(u+2)-4}{u+2}\frac{du}{dt} = 1$$

$$2\left(1 - \frac{2}{u+2}\right)\frac{du}{dt} = 1$$

両辺を t について積分すると

$$2\int\left(1 - \frac{2}{u+2}\right)du = \int dt$$

これより

$$2\{u - 2\log(u+2)\} = t + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

$$2u - 4\log(u+2) = t + C$$

よって

$$\boldsymbol{2\sqrt{2t+x+4}}$$

$$\boldsymbol{-4\log(\sqrt{2t+x+4}+2) = t + C}$$

（C は任意定数）

2. （1）与式の両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} + t\frac{d^2x}{dt^2} + 3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2x}{dt^2}$$

よって

$$\frac{d^2x}{dt^2}\left(t + 3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = 0$$

（2）i）$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = C$$

よって，一般解は，これを与えられた微分方程式に代入して，$\boldsymbol{x = tC + C^3}$

ii）$t + 3\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = 0$ のとき

$$t = -3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdots ①$$

これを，与えられた微分方程式に代入すれば

$$x = -3\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

$$= -2\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 \cdots ②$$

①の両辺を 3 乗すると

$$t^3 = -27\left(\frac{dx}{dt}\right)^6$$

②の両辺を 2 乗すると

$$x^2 = 4\left(\frac{dx}{dt}\right)^6$$

この 2 式より，$-\dfrac{t^3}{27} = \dfrac{x^2}{4}$

よって，特異解は，$\boldsymbol{x^2 = -\dfrac{4}{27}t^3}$

3. （1）$z = x^{-2}$ の両辺を t で微分すると

$$\frac{dz}{dt} = -2x^{-3}\frac{dx}{dt}$$

よって

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x^3}{2}\frac{dz}{dt}$$

これを与えられた方程式に代入すると

$$t\left(-\frac{x^3}{2}\frac{dz}{dt}\right) - 2x = t^2x^3$$

$$-t\frac{x^2}{2}\frac{dz}{dt} - 2 = t^2x^2$$

$x^2 = z^{-1}$ なので

$$-t\frac{z^{-1}}{2}\frac{dz}{dt} - 2 = t^2 \cdot z^{-1}$$

$$\boldsymbol{t\frac{dz}{dt} + 4z = -2t^2}$$

（2） z についての微分方程式を解く．

$t\dfrac{dz}{dt} + 4z = -2t^2$ より

$$\frac{dz}{dt} + \frac{4z}{t} = -2t$$

i）斉次１階微分方程式の解

$$\frac{dz}{dt} + \frac{4z}{t} = 0$$

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt} = -\frac{4}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{z}\,dx = -4\int \frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|z| = -4\log|t| + c \qquad (c \text{ は任意定数})$$

$$\log|z| + \log|t|^4 = c$$

$$\log|z|t^4 = c$$

よって

$$|z|t^4 = e^c$$

$$zt^4 = \pm e^c$$

$$z = \pm\frac{e^c}{t^4}$$

$\pm e^c = C$ とおくと，$z = \dfrac{C}{t^4}$ （C は任意定数）

ii） $z = \dfrac{u}{t^4} = ut^{-4}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt}t^{-4} - 4ut^{-5}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}t^{-4} - 4ut^{-5} + \frac{4ut^{-4}}{t} = -2t$$

$$\frac{du}{dt} = -2t^5$$

両辺を t について積分すると

$$\int du = -2\int t^5\,dt$$

これより

$$u = -\frac{1}{3}t^6 + c \qquad (c \text{ は任意定数})$$

よって

$$z = ut^{-4}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}t^6 + c}{t^4}$$

$$= \frac{-t^6 + 3c}{3t^4}$$

$3c = C$ とおくと

$$z = \frac{-t^6 + C}{3t^4}$$

$z = \dfrac{1}{x^2}$ であるから

$$\frac{1}{x^2} = \frac{-t^6 + C}{3t^4}$$

$$\boldsymbol{x^2(-t^6 + C) = 3t^4} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

〔z の一般解の求め方の別解〕

$$\int \frac{4}{t}\,dt = 4\log|t| = \log t^4$$

ここで，$e^{\log t^4} = t^4$

$\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{4z}{t} = -2t$ の両辺に，t^4 かけると

$$t^4\frac{dz}{dt} + 4t^3z = -2t^5$$

$$(t^4z)' = -2t^5$$

よって

$$t^4z = \int(-2t^5)\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}t^6 + c \qquad (c \text{ は任意定数})$$

したがって

$$z = \frac{-\frac{1}{3}t^6 + c}{t^4}$$

$$= \frac{-t^6 + 3c}{3t^4}$$

4. （1） $x = t$ より，$\dfrac{dx}{dt} = 1$

これを微分方程式に代入すると

$$\text{左辺} = 1 + (2t^2 + 1)t - t \cdot t^2$$

$$= 1 + 2t^3 + t - t^3$$

$$= t^3 + t + 1 = \text{右辺}$$

（2） $u = \dfrac{1}{x - t}$ より，$x - t = \dfrac{1}{u}$

すなわち，$x = t + \dfrac{1}{u}$ であるから

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

これを，微分方程式に代入して

$$1 - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} + (2t^2 + 1)\left(t + \frac{1}{u}\right) - t\left(t + \frac{1}{u}\right)^2 = t^3 + t + 1$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} + 2t^3 + \frac{2t^2}{u} + t + \frac{1}{u} - t\left(t^2 + \frac{2t}{u} + \frac{1}{u^2}\right) = t^3 + t$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} + 2t^3 + \frac{2t^2}{u} + t + \frac{1}{u} - t^3 - \frac{2t^2}{u} - \frac{t}{u^2} = t^3 + t$$

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} + \frac{1}{u} - \frac{t}{u^2} = 0$$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{du}{dt} - u = -t}$

（3） $\dfrac{du}{dt} - u = -t$ を解く．

i）斉次１階微分方程式の解

$$\frac{du}{dt} - u = 0$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dt} = 1$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{u}\,dx = \int dt$$

これより

$$\log|u| = t + c \qquad (c \text{ は任意定数})$$

よって

$$|u| = e^{t+c}$$

$$u = \pm e^{t+c} = \pm e^c e^t$$

$\pm e^c = C$ とおくと，$u = Ce^t$ （C は任意定数）

ii） $u = ve^t$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt}e^t + ve^t$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{dv}{dt}e^t + ve^t - ve^t = -t$$

$$\frac{dv}{dt} = -te^{-t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int dv = -\int te^{-t}\,dt$$

$$v = -\left(-te^{-t} + \int e^{-t}\,dt\right)$$

$$= te^{-t} + e^{-t} + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって

$$u = ve^t$$

$$= (te^{-t} + e^{-t} + C)e^t$$

$$= t + 1 + Ce^t$$

したがって

$$x = t + \frac{1}{u}$$

$$= \boldsymbol{t + \frac{1}{Ce^t + t + 1}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

〔u の一般解の求め方の別解〕

$$\int (-1)\,dt = -t$$

$\dfrac{du}{dt} - u = -t$ の両辺に，e^{-t} かけると

$$e^{-t}\frac{du}{dt} - e^{-t}u = -e^{-t}t$$

$$(e^{-t}u)' = -e^{-t}t$$

よって

$$e^{-t}u = -\int e^{-t}t\,dt$$

$$= -\left(-e^{-t}t + \int e^{-t}\,dt\right)$$

$$= -(-e^{-t}t - e^{-t}) + C$$

$$= e^{-t}t + e^{-t} + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

したがって

$$u = e^t(e^{-t}t + e^{-t} + C)$$

$$= t + 1 + Ce^t$$

■