4章　微分方程式

§1　1階微分方程式　(p.94〜p.104)

問 1

物体の温度と室温との差は，$25-x$ であるから

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt}=k(25-x)}$$

問 2

（1）　$\frac{dx}{dt}=2ct$

$x=ct^2$ より，$c=\frac{x}{t^2}$

よって

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2tx}{t^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt}=\frac{2x}{t}}$$

（2）　$\frac{dx}{dt}=ce^{2t}\cdot 2=2ce^{2t}$

$x=ce^{2t}$ より，$c=\frac{x}{e^{2t}}$

よって

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2xe^{2t}}{e^{2t}}$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt}=2x}$$

問 3

$x=(C-15)e^{-kt}+15$ に，$t=0$，$x=80$ を代入すると

$$80=(C-15)e^0+15$$
$$80=C-15+15$$
$$C=80$$

よって，$x=(80-15)e^{-kt}+15$

すなわち，$\boldsymbol{x=65e^{-kt}+15}$

問 4

（1）　$x=e^{2t}$ より，$\frac{dx}{dt}=2e^{2t}$

$$左辺=\frac{dx}{dt}=2e^{2t}$$
$$右辺=x+e^{2t}$$
$$=e^{2t}+e^{2t}=2e^{2t}$$

よって，左辺 = 右辺

したがって，$x=e^{2t}$ は与えられた微分方程式の解である．

（2）　$x=e^{2t}+Ce^t$ より，$\frac{dx}{dt}=2e^{2t}+Ce^t$

$$左辺=\frac{dx}{dt}=2e^{2t}+Ce^t$$
$$右辺=x+e^{2t}$$
$$=e^{2t}+Ce^t+e^{2t}=2e^{2t}+Ce^t$$

よって，左辺 = 右辺

また，1個の任意定数を含むから，関数 $x=e^{2t}+Ce^t$ は与えられた微分方程式の一般解である．

（3）　$x=e^{2t}+Ce^t$ に，$t=0$，$x=-1$ を代入すると

$$-1=e^0+Ce^0$$
$$-1=1+C$$
$$C=-2$$

よって，特殊解は，$\boldsymbol{x=e^{2t}-2e^t}$

問 5

（1）　両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=4t^3$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int 4t^3\,dt$$

これより，$\log|x|=t^4+c$　(c は任意定数)

よって

$$|x|=e^{t^4+c}$$
$$x=\pm e^{t^4+c}$$
$$=\pm e^c\cdot e^{t^4}$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$\boldsymbol{x=Ce^{t^4}}$　(C は任意定数)

（2）　両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|x|=\log|t|+c\quad (c\text{ は任意定数})$$
$$\log|x|-\log|t|=c$$
$$\log\left|\frac{x}{t}\right|=c$$

よって

$$\left|\frac{x}{t}\right|=e^c$$
$$\frac{x}{t}=\pm e^c$$
$$x=\pm e^c t$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$\boldsymbol{x=Ct}$　(C は任意定数)

（3） 両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{3t^2}{t^3+1}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{3t^2}{t^3+1}\,dt$$

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{(t^3+1)'}{t^3+1}\,dt$$

これより

$$\log|x|=\log|t^3+1|+c \quad (c\text{ は任意定数})$$

$$\log|x|-\log|t^3+1|=c$$

$$\log\left|\frac{x}{t^3+1}\right|=c$$

よって

$$\left|\frac{x}{t^3+1}\right|=e^c$$

$$\frac{x}{t^3+1}=\pm e^c$$

$$x=\pm e^c(t^3+1)$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$$\boldsymbol{x=C(t^3+1)} \quad (C\text{ は任意定数})$$

（4） 両辺を $\dfrac{x^2+1}{2x}$ で割ると

$$\frac{2x}{x^2+1}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt$$

$$\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx=\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$\log|x^2+1|=\log|t|+c \quad (c\text{ は任意定数})$$

$$\log|x^2+1|-\log|t|=c$$

$$\log\left|\frac{x^2+1}{t}\right|=c$$

よって

$$\left|\frac{x^2+1}{t}\right|=e^c$$

$$\frac{x^2+1}{t}=\pm e^c$$

$$x^2+1=\pm e^c t$$

$$x^2=\pm e^c t-1$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$$\boldsymbol{x^2=Ct-1} \quad (C\text{ は任意定数})$$

問 6

（1） 両辺に $2x$ をかけると

$$2x\frac{dx}{dt}=t+1$$

両辺を t について積分すると

$$\int 2x\,dx=\int(t+1)\,dt$$

これより

$$x^2=\frac{1}{2}t^2+t+c \quad (c\text{ は任意定数})$$

これに，$t=2$，$x=1$ を代入すると

$$1^2=\frac{1}{2}\cdot 2^2+2+c$$

$$1=2+2+c$$

$$c=-3$$

よって，求める解は，$\boldsymbol{x^2=\frac{1}{2}t^2+t-3}$

（2） 両辺を x で割ると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{t}{t^2+1}$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{t}{t^2+1}\,dt$$

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+1)'}{t^2+1}\,dt$$

これより

$$\log|x|=\frac{1}{2}\log(t^2+1)+c \quad (c\text{ は任意定数})$$

$$\log|x|-\log\sqrt{t^2+1}=c$$

$$\log\frac{|x|}{\sqrt{t^2+1}}=c$$

よって

$$\frac{|x|}{\sqrt{t^2+1}}=e^c$$

$$|x|=e^c\sqrt{t^2+1}$$

$$x=\pm e^c\sqrt{t^2+1}$$

$C=\pm e^c$ とおくと

$$x=C\sqrt{t^2+1} \quad (C\text{ は任意定数})$$

これに，$t=0$，$x=2$ を代入すると

$$2=C\sqrt{0^2+1}$$

$$C=2$$

よって，求める解は，$\boldsymbol{x=2\sqrt{t^2+1}}$

問 7

（1） $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x+t}{t}$ より，　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{t}+1\cdots$①

$u=\dfrac{x}{t}$ とおくと，$x=tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt}$$

これを①に代入して

$$u+t\frac{du}{dt}=u+1$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt}=1$

$\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int du=\int\frac{1}{t}\,dt$$

これより

$$u=\log|t|+C \quad (C\text{ は任意定数})$$

ここで，$u=\dfrac{x}{t}$ であるから

$$\frac{x}{t} = \log|t| + C$$

$$\boldsymbol{x = t(\log|t| + C)} \quad (C \text{ は任意定数})$$

（2）　$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと，$x = tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$$

これを与えられた微分方程式に代入して

$$u + t\frac{du}{dt} = u + e^{-u}$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt} = e^{-u}$

$e^u \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int e^u \, du = \int \frac{1}{t} \, dt$$

これより

$$e^u = \log|t| + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

$$u = \log(\log|t| + C)$$

ここで，$u = \dfrac{x}{t}$ であるから

$$\frac{x}{t} = \log(\log|t| + C)$$

$$\boldsymbol{x = t\log(\log|t| + C)} \quad (C \text{ は任意定数})$$

問 8

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t + x}{t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + 2 \cdots ①$$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおくと，$x = tu$ であるから，両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$$

これを①に代入すると

$$u + t\frac{du}{dt} = u + 2$$

すなわち，$t\dfrac{du}{dt} = 2$

$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2}{t}$ であるから，両辺を t について積分すると

$$\int du = \int \frac{2}{t} \, dt$$

これより

$$u = 2\log|t| + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

ここで，$u = \dfrac{x}{t}$ であるから

$$\frac{x}{t} = 2\log|t| + C$$

$$x = t(2\log|t| + C)$$

これに，$t = 1$，$x = 0$ を代入して

$$0 = 1(2\log|1| + C)$$

$$C = 0$$

よって，求める解は，$\boldsymbol{x = 2t\log|t|}$

問 9

（1）　i）斉次１階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{x} \, du = \int \frac{1}{t} \, dt$$

これより

$$\log|x| = \log|t| + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\log|x| - \log|t| = c$$

$$\log\left|\frac{x}{t}\right| = c$$

よって

$$\left|\frac{x}{t}\right| = e^c$$

$$\frac{x}{t} = \pm e^c$$

$$x = \pm e^c t$$

$\pm e^c = C$ とおくと

$$x = Ct \quad (C \text{ は任意定数})$$

ii）　$x = ut$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}t + u - \frac{ut}{t} = t + 1$$

$$\frac{du}{dt}t = t + 1$$

$$\frac{du}{dt} = 1 + \frac{1}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int du = \int \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$$

これより

$$u = t + \log|t| + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって，求める一般解は

$$\boldsymbol{x = t(t + \log|t| + C)} \quad (C \text{ は任意定数})$$

〔別解〕　（積分因子を利用）

$$\int \left(-\frac{1}{t}\right) dt = -\log|t|$$

ここで，$e^{-\log|t|} = \dfrac{1}{|t|}$

i）$t > 0$ のとき

方程式の両辺に，$\dfrac{1}{t}$ をかけると

$$\frac{1}{t}\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t^2} = 1 + \frac{1}{t}$$

ii）$t < 0$ のとき

方程式の両辺に，$-\dfrac{1}{t}$ をかけると

$$-\frac{1}{t}\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t^2} = -1 - \frac{1}{t}$$

すなわち，$\frac{1}{t}\frac{dx}{dt}-\frac{x}{t^2}=1+\frac{1}{t}$

よって，いずれの場合も

$$\left(\frac{x}{t}\right)'=1+\frac{1}{t}$$

$$\frac{x}{t}=\int\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=t+\log|t|+C$$

したがって

$$\boldsymbol{x=t(t+\log|t|+C)}\quad(C\text{ は任意定数})$$

（2） i) 斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}+x=0$$

$$\frac{dx}{dt}=-x$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-1$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=-\int dt$$

これより

$$\log|x|=-t+c\quad(c\text{ は任意定数})$$

よって

$$|x|=e^{-t+c}$$

$$=e^ce^{-t}$$

$$x=\pm e^ce^{-t}$$

$\pm e^c=C$ とおくと

$$x=Ce^{-t}\quad(C\text{ は任意定数})$$

ii) $x=ue^{-t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}e^{-t}-ue^{-t}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}e^{-t}-ue^{-t}+ue^{-t}=e^{-t}$$

$$\frac{du}{dt}e^{-t}=e^{-t}$$

$$\frac{du}{dt}=1$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int dt$$

これより

$$u=t+C\quad(C\text{ は任意定数})$$

よって，求める一般解は

$$\boldsymbol{x=(t+C)e^{-t}}\quad(C\text{ は任意定数})$$

〔別解〕 （積分因子を利用）

$$\int dt=t$$

方程式の両辺に，e^t をかけると

$$e^t\frac{dx}{dt}+e^tx=e^{-t}\cdot e^t$$

$$(e^tx)'=1$$

よって

$$e^tx=\int dt$$

$$=t+C\quad(C\text{ は任意定数})$$

したがって

$$\boldsymbol{x=\frac{t+C}{e^t}=(t+C)e^{-t}}\quad(C\text{ は任意定数})$$

問 10

（1） i) 斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt}+x\cos t=0$$

$$\frac{dx}{dt}=-x\cos t$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-\cos t$$

両辺を t について積分すると

$$\int\frac{1}{x}\,dx=-\int\cos t\,dt$$

これより

$$\log|x|=-\sin t+c\quad(c\text{ は任意定数})$$

よって

$$|x|=e^{-\sin t+c}$$

$$=e^ce^{-\sin t}$$

$$x=\pm e^ce^{-\sin t}$$

$\pm e^c=C$ とおくと

$$x=Ce^{-\sin t}\quad(C\text{ は任意定数})$$

ii) $x=ue^{-\sin t}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}e^{-\sin t}-u\cos t\cdot e^{-\sin t}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}e^{-\sin t}-ue^{-\sin t}\cos t+ue^{-\sin t}\cos t=2te^{-\sin t}$$

$$\frac{du}{dt}=2t$$

両辺を t について積分すると

$$\int du=\int 2t\,dt$$

これより

$$u=t^2+C\quad(C\text{ は任意定数})$$

よって，一般解は

$$x=(t^2+C)e^{-\sin t}$$

これに，$t=0,\ x=1$ を代入して

$$1=(0^2+C)e^{-\sin 0}$$

$$C=1$$

よって，求める解は

$$\boldsymbol{x=(t^2+1)e^{-\sin t}}$$

〔一般解の求め方の別解〕　（積分因子を利用）

$$\int \cos t\, dt = \sin t$$

方程式の両辺に，$e^{\sin t}$ をかけると

$$e^{\sin t}\frac{dx}{dt} + e^{\sin t}x\cos t = 2te^{-\sin t}\cdot e^{\sin t}$$

$$(e^{\sin t}x)' = 2t$$

よって

$$e^{\sin t}x = \int 2t\, dt$$

$$= t^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

したがって

$$x = (t^2 + C)e^{-\sin t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

（2） i ）斉次 1 階微分方程式の解

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2x}{t} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{t}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{t}$$

両辺を t について積分すると

$$\int \frac{1}{x}\, dx = -\int \frac{2}{t}\, dt$$

これより

$$\log|x| = -2\log|t| + c \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$\log|x| + \log t^2 = c$$

$$\log t^2|x| = c$$

よって

$$t^2|x| = e^c$$

$$|x| = \frac{e^c}{t^2}$$

$$x = \pm\frac{e^c}{t^2}$$

$\pm e^c = C$ とおくと，$x = \dfrac{C}{t^2}$

（C は任意定数）

ii ）　$x = \dfrac{u}{t^2}$ とおき，両辺を t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cdot\frac{1}{t^2} - \frac{2u}{t^3}$$

微分方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt}\cdot\frac{1}{t^2} - \frac{2u}{t^3} + \frac{2u}{t^3} = \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{du}{dt}\cdot\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{du}{dt} = 1$$

両辺を t について積分すると

$$\int du = \int dt$$

これより

$$u = t + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって，一般解は

$$x = \frac{t+C}{t^2}$$

これに，$t = 1$，$x = -1$ を代入して

$$-1 = \frac{1+C}{1^2}$$

$$C = -2$$

よって，求める解は

$$x = \frac{t-2}{t^2}$$

すなわち，$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{t^2}}$

〔一般解の求め方の別解〕　（積分因子を利用）

$$\int \frac{2}{t}\, dt = 2\log|t| = \log t^2$$

ここで，$e^{\log t^2} = t^2$

方程式の両辺に，t^2 をかけると

$$t^2\frac{dx}{dt} + 2xt = 1$$

$$(t^2x)' = 1$$

よって

$$t^2x = \int dt$$

$$= t + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

したがって

$$x = \frac{t+C}{t^2} \quad (C \text{ は任意定数})$$

∎

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

〔参考〕

1 階線形の微分方程式を解く際の手順が面倒ならば，解の公式がありますので，これを使うのも一法です．この教科書で利用する場合には，$x \to t$，$y \to x$ に読み替えてください．

1 階線形微分方程式の一般解

$\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$ の一般解は

$$\boldsymbol{y = e^{-\int P(x)\,dx}\left\{\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx + C\right\}}$$