1章詳説　関数の展開

練習問題 1-A

1. (1)　関数 $\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$ をとると

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\log(1+n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{x\to\infty}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log(1+x)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x)}{x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\{\log(1+x)\}'}{x'}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(2)　関数 $x\left(\operatorname{cosec}\frac{1}{x}-\cot\frac{1}{x}\right)$ をとり，$\frac{1}{x}=y$ とおくと

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\operatorname{cosec}\frac{1}{n}-\cot\frac{1}{n}\right) &= \lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{cosec}\frac{1}{x}-\cot\frac{1}{x}\right)\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}(\operatorname{cosec} y-\cot y)\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{1}{\sin y}-\frac{1}{\tan y}\right)\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{1}{\sin y}-\frac{\cos y}{\sin y}\right)\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\frac{1-\cos y}{\sin y}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\frac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{\sin y(1+\cos y)}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\frac{1-\cos^2 y}{\sin y(1+\cos y)}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\frac{\sin^2 y}{\sin y(1+\cos y)}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{1+\cos y}\\
&= 1\cdot\frac{1}{1+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

2. (1)

$$\begin{aligned}
\frac{2^n}{n!} &= \frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n-2}\cdots\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{1}\\
&= \left(\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n-2}\cdots\frac{2}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{1}\\
&= \left\{\frac{2^{n-3}}{n(n-1)(n-2)\cdots 5\cdot 4}\right\}\cdot\frac{4}{3}\\
&\leqq \frac{2^{n-3}}{\underbrace{4\cdot 4\cdot 4\cdots 4\cdot 4}_{(n-3)\text{ 個}}}\cdot\frac{4}{3}\\
&= \left(\frac{2}{4}\right)^{n-3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}
\end{aligned}$$

ただし，$n-3\geqq 1$

よって，$n\geqq 4$ のとき，$\dfrac{2^n}{n!}\leqq\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$

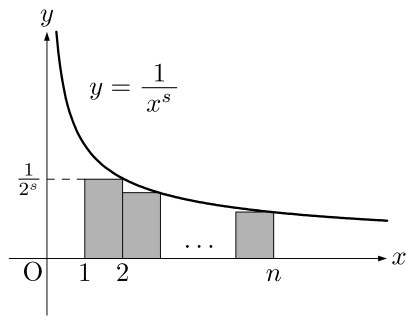
(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ の部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3} &= \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3}\\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}\\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{32}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{32}{3}$ となり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ は収束する．

(1) より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k!}\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3}$ であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ は収束する．

3. (1)　与えられた級数の部分和を S_n とおく．$y=\dfrac{1}{x^s}$ のグラフを考えると，$s>1$ のとき，図の影をつけた部分の面積について



$$\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}<\int_1^n\frac{1}{x^s}\,dx$$

すなわち

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}=S_n<1+\int_1^n\frac{1}{x^s}\,dx$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\int_1^n\frac{1}{x^s}\,dx &= \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^n\\
&= \frac{1}{1-s}(n^{1-s}-1)\\
&= \frac{1}{s-1}(1-n^{1-s})
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
S_n &< 1+\frac{1}{s-1}(1-n^{1-s})\\
&= \frac{s-1+1}{s-1}-\frac{1}{s-1}n^{1-s}\\
&= \frac{s}{s-1}-\frac{1}{s-1}n^{1-s}<\frac{s}{s-1}
\end{aligned}$$

したがって，$s>1$ のとき，この級数は収束する．

(2)　i) $s=1$ のとき

級数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ は発散する．

(P.136　例題 5)

ii) $s<1$ のとき

$n>n^s$ より，$\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{n^s}$

級数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ は発散するので

級数 $1+\dfrac{1}{2^s}+\dfrac{1}{3^s}+\cdots+\dfrac{1}{n^s}+\cdots$ も発散する．

よって，$s\leqq 1$ のとき，この級数は発散する．

4. (1) $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$ とおくと

$f(0)=1$

$f'(x)=-\dfrac{2}{(1+2x)^2}$ より，$f'(0)=-2$

$f''(x)=\dfrac{8}{(1+2x)^3}$ より，$f''(0)=8$

$f'''(x)=-\dfrac{48}{(1+2x)^4}$ より，$f'''(0)=-48$

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!\cdot 2^n}{(1+2x)^{n+1}}$ より，

$$f^{(n)}(0)=(-1)^n n!\cdot 2^n$$

n 次近似式を $P_n(x)$ とおくと

$$P_n(x) = 1 + (-2)\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot 8x^2 + \frac{1}{3!}\cdot(-48)x^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(-1)^n (n)!\,2^n}{(n)!}x^n$$
$$= 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots + (-2)^n x^n$$
$$= \frac{1-(-2x)^{n+1}}{1-(-2x)}$$
$$= \frac{1-(-2x)^{n+1}}{1+2x}$$

これより，$f(x) - P_n(x) = \dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-(-2x)^{n+1}}{1+2x}$

$$= \frac{1-\{1-(-2x)^{n+1}\}}{1+2x}$$
$$= \frac{(-2x)^{n+1}}{1+2x}$$

よって，$|-2x| < 1$，すなわち，$|x| < \dfrac{1}{2}$ のとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{f(x) - P_n(x)\} = 0$ が成り立つ．

以上より，マクローリン展開は

$$\boldsymbol{1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots + (-2)^n x^n + \cdots}$$

また，収束半径は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

〔別解〕

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad (|x| < 1)$ であるから

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)}$$
$$= 1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \cdots$$
$$\cdots + (-2x)^n + \cdots \quad (|-2x| < 1)$$
$$\boldsymbol{= 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots}$$
$$\boldsymbol{\cdots + (-2)^n x^n + \cdots} \quad \left(|x| < \frac{1}{2}\right)$$

収束半径は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

（2）　（1）より，$|x| < \dfrac{1}{2}$ のとき，

$$1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots + (-1)^n 2^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+2x}$$

の両辺を 0 から x まで積分すると

$$x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n 2^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$$
$$= \int_0^x \frac{1}{1+2x}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\log|1+2x|\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{2}\log(1+2x)$$

よって

$$\log(1+2x) = 2\left\{x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^4 + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \frac{(-1)^n 2^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots\right\}$$
$$\boldsymbol{= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \cdots}$$
$$\boldsymbol{\cdots + \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n}x^n + \cdots}$$

5.（1）　$\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + R_5$

$$= x - \frac{1}{6}x^3 + R_5$$

$(\sin x)^{(5)} = \cos x$ であるから，

$$R_5 = \frac{\cos\theta x}{5!}x^5 = \frac{\cos\theta x}{120}x^5$$

よって，$\boldsymbol{\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{\cos\theta x}{120}x^5}$

（2）　$x = 0.5$ すると

$$\sin 0.5 = 0.5 - \frac{1}{6}(0.5)^3$$
$$= 0.5 + \frac{0.125}{6}$$
$$= \frac{0.5\cdot 6 - 0.125}{6}$$
$$= \frac{2.875}{6} = 0.479166\cdots$$

よって，**0.4792**

$$|\varepsilon_5| = \left|\frac{\cos 0.5\theta}{120}\cdot(0.5)^5\right| < \frac{(0.5)^5}{120}$$
$$= \frac{0.03125}{120} = 0.000260\cdots$$

よって，誤差の限界は，**0.0003**

6.　〔準備〕

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$
$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$
$$\sinh 0 = \frac{1-1}{2} = 0$$
$$\cosh 0 = \frac{1+1}{2} = 1$$

（1）　$f(x) = \sinh x$ とおくと

$f(0) = 0$

$f'(x) = \cosh x$ より，$f'(0) = 1$

$f''(x) = \sinh x$ より，$f''(0) = 0$

よって

$$f(x) = 0 + 1\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot 0\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot 1\cdot x^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{(2n-1)!}\cdot 1\cdot x^{2n-1} + \frac{1}{2n!}\cdot 0\cdot x^{2n} + R_{2n+1}$$
$$= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + R_{2n+1}$$

$$R_{2n+1} = \frac{\cosh\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$0 < \theta < 1$ より，$\theta x \leqq |\theta x| \leqq |x|$

よって，$|R_{2n+1}| \leqq \cosh|x|\cdot\dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_{2n+1} = 0$

以上より

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

（2）　$f(x) = \cosh x$ とおくと

$f(0) = 1$

$f'(x) = \sinh x$ より，$f'(0) = 0$

$f''(x) = \cosh x$ より，$f''(0) = 1$

よって

$$f(x) = 1 + 0\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot 1\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot 0\cdot x^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{(2n-2)!}\cdot 1\cdot x^{2n-2} + \frac{1}{(2n-1)!}\cdot 0\cdot x^{2n-1} + R_{2n}$$
$$= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{(2n-2)!}x^{2n-2} + R_{2n}$$

$$R_{2n} = \frac{\sinh\theta x}{(2n)!}x^{2n}$$

$0 < \theta < 1$ より，$\theta x \leqq |\theta x| \leqq |x|$

よって，$|R_{2n}| \leqq \sinh|x| \cdot \dfrac{|x|^{2n}}{(2n)!}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{2n}}{(2n)!} = 0$ より，$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1} = 0$

以上より

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

7. $y' = \lambda e^{\lambda x}$

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

これらを，与えられた等式に代入すると

$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$

$e^{\lambda x}(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$e^{\lambda x} \fallingdotseq 0$ であるから，$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

これを解くと

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \boldsymbol{\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}}$$

練習問題 1-B

1. $\log \dfrac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$

ここで

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots$$

※ 証明略　教科書 P.19　参照

$$\begin{aligned}\log(1-x) &= \log\{1+(-x)\} \\ &= (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 - \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n + \cdots \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots - \frac{1}{n}x^n - \cdots\end{aligned}$$

x^7 までを用いて

$\log(1+x) - \log(1-x)$

$$\begin{aligned}&= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7\right) \\ &\quad - \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{7}x^7\right) \\ &= 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7\right)\end{aligned}$$

$x = \dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\log \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} &= \log \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= \log 3 \\ &= 2\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\} \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{7\cdot 2^7}\right) \\ &= 2\cdot\frac{3\cdot5\cdot7\cdot2^6 + 5\cdot7\cdot2^4 + 3\cdot7\cdot2^2 + 3\cdot5}{3\cdot5\cdot7\cdot2^7} \\ &= \frac{6720+560+84+15}{3\cdot5\cdot7\cdot2^6} \\ &= \frac{7379}{6720} = 1.0980\cdots\end{aligned}$$

よって，**1.098**

2.（1）$\tan^{-1}\dfrac{1}{2} = \alpha$，$\tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \beta$ とおくと

$\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{3}$

ここで，
$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}} = 1\end{aligned}$$

したがって，$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$

すなわち，$\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

（2）x^5 までの項を用いて

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\frac{1}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} \\ &= \frac{3\cdot5\cdot2^4 - 5\cdot2^2 + 3}{3\cdot5\cdot2^5} \\ &= \frac{240-20+3}{3\cdot5\cdot2^5} \\ &= \frac{223}{3\cdot5\cdot2^5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\frac{1}{3} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} \\ &= \frac{5\cdot3^4 - 5\cdot3 + 1}{5\cdot3^5} \\ &= \frac{405-15+1}{5\cdot3^5} \\ &= \frac{391}{5\cdot3^5}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} &= \frac{223}{3\cdot5\cdot2^5} + \frac{391}{5\cdot3^5} \\ &= \frac{223\cdot3^4 + 391\cdot2^5}{3^5\cdot5\cdot2^5} \\ &= \frac{18063+12512}{38880} \\ &= \frac{30575}{38880}\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{30575}{38880}$ より，$\pi = \dfrac{30575}{38880}\times 4$

$$= \frac{122300}{38880} = 3.14557\cdots$$

よって，**3.1456**

〔別の計算〕

$\tan^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{223}{3\cdot5\cdot2^5} = 0.46458\cdots$

$\tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{391}{5\cdot3^5} = 0.32181\cdots$

よって，$\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = 0.46458 + 0.32181 = 0.78639$

したがって，$\dfrac{\pi}{4} = 0.78639$ より，$\pi = 0.78639\times 4$

$= 3.14556$

よって，**3.1456**

3. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ とすると

$f(0)=1$

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ より，$f'(0)=\alpha$

$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ より，$f''(0)=\alpha(\alpha-1)$

$\vdots$

$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ より，　$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$

よって，マクローリンの定理より，次の等式を満たす θ が存在する．

$$\begin{aligned} f(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n \\ &=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2))}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n \end{aligned}$$

ただし，$R_n=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n\,!}x^n$

$$=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+\theta x)^{\alpha-n}}{n\,!}x^n,\quad 0<\theta<1$$

4. **3.** の結果において，$\alpha=\dfrac{1}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} f(x)&=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{2\,!}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\frac{1}{3\,!}x^3+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+2\right)\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n \\ &=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2\,!}x^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{3\,!}x^3+\cdots+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-5}{2}\right)\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n \\ &=1+\frac{1}{2}x+\frac{(-1)}{2^2}\cdot\frac{1}{2\,!}x^2+\frac{(-1)^2\cdot1\cdot3}{2^3}\cdot\frac{1}{3\,!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}\cdot1\cdot3\cdots(2n-5)}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n \end{aligned}$$

ここで　　$1\cdot3\cdot5\cdots(2n-7)(2n-5)$

$$\begin{aligned} &=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots(2n-7)(2n-6)(2n-5)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-6)} \\ &=\frac{(2n-5)!}{2\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot3)\cdots2(n-3)} \\ &=\frac{(2n-5)!}{2^{n-3}\cdot\{(1\cdot2\cdot3\cdots(n-3)\}} \\ &=\frac{(2n-5)!}{2^{n-3}(n-3)\,!} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} f(x)&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-1}}\cdot\frac{(2n-5)!}{2^{n-3}(n-3)\,!}\cdot\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n \\ &=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}(2n-5)!}{2^{n-1}\cdot2^{n-3}(n-3)\,!(n-1)!}x^{n-1}+R_n \\ &=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}(2n-5)!}{2^{2n-4}(n-3)\,!(n-1)!}x^{n-1}+R_n \end{aligned}$$

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)\,!n\,!}(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-n}x^n$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$　$(|x|<1)$ なので

$$f(x)=\boldsymbol{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)\,!n\,!}x^n+\cdots}$$

5.（1）$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ とおく．

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\{1+(-x^2)\}^{-\frac{1}{2}}$ であるから，**3.** の結果において，$\alpha=-\dfrac{1}{2}$，　$x=(-x^2)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x)&=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2\,!}(-x^2)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\frac{1}{3\,!}(-x^2)^3+\cdots \\ &\qquad\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+2\right)\frac{1}{(n-1)\,!}(-x^2)^{n-1}+R_n \\ &=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\,!}x^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3\,!}x^6+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-3}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)\,!}x^{2n-2}+R_n \\ &=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2\cdot2}x^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2\cdot2}\cdot\frac{5}{2\cdot3}x^6+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2\cdot2}\cdot\frac{5}{2\cdot3}\cdots\frac{2n-3}{2(n-1)}x^{2n-2}+R_n \\ &=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}x^{2n-2}+R_n \end{aligned}$$

$$R_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\{1-(\theta x)^2\}^{-\frac{1}{2}-n}x^n$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=0$　$(|x|<1)$ なので

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots$$

（2）（1）の両辺を 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

$$\Big[\sin^{-1}x\Big]_0^x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

したがって，$\sin^{-1}x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}x^7 + \cdots \quad (|x|<1)$

6. $(\cos x + i\,\sin x)^3$ を展開すると

$$\begin{aligned}
&(\cos x + i\,\sin x)^3\\
&= \cos^3 x + 3\cos^2 x(i\sin x) + 3\cos x(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3\\
&= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x + 3\,i^2\cos x\sin^2 x + i^3\sin^3 x\\
&= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x\\
&= (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i\,(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)\\
&= \{\cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x)\} + i\,\{3(1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x\}\\
&= (\cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^2 x) + i\,(3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x)\\
&= (4\cos^3 x - 3\cos x) + i\,(3\sin x - 4\sin^3 x) \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

一方，ド・モアブルの定理より

$$(\cos x + i\,\sin x)^3 = \cos 3x + i\,\sin 3x$$

この式の右辺と ① の実部，虚部を比較して

$$\begin{cases} \boldsymbol{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x} \\ \boldsymbol{\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x} \end{cases}$$

■