1章詳説　関数の展開

§ 1　関数の展開　(p.129〜p.154)

問 1

（1）　$\text{与式} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(3n-5)\cdot\dfrac{1}{n}}{(2n+1)\cdot\dfrac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{3-\dfrac{5}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}$

$= \dfrac{3-0}{2+0} = \mathbf{\dfrac{3}{2}}$

（2）　$\text{与式} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n-2)\cdot\dfrac{1}{n^2}}{(2n^2+1)\cdot\dfrac{1}{n^2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}}$

$= \dfrac{0-0}{2+0} = \mathbf{0}$

（3）　$\text{与式} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)-(n-1)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}} = \mathbf{0}$

（分母 $\to\infty$，　分子 $\to 4$）

または

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1})\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}$

$= \dfrac{0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \mathbf{0}$

（4）　$\text{与式} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{4n^2+3n}-2n)(\sqrt{4n^2+3n}+2n)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{(4n^2+3n)-(2n)^2}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{3n\cdot\dfrac{1}{n}}{(\sqrt{4n^2+3n}+2n)\cdot\dfrac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{(4n^2+3n)\cdot\dfrac{1}{n^2}}+2n\cdot\dfrac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+2}$

$= \dfrac{3}{\sqrt{4+0}+2} = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$

問 2　それぞれの等比数列の公比を r とする.

（1）　$r = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 1$

よって，この等比数列は，**∞ に発散する.**

（2）　$r = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$

$= -(1+\sqrt{2}) < -1$

よって，この等比数列は，**発散する.（振動する.）**

（3）　$\left\{\dfrac{4^n}{7^n}\right\} = \left\{\left(\dfrac{4}{7}\right)^n\right\}$ であるから，$r = \dfrac{4}{7}$

$-1 < r < 1$ より，この等比数列は，**0 に収束する.**

問 3

（1）　$f(x) = x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ とおき，さらに $\dfrac{1}{x} = y$ とおくと

$\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$

$= \lim_{y\to 0} \dfrac{1}{y^2}(1-\cos y)$

$= \lim_{y\to 0} \dfrac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y^2(1+\cos y)}$

$= \lim_{y\to 0} \dfrac{1-\cos^2 y}{y^2(1+\cos y)}$

$= \lim_{y\to 0} \dfrac{\sin^2 y}{y^2(1+\cos y)}$

$= \lim_{y\to 0} \dfrac{\sin^2 y}{y^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos y}$

$= 1^2\cdot\dfrac{1}{1+1} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

（2）　$f(x) = x(\sqrt[x]{e}-1)$ とおき，さらに $\dfrac{1}{x} = y$ とおくと

$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1) = \lim_{x\to\infty} x(\sqrt[x]{e}-1)$

$= \lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$

$= \lim_{y\to 0} \dfrac{1}{y}(e^y-1)$

$= \lim_{y\to 0} \dfrac{e^y-1}{y} = \mathbf{1}$

問 4

（1）　関数 $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ をとり，ロピタルの定理を用いると

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{\sqrt{n}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^{-\frac{1}{2}+1}}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \mathbf{0}$

（2）　関数 $\dfrac{x\sqrt{x}}{e^x}$ をとり，ロピタルの定理を用いると

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{n}}{e^n} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{(x^{\frac{3}{2}})'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{e^x}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{(x^{\frac{1}{2}})'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{e^x}$

$= \dfrac{3}{4}\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}e^x} = \mathbf{0}$

問 5

（1） $$\lim_{n\to\infty}\frac{n\,!}{2^n+3^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\,!\times\dfrac{1}{n\,!}}{(2^n+3^n)\times\dfrac{1}{n\,!}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{2^n}{n\,!}+\dfrac{3^n}{n\,!}}=\boldsymbol{\infty}$$

（2） $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5\,2^n}{n\,!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5\,2^n\times 2^n}{n\,!\times 2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5\,2^{2n}}{n\,!\,2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5\,4^n}{n\,!\,2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{2^n}\cdot\frac{4^n}{n\,!}=\mathbf{0}$$

問 6

第 n 部分和を S_n とすると
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$

したがって，この級数は**収束**し，その和は $\mathbf{1}$

問 7

（1） 与えられた級数の一般項を a_n とすると，$a_n=(-1)^{n-1}$ であるから

i）n が偶数のとき，$a_n=-1$

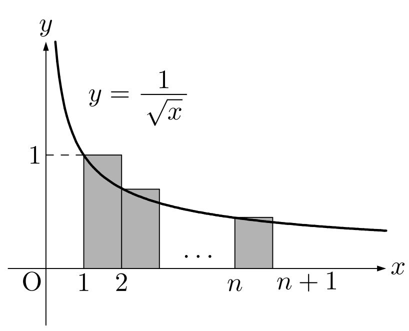
ii）n が奇数のとき，$a_n=1$

よって，a_n は振動し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\fallingdotseq 0$ であるから，この級数は発散する．

（2） $a_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}-1}{n}$ とおくと
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n}\right)=1\fallingdotseq 0$$
よって，この級数は発散する．

問 8

図のように，関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と影をつけた部分の面積を考えると
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$



ここで，$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^{n+1}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{n+1}$$
$$=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})$$
$$=2(\sqrt{n+1}-1)$$

与えられた級数の第 n 部分和を S_n とすると

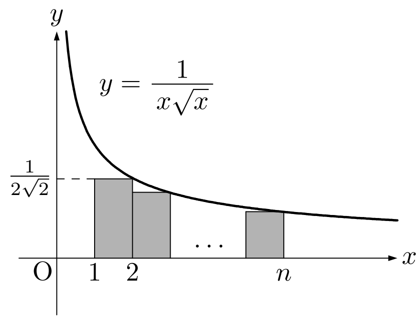
$S_n>2(\sqrt{n+1}-1)$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2(\sqrt{n+1}-1)=\infty$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

したがって，この級数は発散する．

問 9

図のように，関数 $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ と影をつけた部分の面積を考えると
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<\int_1^{n}\frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$$



ここで，$$\int_1^{n}\frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx=\int_1^{n}x^{-\frac{3}{2}}\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^{n}$$
$$=-2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{1}}\right)$$
$$=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

与えられた級数の第 n 部分和を S_n とすると
$$S_n<1+2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=3-\frac{2}{\sqrt{n}}<3$$
よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n\leqq 3$ となり，この級数は収束する．

問 10

（1） $$(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2=(2n)^2-(\sqrt{n(n+1)})^2$$
$$=4n^2-n(n+1)$$
$$=3n^2-n$$
$$=n(3n-1)$$

$n\geqq 1$ のとき，$3n-1\geqq 2$ であるから，$n(3n-1)>0$

よって，$(2n)^2>(\sqrt{n(n+1)})^2$

ここで，$2n>0$，$\sqrt{n(n+1)}>0$ であるから

$\sqrt{n(n+1)}<2n$

（2） （1）より，$\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\dfrac{1}{2n}$

ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)$ は発散する（例題 5）ので，この級数は**発散する．**

問 11

(1) $|(-1)^n| = 1,\ n^2+1>0$ より

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \left|\frac{1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束する（例題 6）ので，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right|$ も収束する．

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ も収束する．

(2) $|\sin n| \leqq 1$ より，$\displaystyle\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqq \frac{1}{|n^2|} = \frac{1}{n^2}$

ここで，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束するので，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ も収束する．

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ も収束する．

問 12

(1) $r = \dfrac{1}{3}$ より，$|r|<1$ であるから，この等比級数は収束し，その和は

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(2) $r = -\dfrac{1}{2}$ より，$|r|<1$ であるから，この等比級数は収束し，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(3) $r = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 1$ であるから，この等比級数は**発散する．**

(4) $r = 0.1$ より，$|r|<1$ であるから，この等比級数は収束し，その和は

$$\frac{0.3}{1-0.1} = \frac{0.3}{0.9} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

問 13

点 P の座標は

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\cdots$$

より，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比級数の和になるから

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\cdots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

問 14

与えられたべき級数は，初項 1，公比 $2x^2$ の等比級数だから，$|2x^2|<1$ のとき，すなわち，$|x| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときに限り収束するので，収束半径は $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ である．

問 15

(1) 等式の左辺は，公比 $-x^2$ の等比級数であるから，$|-x^2|<1$，すなわち，$|x|<1$ のときに限り収束し，その和は

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

したがって，$1-x^2+x^4-x^6+\cdots = \dfrac{1}{1+x^2}$

(2) (1) の両辺を 0 から x まで積分すると

$$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\tan^{-1}x\Big]_0^x = \tan^{-1}x$$

したがって，$x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7+\cdots = \tan^{-1}x$

問 16

$f(x) = \log(1+x)$ とおくと

$f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ より，$f'(0) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ より，$f''(0) = -1$

$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ より，$f'''(0) = 2$

$f^{(4)}(x) = -\dfrac{3\,!}{(1+x)^4}$

マクローリンの定理を適用すると

$$f(x) = 0+1\cdot x+\frac{1}{2\,!}\cdot(-1)x^2+\frac{1}{3\,!}\cdot 2x^3+R_4$$
$$= \boldsymbol{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+R_4}$$

$$R_4 = \frac{1}{4\,!}\left\{-\frac{3\,!}{(1+\theta x)^4}\right\}x^4$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{4}(1+\theta x)^{-4}x^4}$$

問 17

$f(x) = e^x$ とおくと

$f^{(n)}(x) = e^x$ より，$f'(1) = f''(1) = f'''(1) = e$

テイラーの定理を適用すると

$$f(x) = e+e(x-1)+\frac{1}{2\,!}\cdot e(x-1)^2+\frac{1}{3\,!}\cdot e(x-1)^3+R_4$$
$$= \boldsymbol{e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+\frac{e}{6}(x-1)^3+R_4}$$

$$R_4 = \frac{1}{4\,!}e^{1+\theta(x-1)}(x-1)^4$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{24}e^{1+\theta(x-1)}(x-1)^4}$$

問 18

$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f''(x) = -2xe^{-\frac{x^2}{2}} + (1-x^2)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x) = (x^3-3x)e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f'(x) = 0$ より，$x = \pm 1$

i) $x = 1$ のとき

$f''(1) = (1-3)e^{-\frac{1}{2}} = -2e^{-\frac{1}{2}} < 0$

また，$f(1) = 1\cdot e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

よって，$x=1$ で**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$ をとる．

ii) $x = -1$ のとき

$f''(-1) = (-1+3)e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{-\frac{1}{2}} > 0$

また，$f(-1) = -1\cdot e^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

よって，$x=-1$ で**極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$ をとる．

問 19

$f'(x) = 1-\{e^x\cos x+e^x(-\sin x)\} = 1+e^x(\sin x-\cos x)$

これより，$f'(0) = 1+1\cdot(0-1) = 0$

$f''(x) = e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x) = 2e^x\sin x$

これより，$f''(0)=0$

$f'''(x)=2(e^x\sin x+e^x\cos x)=2e^x(\sin x+\cos x)$

これより，$f'''(0)=2(0+1)=2\fallingdotseq 0$

以上より，$f(x)$ は $x=0$ で極値をとらない．

問 20

$n=4$ としたときのテイラーの定理より

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+R_4$$

ただし，$R_4=\dfrac{f^{(4)}\left(a+\theta(x-a)\right)}{4!}(x-a)^4,\quad 0<\theta<1$

$f'(a)=f''(a)=f'''(a)=0$ であるから，$f(x)=f(a)+R_4$

すなわち，$f(x)-f(a)=R_4=\dfrac{f^{(4)}\left(a+\theta(x-a)\right)}{4!}(x-a)^4$

$f^{(4)}(x)$ が連続で，$f^{(4)}(a)\fallingdotseq 0$ であれば，$\displaystyle\lim_{x\to a}f^{(4)}(x)=f^{(4)}(a)$ より，x が a に十分近ければ，$f^{(4)}\left(a+\theta(x-a)\right)$ と $f^{(4)}(a)$ の正負は一致する．また，$(x-a)^4\geqq 0$ であるから，$f(x)-f(a)$ の符号は，$x=a$ の前後で変化しない．したがって，関数 $f(x)$ は $x=a$ で極値をとる．

問 21

$n=4$ としてテイラーの定理を適用する．

$f(0)=1$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ より，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$

$f''(x)=-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 1=-\dfrac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$ より，$f''(0)=-\dfrac{1}{4}$

$f'''(x)=\dfrac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}\cdot 1=\dfrac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}$ より，$f''(0)=\dfrac{3}{8}$

$f^{(4)}(x)=-\dfrac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}\cdot 1=-\dfrac{15}{16\sqrt{(1+x)^7}}$

よって

$$\begin{aligned}f(x)&=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)x^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}x^3+R_4\\&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+R_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_3=R_4&=\frac{1}{4!}\left\{-\frac{15}{16\sqrt{(1+\theta x)^7}}\right\}x^4\\&=-\frac{15}{4!\cdot 16\sqrt{(1+\theta x)^7}}x^4\quad 0<\theta<1\end{aligned}$$

以上より，$f(x)$ の 3 次近似式は，$1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3$ であるから，$\sqrt{1.1}$ の近似値は

$$\begin{aligned}\sqrt{1.1}=\sqrt{1+0.1}&\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}\cdot 0.1-\frac{1}{8}\cdot 0.1^2+\frac{1}{16}\cdot 0.1^3\\&=1+0.05-0.00125+0.0000625\\&=\mathbf{1.048813}\end{aligned}$$

また，誤差の限界は

$$\begin{aligned}|\varepsilon_3|=\frac{15}{4!\cdot 16\sqrt{(1+0.1\theta)^7}}0.1^4&<\frac{15}{4!\cdot 16}0.1^4\\&=0.0000039\cdots\fallingdotseq\mathbf{0.000004}\end{aligned}$$

問 22

（1）　$f(x)=\sin x$ とおくと

$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,$

$f'''(x)=-\cos x,\ f^{(4)}(x)=\sin x$　以下繰り返し．

ここで，$f(0)=f^{(2n)}(0)=0$

$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$

したがって，マクローリンの定理より

$$\begin{aligned}f(x)&=f'(0)x+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\cdots\\&\qquad\cdots+\frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n+1}\\&=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n+1}\end{aligned}$$

ここで，$R_{2n+1}=(-1)^n\dfrac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}\quad 0<\theta<1$

$|\cos\theta x|\leqq 1$ であるから

$$|R_{2n+1}|\leqq\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|=\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|R_{2n+1}|=0$ となる．

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_{2n+1}=0$ が成り立つから，任意の x に対して

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$$

（2）　$f(x)=\cos x$ とおくと

$f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x$

$f'''(x)=\sin x,\ f^{(4)}(x)=\cos x,$　以下繰り返し．

ここで，$f^{(2n+1)}(0)=0$

$f^{(2n)}(0)=(-1)^n$

したがって，マクローリンの定理より

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots\\&\qquad\cdots+\frac{f^{(2n-2)}(0)}{(2n-2)!}x^{2n-2}+R_{2n}\\&=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}x^{2n-2}+R_{2n}\end{aligned}$$

ここで，$R_{2n}=(-1)^n\dfrac{\cos\theta x}{(2n)!}x^{2n}\quad 0<\theta<1$

$|\cos\theta x|\leqq 1$ であるから

$$|R_{2n}|\leqq\left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|=\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|R_{2n}|=0$ となる．

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_{2n}=0$ が成り立つから，任意の x に対して

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

問 23

（1）　左辺 $=e^{i(-x)}$

$=\cos(-x)+i\,\sin(-x)$

$=\cos x+i\,(-\sin x)$

$=\cos x-i\,\sin x=$ 右辺

（2）　第 1 式について

左辺 $=\dfrac{1}{2}\{(\cos x+i\,\sin x)+(\cos x-i\,\sin x)\}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cos x$

$=\cos x=$ 右辺

第 2 式について

左辺 $=\dfrac{1}{2i}\{(\cos x+i\,\sin x)-(\cos x-i\,\sin x)\}$

$=\dfrac{1}{2i}\cdot 2i\sin x$

$=\sin x=$ 右辺

問 24

（1）　$(e^{ix})'=\boldsymbol{i\,e^{ix}}$

（2）　$(e^{(3-2\,i)x})' = \boldsymbol{(3-2\,i)e^{(3-2\,i)x}}$

（3）　
$$\begin{aligned}(e^{ix}+e^{-ix})' &= ie^{ix}+(-i)e^{-ix}\\ &= ie^{ix}-ie^{-ix}\\ &= \boldsymbol{i(e^{ix}-e^{-ix})}\end{aligned}$$

（4）　
$$\begin{aligned}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2\,i}\right)' &= \frac{1}{2\,i}(e^{ix}-e^{-ix})'\\ &= \frac{1}{2\,i}\{ie^{ix}-(-i)e^{-ix}\}\\ &= \frac{1}{2\,i}(ie^{ix}+ie^{-ix})\\ &= \boldsymbol{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}\end{aligned}$$

∎