1章　数と式の計算

§1　整式の計算　(p.3〜p.7)

BASIC

1（1） 与式 $=(3-1)x^2+(4-3)x-5-4$

$=\boldsymbol{2x^2+x-9}$

（2） 与式 $=(-2+3)x^3+(1-4)x^2+(-3-1)x$

$=\boldsymbol{x^3-3x^2-4x}$

2（1） $A+B=(2x^2+4x-3)+(-x^2+3x+5)$

$=2x^2+4x-3-x^2+3x+5$

$=(2-1)x^2+(4+3)x-3+5$

$=\boldsymbol{x^2+7x+2}$

$A-B=(2x^2+4x-3)-(-x^2+3x+5)$

$=2x^2+4x-3+x^2-3x-5$

$=(2+1)x^2+(4-3)x-3-5$

$=\boldsymbol{3x^2+x-8}$

（2） $A+B=(3x^3-2x^2+x)+(2x^3-2x+4)$

$=3x^3-2x^2+x+2x^3-2x+4$

$=(3+2)x^3-2x^2+(1-2)x+4$

$=\boldsymbol{5x^3-2x^2-x+4}$

$A-B=(3x^3-2x^2+x)-(2x^3-2x+4)$

$=3x^3-2x^2+x-2x^3+2x-4$

$=(3-2)x^3-2x^2+(1+2)x-4$

$=\boldsymbol{x^3-2x^2+3x-4}$

3（1） 与式 $=2x^2+3x^2-3xy-2x+y^2+3y-5$

$=\boldsymbol{5x^2+(-3y+2)x+(y^2+3y-5)}$

（2） 与式 $=-bx^2+ax^2+3ax-2bx+4b$

$=\boldsymbol{(a-b)x^2+(3a-2b)x+4b}$

（3） 与式 $=x^3+ax^2-2ax^2-a^2x+3a^2x+a^3$

$=\boldsymbol{x^3-ax^2+2a^2x+a^3}$

4（1） 与式 $=(-1)^2\cdot(x^3)^2$

$=1\cdot x^{3\cdot2}$

$=\boldsymbol{x^6}$

（2） 与式 $=(-2)^3\cdot a^3\cdot(b^3)^3$

$=-8\cdot a^3b^{3\cdot3}$

$=\boldsymbol{-8a^3b^9}$

（3） 与式 $=(-1)^2\cdot a^2\cdot b^2\times(-2a^3b)$

$=1\cdot(-2)\times a^2\cdot a^3\times b^2\cdot b$

$=-2\cdot a^{2+3}\cdot b^{2+1}$

$=\boldsymbol{-2a^5b^3}$

（4） 与式 $=12a^2b\cdot\dfrac{a^2}{3}-12a^2b\cdot\dfrac{ab}{6}-12a^2b\cdot\dfrac{b^2}{4}$

$=12\cdot\dfrac{1}{3}\cdot a^{2+2}b-12\cdot\dfrac{1}{6}\cdot a^{2+1}b^{1+1}$

$-12\cdot\dfrac{1}{4}\cdot a^2b^{1+2}$

$=\boldsymbol{4a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3}$

5（1） 与式 $=(2x)^2+2\cdot2x\cdot3+3^2$

$=\boldsymbol{4x^2+12x+9}$

（2） 与式 $=a^2-2\cdot a\cdot3b+(3b)^2$

$=\boldsymbol{a^2-6ab+9b^2}$

（3） 与式 $=(3x)^2-(5y)^2$

$=\boldsymbol{9x^2-25y^2}$

（4） 与式 $=x^2+(y-5y)x+y\cdot(-5y)$

$=\boldsymbol{x^2-4xy-5y^2}$

（5） 与式 $=2a\cdot3a+2a\cdot4b+b\cdot3a+b\cdot4b$

$=6a^2+8ab+3ab+4b^2$

$=\boldsymbol{6a^2+11ab+4b^2}$

（6） 与式 $=3x\cdot x+3x\cdot2y-y\cdot x-y\cdot2y$

$=3x^2+6xy-xy-2y^2$

$=\boldsymbol{3x^2+5xy-2y^2}$

（7） 与式 $=x^3+3\cdot x^2\cdot(-2y)+3\cdot x\cdot(-2y)^2+(-2y)^3$

$=\boldsymbol{x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3}$

（8） 与式 $=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot3y+3\cdot2x\cdot(3y)^2+(3y)^3$

$=\boldsymbol{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3}$

6（1） 与式 $=x^2+y^2+1^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot1+2\cdot1\cdot x$

$=\boldsymbol{x^2+y^2+1+2xy+2y+2x}$

（2） 与式 $=x^2+(-2y)^2+(-3)^2$

$+2\cdot x\cdot(-2y)+2\cdot(-2y)\cdot(-3)+2\cdot(-3)\cdot x$

$=\boldsymbol{x^2+4y^2+9-4xy+12y-6x}$

（3） 与式 $=(a+3)(a^2-a\cdot3+3^2)$

$=a^3+3^3$

$=\boldsymbol{a^3+27}$

（4） 与式 $=(2a-1)\{(2a)^2+2a\cdot1+1^2\}$

$=(2a)^3-1^3$

$=\boldsymbol{8a^3-1}$

7（1） $(2x+y)=X$ とおくと

与式 $=(X+1)(X+3)$

$=X^2+4X+3$

$=(2x+y)^2+4(2x+y)+3$

$=\boldsymbol{4x^2+4xy+y^2+8x+4y+3}$

（2）$(a^2+1)=A$ とおくと

与式 $=(A+a)(A-a)$

$=A^2-a^2$

$=(a^2+1)^2-a^2$

$=a^4+2a^2+1-a^2$

$=\boldsymbol{a^4+a^2+1}$

8（1）　与式 $=\boldsymbol{x^2(4x-9y)}$

（2）　与式 $=a(b-c)-(b-c)$

$(b-c)=B$ とおくと

$=aB-B$

$=(a-1)B$

$=\boldsymbol{(a-1)(b-c)}$

（3）　与式 $=(2x)^3+3^3$

$=(2x+3)\{(2x)-2x\cdot 3+3^2\}$

$=\boldsymbol{(2x+3)(4x^2-6x+9)}$

（4）　与式 $=(x^2+2xy+y^2)-z^2$

$=(x+y)^2-z^2$

$(x+y)=X$ とおくと

与式 $=X^2-z^2$

$=(X+z)(X-z)$

$=\{(x+y)+z\}\{(x+y)-z\}$

$=\boldsymbol{(x+y+z)(x+y-z)}$

9（1）　与式 $=x^2+(2+3)x+2\cdot 3$

$=\boldsymbol{(x+2)(x+3)}$

（2）　与式 $=x^2+\{2+(-10)\}x+2\cdot(-10)$

$=\boldsymbol{(x+2)(x-10)}$

10（1）

3		-15		4
3	✕	-5	$\longrightarrow$	-5
1		3	$\longrightarrow$	9

与式 $=\boldsymbol{(3x-5)(x+3)}$

（2）

12		$-2y^2$		$5y$
4	✕	$-y$	$\longrightarrow$	$-3y$
3		$2y$	$\longrightarrow$	$8y$

与式 $=\boldsymbol{(4x-y)(3x+2y)}$

11（1）$x^2=X$ とおくと

与式 $=16X^2-1$

$=(4X)^2-1^2$

$=(4X+1)(4X-1)$

$=(4x^2+1)(4x^2-1)$

$=\boldsymbol{(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)}$

（2）$(x-y)=X$ とおくと

与式 $=X^2-3X-10$

$=(X+2)(X-5)$

$=\{(x-y)+2\}\{(x-y)-5\}$

$=\boldsymbol{(x-y+2)(x-y-5)}$

（3）x について整理すると

与式 $=x^2+(2y+3)x+(y^2+3y+2)$

$=x^2+(2y+3)x+(y+1)(y+2)$

1	$(y+1)(y+2)$		$2y+3$
1 ✕	$(y+1)$	$\longrightarrow$	$y+1$
1	$(y+2)$	$\longrightarrow$	$y+2$

与式 $=\{x+(y+1)\}\{x+(y+2)\}$

$=\boldsymbol{(x+y+1)(x+y+2)}$

（4）x について整理すると

与式 $=x^2+(y+2)x-(2y^2+5y+3)$

定数項を因数分解すると

2	3		5
2 ✕	3	$\longrightarrow$	3
1	1	$\longrightarrow$	2

与式 $=x^2+(y+2)x-(2y+3)(y+1)$

1	$-(2y+3)(y+1)$		$y+2$
1 ✕	$(2y+3)$	$\longrightarrow$	$2y+3$
1	$-(y+1)$	$\longrightarrow$	$-y-1$

与式 $=\{x+(2y+3)\}\{x-(y+1)\}$

$=\boldsymbol{(x+2y+3)(x-y-1)}$

12（1）

$$\begin{array}{r|l} 2x-1 & 3x\ +4 \\ \hline & 6x^2+5x-1 \\ & \underline{6x^2-3x\ \ \ } \\ & \ \ \ 8x-1 \\ & \ \ \ \underline{8x-4} \\ & \ \ \ \ \ \ 3 \end{array}$$

よって

商　$\boldsymbol{3x+4}$,　余り　$\boldsymbol{3}$

等式　$\boldsymbol{6x^2+5x-1=(2x-1)(3x+4)+3}$

（2）

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x-2 & x\ \ -3 \\ \hline & x^3\ \ \ \ \ -9x \\ & \underline{x^3+3x^2-2x\ \ } \\ & \ \ \ -3x^2-7x \\ & \ \ \ \underline{-3x^2-9x+6} \\ & \ \ \ \ \ \ 2x-6 \end{array}$$

よって

商　$\boldsymbol{x-3}$,　余り　$\boldsymbol{2x-6}$

等式　$\boldsymbol{x^3-9x=(x^2+3x-2)(x-3)+2x-6}$

（3）
$$\begin{array}{r|l} 2c^2+1 & 3c-2 \\ \hline 6c^3-4c^2+2c+1 & \\ 6c^3\quad\quad+3c & \\ \hline -4c^2-c+1 & \\ -4c^2\quad\quad-2 & \\ \hline -c+3 & \end{array}$$

よって

商　$\boldsymbol{3c-2}$,　余り　$\boldsymbol{-c+3}$

等式

$$\boldsymbol{6c^3-4c^2+2c+1=(2c^2+1)(3c-2)-c+3}$$

（4）
$$\begin{array}{r|l} 2x+3a & x+2a \\ \hline 2x^2+7ax+8a^2 & \\ 2x^2+3ax & \\ \hline 4ax+8a^2 & \\ 4ax+6a^2 & \\ \hline 2a^2 & \end{array}$$

よって

商　$\boldsymbol{x+2a}$,　余り　$\boldsymbol{2a^2}$

等式

$$\boldsymbol{2x^2+7ax+8a^2=(2x+3a)(x+2a)+2a^2}$$

13　ある整式を A とおくと，題意より

$$A=(2x-1)(3x^2+1)-5$$
$$=6x^3+2x-3x^2-1-5$$
$$=\boldsymbol{6x^3-3x^2+2x-6}$$

14（1）

$$\begin{array}{ll} & a\ \ b^2\ \ c \\ & a^2\quad\ c^2\ \ d \\ & a^4\ \ b^3\ \ c^3 \\ \hline \text{最大公約数}= & a\quad\ c \\ \text{最小公倍数}= & a^4\ \ b^3\ \ c^5\ \ d \end{array}$$

よって

最大公約数　$\boldsymbol{ac}$

最小公倍数　$\boldsymbol{a^4b^3c^3d}$

（2）
$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$
$$2x^2-8=2(x+2)(x-2)$$

$$\begin{array}{ll} & (x+2)\ \ (x-1) \\ & 2\ \ (x+2)\quad\quad\ (x-2) \\ \hline \text{最大公約数}= & (x+2) \\ \text{最小公倍数}= & 2\ \ (x+2)\ \ (x-1)\ \ (x-2) \end{array}$$

よって

最大公約数　$\boldsymbol{x+2}$

最小公倍数　$\boldsymbol{2(x+2)(x-1)(x-2)}$

（3）
$$a^4-a^2b^2=a^2(a^2-b^2)=a^2(a+b)(a-b)$$
$$a^4-ab^3=a(a^3-b^3)=a(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\begin{array}{ll} & a^2\,(a+b)(a-b) \\ & a\quad\quad\ (a-b)\,(a^2+ab+b^2) \\ \hline \text{最大公約数}= & a\quad\quad\ (a-b) \\ \text{最小公倍数}= & a^2\,(a+b)(a-b)\,(a^2+ab+b^2) \end{array}$$

よって，

最大公約数　$\boldsymbol{a(a-b)}$

最小公倍数　$\boldsymbol{a^2(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)}$

（4）
$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^2-2x+1=(x-1)^2$$

$$\begin{array}{ll} & (x+1)\ \ (x-1) \\ & \quad\quad\ (x-1)\ \ (x^2+x+1) \\ & (x-1)^2 \\ \hline \text{最大公約数}= & \quad\quad\ (x-1) \\ \text{最小公倍数}= & (x+1)\ (x-1)^2\ (x^2+x+1) \end{array}$$

よって，

最大公約数　$\boldsymbol{x-1}$

最小公倍数　$\boldsymbol{(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)}$

15（1）　与式 $=1^3-1^2-5\cdot1+2$
$$=1-1-5+2=\boldsymbol{-3}$$

（2）　与式 $=(-2)^3-(-2)^2-5\cdot(-2)+2$
$$=-8-4+10+2=\boldsymbol{0}$$

（3）　与式 $=4\cdot(-1)^3+6\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+1$
$$=-4+6+2+1=\boldsymbol{5}$$

（4）　与式 $=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}+1$
$$=4\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{4}-1+1$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\boldsymbol{2}$$

16（1）　$A(2)=2\cdot2^2-5\cdot2+3$
$$=8-10+3=1$$
よって，余りは $\boldsymbol{1}$

（2）　$A(-3)=(-3)^3+2\cdot(-3)^2-3\cdot(-3)-6$
$$=-27+18+9-6=-6$$
よって，余りは $\boldsymbol{-6}$

（3）　$A\left(\frac{2}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}+1$
$$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+1=3$$
よって，余りは $\boldsymbol{3}$

（4）　$A\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5$
$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+5$$
$$=-\frac{1}{8}+4=\frac{31}{8}$$
よって，余りは $\boldsymbol{\frac{31}{8}}$

17　$P(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6$
$$=-1+2+5-6=0$$
$P(-2)=(-2)^3+2\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)-6$
$$=-8+8+10-6=4\neq0$$

$P(-3)=(-3)^3+2\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)-6$

$=-27+18+15-6=0$

よって，$P(x)$ は，$\boldsymbol{x+1}$，$\boldsymbol{x+3}$ で割り切れる．

18　$P(x)=2x^3-5x^2-x+k$ とおく．

$P(x)$ が $x-3$ で割り切れるための条件は，$P(3)=0$ であるから

$P(3)=2\cdot3^3-5\cdot3^2-3+k$

$=54-45-3+k$

$=6+k=0$

よって，$\boldsymbol{k=-6}$

19（1）　$P(x)=x^3-7x-6$ とおく．

$P(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)-6$

$=-1+7-6=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ で割り切れる．

$$
\begin{array}{r|l}
x+1 & x^2-x-6 \\
\hline
 & x^3-7x-6 \\
 & \underline{x^3+x^2} \\
 & -x^2-7x \\
 & \underline{-x^2-x} \\
 & -6x-6 \\
 & \underline{-6x-6} \\
 & 0
\end{array}
$$

〔組立除法を利用〕

	1	0	−7	−6	−1
		−1	1	6	
	1	−1	−6	0	

したがって

$P(x)=(x+1)(x^2-x-6)$

$=\boldsymbol{(x+1)(x+2)(x-3)}$

（2）　$P(x)=2x^3+x^2-8x-4$ とおく．

$P(2)=2\cdot2^3+2^2-8\cdot2-4$

$=16+4-16-4=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ で割り切れる．

$$
\begin{array}{r|l}
x-2 & 2x^2+5x+2 \\
\hline
 & 2x^3+x^2-8x-4 \\
 & \underline{2x^3-4x^2} \\
 & 5x^2-8x \\
 & \underline{5x^2-10x} \\
 & 2x-4 \\
 & \underline{2x-4} \\
 & 0
\end{array}
$$

〔組立除法を利用〕

	2	1	−8	−4	2
		4	10	4	
	2	5	2	0	

したがって

$P(x)=(x-2)(2x^2+5x+2)$

$=\boldsymbol{(x-2)(x+2)(2x+1)}$

2		2		5
1	✕	2	⟶	4
2		1	⟶	1

（3）　$P(x)=10x^3-13x^2-15x+18$ とおく．

$P(1)=10-13-15+18=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる．

$$
\begin{array}{r|l}
x-1 & 10x^2-3x-18 \\
\hline
 & 10x^3-13x^2-15x+18 \\
 & \underline{10x^3-10x^2} \\
 & -3x^2-15x \\
 & \underline{-3x^2+3x} \\
 & -18x+18 \\
 & \underline{-18x+18} \\
 & 0
\end{array}
$$

〔組立除法を利用〕

	10	−13	−15	18	2
		10	−3	−18	
	10	−3	−18	0	

したがって

$P(x)=(x-1)(10x^2-3x-18)$

$=\boldsymbol{(x-1)(5x+6)(2x-3)}$

10		−18		−3
5	✕	6	⟶	12
2		−3	⟶	−15

（4）　$P(x)=x^4-4x^3+10x^2-17x+10$ とおく．

$P(1)=1-4+10-17+10=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる．

$$
\begin{array}{r|l}
x-1 & x^3-3x^2+7x-10 \\
\hline
 & x^4-4x^3+10x^2-17x+10 \\
 & \underline{x^4-x^3} \\
 & -3x^3+10x^2 \\
 & \underline{-3x^3+3x^2} \\
 & 7x^2-17x \\
 & \underline{7x^2-7x} \\
 & -10x+10 \\
 & \underline{-10x+10} \\
 & 0
\end{array}
$$

〔組立除法を利用〕

	1	−4	10	−17	10	1
		1	−3	7	−10	
	1	−3	7	−10	0	

したがって

$P(x)=(x-1)(x^3-3x^2+7x-10)$

$Q(x)=x^3-3x^2+7x-10$ とおく．

$$Q(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 7\cdot 2 - 10$$
$$= 8 - 12 + 14 - 10 = 2$$

よって，$Q(x)$ は $x-2$ で割り切れる．

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x + 5 \\ \hline x-2 & x^3 - 3x^2 + 7x - 10 \\ & x^3 - 2x^2 \\ \hline & -x^2 + 7x \\ & -x^2 + 2x \\ \hline & 5x - 10 \\ & 5x - 10 \\ \hline & 0 \end{array}$$

〔組立除法を利用〕

	1	−3	7	−10	2
		2	−2	10	
	1	−1	5	0	

したがって

$Q(x) = (x-2)(x^2 - x + 5)$

以上より

与式 $= \boldsymbol{(x-1)(x-2)(x^2 - x + 5)}$

CHECK

20（1） 与式 $= (2x^2 + 3x - 1) + 2(-x^2 - 3x + 4)$
$= 2x^2 + 3x - 1 - 2x^2 - 6x + 8$
$= (2-2)x^2 + (3-6)x - 1 + 8$
$= \boldsymbol{-3x + 7}$

（2） 与式 $= 2(2x^2 + 3x - 1) - (-x^2 - 3x + 4)$
$= 4x^2 + 6x - 2 + x^2 + 3x - 4$
$= (4+1)x^2 + (6+3)x - 2 - 4$
$= \boldsymbol{5x^2 + 9x - 6}$

21（1） 与式 $= (-3)^2 a^2 (b^3)^2$
$= \boldsymbol{9a^2 b^6}$

（2） 与式 $= 2x^2 - xy + 6xy - 3y^2$
$= 2x^2 + (-1+6)xy - 3y^2$
$= \boldsymbol{2x^2 + 5xy - 3y^2}$

（3） 与式 $= (2x)^2 - 2\cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2$
$= \boldsymbol{4x^2 - 20xy + 25y^2}$

（4） 与式 $= a^2 - (3b)^2$
$= \boldsymbol{a^2 - 9b^2}$

（5） 与式 $= a^3 - 3\cdot a^2 \cdot 3b + 3\cdot a \cdot (3b)^2 - (3b)^3$
$= \boldsymbol{a^3 - 9a^2 b + 27ab^2 - 27b^3}$

（6） 与式 $= (3x)^2 + (-2y)^2 + 1^2 + 2\cdot 3x\cdot(-2y)$
$+ 2\cdot(-2y)\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 3x$
$= \boldsymbol{9x^2 + 4y^2 + 1 - 12xy - 4y + 6x}$

（7） 与式 $= (x-3)(x^2 + x\cdot 3 + 3^2)$
$= x^3 - 3^3$
$= \boldsymbol{x^3 - 27}$

（8） $(3a+b) = A$ とおくと
与式 $= (A-1)(A+2)$
$= A^2 + A - 2$
$= (3a+b)^2 + (3a+b) - 2$
$= (3a)^2 + 2\cdot 3a\cdot b + b^2 + 3a + b - 2$
$= \boldsymbol{9x^2 + 6ab + b^2 + 3a + b - 2}$

22（1） 与式 $= x^2 + \{(-3) + (-9)\}x + (-3)\cdot(-9)$
$= \boldsymbol{(x-3)(x-9)}$

（2） a について整理すると
与式 $= (b+2)a + (b^2 + b - 2)$
$= (b+2)a + (b+2)(b-1)$
$(b+2) = B$ とおくと
$= Ba + B(b-1)$
$= B\{a + (b-1)\}$
$= \boldsymbol{(b+2)(a+b-1)}$

（3） 与式 $= 3y(x^2 - 4y^2)$
$= 3y\{x^2 - (2y)^2\}$
$= \boldsymbol{3y(x+2y)(x-2y)}$

（4） 与式 $= a^2 - (2b)^3$
$= (a-2b)\{a^2 + a\cdot 2b + (2b)^2\}$
$= \boldsymbol{(a-2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)}$

（5）

3		$-7b^2$		$20b$
3	×	$-b$	⟶	$-b$
1	×	$7b$	⟶	$21b$

与式 $= \boldsymbol{(3a-b)(a+7b)}$

（6）

4		$-3y^2$		$11y$
4	×	$-y$	⟶	$-y$
1	×	$3y$	⟶	$12y$

与式 $= \boldsymbol{(4x-y)(x+3y)}$

23　ある整式を A とすると，題意より
$A = (x^2+2)(3x+1) + (2x+1)$
$= 3x^3 + x^2 + 6x + 2 + 2x + 1$
$= \boldsymbol{3x^3 + x^2 + 8x + 3}$

24（1）　$a^2 b - ab^2 = ab(a-b)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\begin{array}{rl} & ab\ (a-b) \\ & (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ \hline \text{最大公約数} = & (a-b) \\ \text{最小公倍数} = & ab\ (a-b)(a^2+ab+b^2) \end{array}$$

よって

最大公約数　$\boldsymbol{a-b}$

最小公倍数　$\boldsymbol{ab(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

（2）　$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$
$2x^2-5x-3=(x-3)(2x+1)$
$x^2-6x+9=(x-3)^2$

$(x+5)\ (x-3)$
$(x-3)\ (2x+1)$
$(x-3)^2$

最大公約数 $=\quad (x-3)$
最小公倍数 $=\ (x+5)\ (x-3)^2(2x+1)$

よって
最大公約数　$\boldsymbol{x-3}$
最小公倍数　$\boldsymbol{(x+5)(x-3)^2(2x+1)}$

25（1）　$P(x)=x^3+10x^2-ax+6$ とおくと，$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りは $P(-1)$ であるから
$P(-1)=7$
すなわち
$(-1)^3+10\cdot(-1)^2-a\cdot(-1)+6=7$
これを解くと
$-1+10+a+6=7$
$$\boldsymbol{a=-8}$$

（2）　$P(x)=x^3+ax^2-4x+6$ とおくと，$P(x)$ を $x-2$，$x-3$ で割ったときの余りはそれぞれ $P(2)$，$P(3)$ であるから
$P(2)=P(3)$
すなわち
$2^3+a\cdot2^2-4\cdot2+6=3^3+a\cdot3^2-4\cdot3+6$
これを解くと
$8+4a-8+6=27+9a-12+6$
$-5a=15$
$$\boldsymbol{a=-3}$$

26　$P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ とおく．
$P(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6$
$=-1+2+5-6=0$
よって，$P(x)$ は $x+1$ で割り切れる．

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x^2+x-6 \\ \hline & x^3+2x^2-5x-6 \\ & \underline{x^3+x^2} \\ & \quad x^2-5x-6 \\ & \quad \underline{x^2+x} \\ & \quad\quad -6x-6 \\ & \quad\quad \underline{-6x-6} \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

〔組立除法を利用〕

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & -5 & -6 & -1 \\ & & -1 & -1 & 6 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

したがって
$P(x)=(x+1)(x^2+x-6)$
$=\boldsymbol{(x+1)(x+3)(x-2)}$

STEP UP

27（1）　$(b+c)=B$ とおく．
与式 $=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$
$=(a+B)(a-B)$
$=a^2-B^2$
$=a^2-(b+c)^2$
$=a^2-(b^2+2bc+c^2)$
$=\boldsymbol{a^2-b^2-2bc-c^2}$

（2）　$(2a-1)=A$ とおく．
与式 $=\{a^2-(2a-1)\}\{a^2+(2a-1)\}$
$=(a^2-A)(a^2+A)$
$=(a^2)^2-A^2$
$=a^4-(2a-1)^2$
$=a^4-(4a^2-4a+1)$
$=\boldsymbol{a^4-4a^2+4a-1}$

（3）　与式 $=x(x+3)\times(x+2)(x+1)$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$
$(x^2+3x)=X$ とおくと
$=X(X+2)$
$=X^2+2X$
$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)$
$=x^4+6x^3+9x^2+2x^2+6x$
$=\boldsymbol{x^4+6x^3+11x^2+6x}$

（4）　与式 $=(x-1)(x-4)\times(x-2)(x-3)$
$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)$
$(x^2-5x)=X$ とおくと
$=(X+4)(X+6)$
$=X^2+10X+24$
$=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24$
$=x^4-10x^3+25x^2+10x^2-50x+24$
$=\boldsymbol{x^4-10x^3+35x^2-50x+24}$

28（1）　与式 $=x(2x^2-5xy-3y^2)$
$=\boldsymbol{x(2x+y)(x-3y)}$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & -3y^2 & & -5y \\ \hline 2 & \times & y & \longrightarrow & y \\ 1 & \times & -3y & \longrightarrow & -6y \end{array}$$

（2） 与式 $= (a^3+b^3)+(a^2b+ab^2)$

$= (a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(a+b)$

$(a+b)=A$ とおくと

$= A(a^2-ab+b^2)+abA$

$= A\{(a^2-ab+b^2)+ab\}$

$= \boldsymbol{(a+b)(a^2+b^2)}$

（3） c について整理すると

与式 $= (b^2-a^2)c+(a^2b-b^3)$

$= (b^2-a^2)c+b(a^2-b^2)$

$= -(a^2-b^2)c+b(a^2-b^2)$

$(a^2-b^2)=A$ とおくと

$= -Ac+bA$

$= A(b-c)$

$= (a^2-b^2)(b-c)$

$= \boldsymbol{(a+b)(a-b)(b-c)}$

（4） $x^3=X$ とおくと

与式 $= (x^3)^2-9x^3+8$

$= X^2-9X+8$

$= (X-1)(X-8)$

$= (x^3-1)(x^3-8)$

$= (x^3-1^3)(x^3-2^3)$

$= (x-1)\{x^2+x\cdot 1+1^2\}(x-2)\{x^2+x\cdot 2+2^2\}$

$= \boldsymbol{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)(x^2+2x+4)}$

（5） x について整理すると

与式 $= 2x^2+(y-3)x-(y^2-1)$

$= 2x^2+(y-3)x-(y+1)(y-1)$

$= \boldsymbol{(2x-y-1)(x+y-1)}$

2	$-(y+1)(y-1)$		$y-3$
2	$-(y+1)$	$\longrightarrow$	$-y-1$
1	$(y-1)$	$\longrightarrow$	$2y-2$

（6） x について整理すると

与式 $= 3x^2+(y+6)x-(2y^2-y-3)$

$= 3x^2+(y+6)x-(2y-3)(y+1)$

$= \boldsymbol{(3x-2y+3)(x+y+1)}$

3	$-(2y-3)(y+1)$		$y+6$
3	$-(2y-3)$	$\longrightarrow$	$-2y+3$
1	$(y+1)$	$\longrightarrow$	$3y+3$

（7） a について整理すると

与式 $= a^2b-ab^2+bc(b-c)+c^2a-ca^2$

$= (b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$= (b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$

$(b-c)=B$ とおくと

$= Ba^2-B(b+c)a+bcB$

$= B\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$= (b-c)(a-b)(a-c)$

$= \boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

29 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を等式の左辺に代入すると

左辺

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=\{(a+b)^3+c^3\}-\{3ab(a+b)+3abc\}$

$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab\{(a+b)+c\}$

$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$(a+b+c)=A$ とおくと

$=A\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3abA$

$=A\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}$

$=A(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=$右辺

30（1） $P(x)=x^3+6x^2+x+6$ とおく．

$P(-6)=(-6)^3+6\cdot(-6)^2+(-6)+6$

$=-216+216-6+6=0$

よって，$P(x)$ は $x+6$ で割り切れる．

$$
\begin{array}{r}
x^2\quad\quad +1 \\
x+6\,\overline{)\,x^3+6x^2+x+6} \\
\underline{x^3+6x^2} \\
x+6 \\
\underline{x+6} \\
0
\end{array}
$$

〔組立除法を利用〕

1	6	1	6	-6
	-6	0	-6	
1	0	1	0	

したがって

$P(x)=\boldsymbol{(x+6)(x^2+1)}$

（2） $P(x)=x^4-4x^3-5x^2-2x+10$ とおく．

$P(1)=1-4-5-2+10=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる．

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3-3x^2-8x-10 \\
\hline
x-1 & x^4-4x^3-5x^2-2x+10 \\
 & \underline{x^4-x^3} \\
 & -3x^3-5x^2 \\
 & \underline{-3x^3+3x^2} \\
 & -8x^2-2x \\
 & \underline{-8x^2+8x} \\
 & -10x+10 \\
 & \underline{-10x+10} \\
 & 0
\end{array}
$$

〔組立除法を利用〕

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
 & 1 & -4 & -5 & -2 & 10 & 1 \\
 & & 1 & -3 & -8 & -10 & \\
\hline
 & 1 & -3 & -8 & -10 & 0 &
\end{array}
$$

したがって

$$P(x)=(x-1)(x^3-3x^2-8x-10)$$

$Q(x)=x^3-3x^2-8x-10$ とおく.

$$
\begin{aligned}
Q(5)&=5^3-3\cdot5^2-8\cdot5-10\\
&=125-75-40-10=0
\end{aligned}
$$

よって，$Q(x)$ は $x-5$ で割り切れる.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+2 \\
\hline
x-5 & x^3-3x^2-8x-10 \\
 & \underline{x^3-5x^2} \\
 & 2x^2-8x \\
 & \underline{2x^2-10x} \\
 & 2x-10 \\
 & \underline{2x-10} \\
 & 0
\end{array}
$$

〔組立除法を利用〕

$$
\begin{array}{r|cccc|l}
 & 1 & -3 & -8 & -10 & 5 \\
 & & 5 & 10 & 10 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

したがって

$$Q(x)=(x-5)(x^2+2x+2)$$

以上より

$$\text{与式}=\boldsymbol{(x-1)(x-5)(x^2+2x+2)}$$

31（1） 与式 $=4a^4+1+4a^2-4a^2$

$$
\begin{aligned}
&=(4a^4+4a^2+1)-4a^2\\
&=(2a^2+1)^2-(2a)^2\\
&=\{(2a^2+1)+2a\}\{(2a^2+1)-2a\}\\
&=\boldsymbol{(2a^2+2a+1)(2a^2-2a+1)}
\end{aligned}
$$

（2） 与式 $=4x^4+3x^2+1+x^2-x^2$

$$
\begin{aligned}
&=(4x^4+4x^2+1)-x^2\\
&=(2x^2+1)^2-x^2\\
&=\{(2x^2+1)+x\}\{(2x^2+1)-x\}\\
&=\boldsymbol{(2x^2+x+1)(2x^2-x+1)}
\end{aligned}
$$

（3） 与式 $=x^4-11x^2+1+9x^2-9x^2$

$$
\begin{aligned}
&=(x^4-2x^2+1)-9x^2\\
&=(x^2-1)^2-(3x)^2\\
&=\{(x^2-1)+3x\}\{(x^2-1)-3x\}\\
&=\boldsymbol{(x^2+3x-1)(x^2-3x-1)}
\end{aligned}
$$

（4） 与式 $=x^4-6x^2+1+4x^2-4x^2$

$$
\begin{aligned}
&=(x^4-2x^2+1)-4x^2\\
&=(x^2-1)^2-(2x)^2\\
&=\{(x^2-1)+2x\}\{(x^2-1)-2x\}\\
&=\boldsymbol{(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)}
\end{aligned}
$$

32　$P(x)$ を x^2-3x-4 で割ったときの余りは 1 次以下の式だから，

これを $ax+b$ とおき，商を $Q(x)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
P(x)&=(x^2-3x-4)Q(x)+ax+b\\
&=(x+1)(x-4)Q(x)+ax+b
\end{aligned}
$$

題意より，$P(-1)=1$，$P(4)=11$ であるから

$$
\begin{cases}
-a+b=1\\
4a+b=11
\end{cases}
$$

これを解いて，$a=2$，$b=3$

よって，求める余りは，$\boldsymbol{2x+3}$

33　$P(x)$ を $Q(x)$ で割ると，商が x^2+1 で余りが x^3 であるから

$$P(x)=Q(x)(x^2+1)+x^3$$

ここで，$x^3=(x^2+1)x-x$ と変形できるので

$$
\begin{aligned}
P(x)&=Q(x)(x^2+1)+(x^2+1)x-x\\
&=(x^2+1)(Q(x)+x)-x
\end{aligned}
$$

よって，$P(x)$ を x^2+1 で割ったときの余りは，$\boldsymbol{-x}$

34　$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x-2)Q(x)+5\cdots①$$

また，$Q(x)$ を $x+3$ で割ったときの商を $Q'(x)$ とすると

$$Q(x)=(x+3)Q'(x)+3\cdots②$$

②を①に代入すると

$$
\begin{aligned}
P(x)&=(x-2)\{(x+3)Q'(x)+3\}+5\\
&=(x-2)(x+3)Q'(x)+3(x-2)+5\\
&=(x-2)(x+3)Q'(x)+3x-1
\end{aligned}
$$

$P(x)$ を $x+3$ で割ったときの余りは，$P(-3)$ であるから

$$
\begin{aligned}
P(-3)&=(-3-2)\{(-3+3)Q'(-3)+3\cdot(-3)-1\\
&=-9-1=\boldsymbol{-10}
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
P(x)&=(x-2)(x+3)Q'(x)+3x-1\\
&=(x^2+x-6)Q'(x)+3x-1
\end{aligned}
$$

であるから，$P(x)$ を，x^2+x-6 で割ったときの余りは，$\boldsymbol{3x-1}$ である.