2章　方程式と不等式

※ 2 次方程式の解の公式を利用する問題で

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

が使える場合は，こちらの公式を使って解いてあります．

BASIC

66（1）$(2x+1)(x-3)=0$

$2x+1=0$ または，$x-3=0$

よって，$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2},\ 3}$

（2）$x(3x-2)=0$

$x=0$ または，$3x-2=0$

よって，$\boldsymbol{x=0,\ \frac{2}{3}}$

（3）$(4x+1)(2x+1)=0$

$4x+1=0$ または，$2x+1=0$

よって，$\boldsymbol{x=-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2}}$

（4）$(4x-1)(x-2)=0$

$4x-1=0$ または，$x-2=0$

よって，$\boldsymbol{x=\frac{1}{4},\ 2}$

67（1）
$$\begin{aligned}x&=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}\\&=\boldsymbol{\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}}\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}x&=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot3\cdot(-4)}}{2\cdot3}\\&=\boldsymbol{\frac{-5\pm\sqrt{73}}{6}}\end{aligned}$$

（3）
$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot(-3)}}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}}\end{aligned}$$

（4）両辺を 6 倍すると

$$6x^2+3x-2=0$$
$$\begin{aligned}x&=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot6\cdot(-2)}}{2\cdot6}\\&=\boldsymbol{\frac{-3\pm\sqrt{57}}{12}}\end{aligned}$$

68（1）$(x-5)^2=0$

$x-5=0$ より，$\boldsymbol{x=5}$

（2）$(2x-5)^2=0$

$2x-5=0$ より，$\boldsymbol{x=\frac{5}{2}}$

（3）$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=0$

$x+\frac{2}{3}=0$ より，$\boldsymbol{x=-\frac{2}{3}}$

（4）$(3x+1)^2=0$

$3x+1=0$ より，$\boldsymbol{x=-\frac{1}{3}}$

69（1）
$$\begin{aligned}x&=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2}\\&=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{4}\\&=\boldsymbol{\frac{-1\pm\sqrt{23}\,i}{4}}\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}\\&=\frac{5\pm\sqrt{-3}}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{5\pm\sqrt{3}\,i}{2}}\end{aligned}$$

（3）$x^2=-9$
$$\begin{aligned}x&=\pm\sqrt{-9}\\&=\pm\sqrt{9}\,i=\boldsymbol{\pm3\,i}\end{aligned}$$

（4）
$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot5}}{1}\\&=2\pm\sqrt{-1}\\&=\boldsymbol{2\pm i}\end{aligned}$$

70（1）判別式を D とすると
$$\begin{aligned}D&=3^2-4\cdot2\cdot(-4)\\&=9+32=41>0\end{aligned}$$
よって，**異なる 2 つの実数解をもつ**

（2）判別式を D とすると
$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(-1)^2-1\cdot5\\&=1-5=-4<0\end{aligned}$$
よって，**異なる 2 つの虚数解をもつ**

（3）判別式を D とすると
$$\begin{aligned}D&=(-1)^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}\\&=1-1=0\end{aligned}$$
よって，**2 重解をもつ**

（4）判別式を D とすると
$$\begin{aligned}D&=(-7)^2-4\cdot3\cdot2\\&=49-24=25>0\end{aligned}$$
よって，**異なる 2 つの実数解をもつ**

71（1）判別式を D とすると
$$\begin{aligned}D&=(3k)^2-4\cdot1\cdot36\\&=9k^2-144\end{aligned}$$
2 重解をもつためには，$D=0$ となればよいから
$$9k^2-144=0$$
$$k^2=\frac{144}{9}=16$$
$$\boldsymbol{k=\pm4}$$

（2）判別式を D とすると
$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(-k)^2-1\cdot(-k+2)\\&=k^2+k-2\end{aligned}$$
2 重解をもつためには，$D=0$ となればよいから

$k^2+k-2=0$

$(k+2)(k-1)=0$

$\boldsymbol{k=-2,\ 1}$

（3）判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-1\cdot 4k$$
$$=k^2+2k+1-4k$$
$$=k^2-2k+1$$

2 重解をもつためには，$D=0$ となればよいから

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

$\boldsymbol{k=1}$

72（1）　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{4}{3},\quad \alpha\beta=-\frac{2}{3}$$

与式 $=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$$=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{16}{9}+\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{28}{9}}$$

（2）　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-3}{1}=3,\quad \alpha\beta=\frac{5}{1}=5$$

与式 $=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=3^3-3\cdot5\cdot3$$
$$=27-45=\boldsymbol{-18}$$

（3）　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{2},\quad \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

与式 $=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$$=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{-1}$$

73（1）$x^2-5x+5=0$ として，これを解くと

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって

与式 $=\boldsymbol{\left(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$

（2）$3x^2-7x+5=0$ として，これを解くと

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot3\cdot5}}{2\cdot3}$$
$$=\frac{7\pm\sqrt{-11}}{6}$$
$$=\frac{7\pm\sqrt{11}\,i}{6}$$

よって

与式 $=\boldsymbol{3\left(x-\frac{7+\sqrt{11}\,i}{6}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{11}\,i}{6}\right)}$

（3）$2x^2+3x-1=0$ として，これを解くと

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

よって

与式 $=\boldsymbol{2\left(x-\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right)}$

または

$$=\boldsymbol{2\left(x+\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)}$$

（4）$x^2-2x+3=0$ として，これを解くと

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot3}}{1}$$
$$=1\pm\sqrt{-2}=1+\pm\sqrt{2}\,i$$

よって

与式 $=\{x-(1+\sqrt{2}\,i)\}\{x-(1-\sqrt{2}\,i)\}$

$$=\boldsymbol{(x-1-\sqrt{2}\,i)(x-1+\sqrt{2}\,i)}$$

74（1）$x^2=X$ とおくと，

$2X^2-X-1=0$

$(2X+1)(X-1)=0$

$(2x^2+1)(x^2-1)=0$

$(2x^2+1)(x+1)(x-1)=0$

$2x^2+1=0$ より，

$$x^2=-\frac{1}{2}$$
$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$$

したがって，

$$\boldsymbol{x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,i,\ \pm1}$$

（2）　$x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x^2-x+1=0$ より，

$$x=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

したがって，

$$\boldsymbol{x=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$$

（3）$P(x)=x^3-7x+6$ とおくと，

$P(1)=1^3-7\cdot1+6=0$ であるから，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる．

1	0	−7	6	1
	1	1	−6	
1	1	−6	0	

したがって，

$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x+3)(x-2)$

よって，

$(x-1)(x+3)(x-2)=0$

であるから，

$\boldsymbol{x=-3,\ 1,\ 2}$

（4）$P(x)=x^4-4x^2+10x^2-17x+10$ とおくと，

$P(1)=1^4-4+10-17+10=0$ であるから，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる．

1	−4	10	−17	10	1
	1	−3	7	−10	
1	−3	7	−10	0	

$G(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$ とおくと，
　$G(2) = 8 - 12 + 14 - 10 = 0$ であるから，$G(x)$ は $x-2$ で割り切れる．

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & 7 & -10 & \underline{2} \\ & 2 & -2 & 10 & \\ \hline 1 & -1 & 5 & 0 & \end{array}$$

したがって，
　$G(x) = (x-2)(x^2 - x + 5)$
よって，
　$(x-1)(x-2)(x^2-x+5) = 0$
$x^2 - x + 5 = 0$ より，
　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-19}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{19}\,i}{2}$
以上より，
　$\boldsymbol{x = 1,\ 2,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{19}\,i}{2}}$

75　3つの式を，上から，①，②，③とする．

（1）①より，$z = 4 - 2x \cdots$①$'$
　これを，②，③に代入して，
　$\begin{cases} x + 2y + 3(4-2x) = 5 \\ 3x + y + 2(4-2x) = 6 \end{cases}$
　整理すると，
　$\begin{cases} -5x + 2y = -7 \\ -5x + y = -8 \end{cases}$
　これを解いて，
　$x = 1,\ y = -1$
　$x = 1$ を①' に代入して，
　$z = 4 - 2 \cdot 1 = 2$
　よって，$\boldsymbol{(x, y, z) = (1, -1, 2)}$

（2）

$$\begin{array}{lrll} ① & & 3x + 4y - z & = 29 \\ ② \times 2 & +) & 8x - 4y + 6z & = 16 \\ \hline & & 11x + 5z & = 45 \cdots ④ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrll} ① & & 3x + 4y - z & = 29 \\ ③ & +) & 2x - 4y - 4z & = 6 \\ \hline & & 5x - 5z & = 35 \cdots ⑤ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrll} ④ & & 11x + 5y & = 45 \\ ⑤ & +) & 5x - 5y & = 35 \\ \hline & & 16x & = 80 \\ & & x & = 5 \end{array}$$

　$x = 5$ を⑤に代入して，
　$25 - 5z = 35$
　$z = -2$
　$x = 5,\ z = -2$ を③に代入して，
　$10 - 4y + 8 = 6$
　$y = 3$
　よって，$\boldsymbol{(x, y, z) = (5, 3, -2)}$

76　2つの式を，上から，①，②とする．

（1）①より，$y = 2x - 1 \cdots$①$'$
　①$'$ を②に代入して，
　$x^2 + (2x-1)^2 + 2(2x-1) = 4$
　$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 2 = 4$
　$5x^2 = 5$
　$x = \pm 1$
　これを ①$'$ に代入して，
　$y = 2 \times 1 - 1 = 1$
　$y = 2 \times (-1) - 1 = -3$
　よって，$\boldsymbol{(x, y) = (1, 1), (-1, -3)}$

（2）①より，$x = y + 3 \cdots$①$'$
　①$'$ を②に代入して，
　$(y+3)^2 - 3y(y+3) + y^2 = 7$
　$-y^2 - 3y + 2 = 0$
　$y^2 + 3y - 2 = 0$
　$y = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 8}}{2}$
　$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$
　これを ①$'$ に代入して，
　$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} + 3$
　$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} + \dfrac{6}{2}$
　$= \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$
　よって，
　$\boldsymbol{(x, y) = \left(\dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}, \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}\right)}$　（複号同順）

77（1）$3x + 2 = \pm 5$
　$3x + 2 = 5$ のとき，$x = 1$
　$3x + 2 = -5$ のとき，$x = -\dfrac{7}{3}$
　よって，$\boldsymbol{x = 1, -\dfrac{7}{3}}$

（2）$x \geqq 0$ より，$|x| = x$ であるから，
　$2x = x + 2$
　$x = 2$
　これは，$x \geqq 0$ を満たす．
　よって，$\boldsymbol{x = 2}$

（3）$x < 0$ より，$|x| = -x$ であるから，
　$-2x = x + 2$
　$-3x = 2$
　$x = -\dfrac{2}{3}$
　これは，$x < 0$ を満たす．
　よって，$\boldsymbol{x = -\dfrac{2}{3}}$

78（1）両辺に $2(x-1)(x+2)$ をかけると，
　$2(x+2) + 2(x-1) = (x-1)(x+2)$
　$2x + 4 + 2x - 2 = x^2 + x - 2$
　$x^2 - 3x - 4 = 0$
　$(x+1)(x-4) = 0$
　$\boldsymbol{x = -1,\ 4}$　（いずれも無縁解ではない）

（2）両辺に $(x-2)(x-1)$ をかけると，

$x(x-1)-4(x-2)=x+3$
$x^2-x-4x+8=x+3$
$x^2-6x+5=0$
$(x-1)(x-5)=0$
$x=1,\ 5$
$x=1$ はもとの方程式の分母を 0 にするので無縁解である。
よって，$\boldsymbol{x=5}$

79（1）両辺を 2 乗すると，
$x+3=(x-3)^2$
$x+3=x^2-6x+9$
$x^2-7x+6=0$
$(x-1)(x-6)=0$
$x=1,\ 6$
$x=1$ はもとの方程式の右辺を負にするので無縁解である。
よって，$\boldsymbol{x=6}$

（2）両辺を 2 乗すると，
$x^2+16=(3x-4)^2$
$x^2+16=9x^2-24x+16$
$8x^2-24x=0$
$x(x-3)=0$
$x=0,\ 3$
$x=0$ はもとの方程式の右辺を負にするので無縁解である。
よって，$\boldsymbol{x=3}$

80（1）右辺 $=cx^2+x-cx-1$
$=cx^2+(1-c)x-1$
したがって，
$x^2+ax+b=cx^2+(1-c)x-1$
これが恒等式であるためには，
$$\begin{cases}1=c\\a=1-c\\b=-1\end{cases}$$
よって，
$\boldsymbol{a=0,\ b=-1,\ c=1}$

（2）右辺 $=ax^2+a+bx-2b$
$=ax^2+bx+a-2b$
したがって，
$2x^2+3x+c=ax^2+bx+a-2b$
これが恒等式であるためには，
$$\begin{cases}2=a\\3=b\\c=a-2b\end{cases}$$
よって，
$\boldsymbol{a=2,\ b=3,\ c=-4}$

（3）右辺 $=(x^2-2x+1)(x+c)$
$=x^3+cx^2-2x^2-2cx+x+c$
$=x^3+(c-2)x^2+(1-2c)x+c$
したがって，
$x^3+x^2+ax+b=x^3+(c-2)x^2+(1-2c)x+c$
これが恒等式であるためには，
$$\begin{cases}1=c-2\\a=1-2c\\b=c\end{cases}$$
よって，
$\boldsymbol{a=-5,\ b=3,\ c=3}$

81（1）右辺 $=\dfrac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$
$=\dfrac{ax-2a+bx-b}{(x-1)(x-2)}$
$=\dfrac{(a+b)x-2a-b}{(x-1)(x-2)}$
したがって，
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{(a+b)x-2a-b}{(x-1)(x-2)}$$
これが恒等式であるためには，
$$\begin{cases}a+b=0\\-2a-b=1\end{cases}$$
これを解いて，
$\boldsymbol{a=-1,\ b=1}$

（2）右辺 $=\dfrac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$
$=\dfrac{ax^2-ax+a+bx^2+bx+cx+c}{x^3+1}$
$=\dfrac{(a+b)x^2(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}$
したがって，
$$\frac{7x+1}{x^3+1}=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}$$
これが恒等式であるためには，
$$\begin{cases}a+b=0\\-a+b+c=7\\1=a+c\end{cases}$$
これを解いて，
$\boldsymbol{a=-2,\ b=2,\ c=3}$

82（1）左辺 $=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$
右辺 $=b^2c-bc^2+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2$
したがって，左辺 $=$ 右辺

（2）左辺 $=(x^2y^2+2xy+1)+(x^2-2xy+y^2)$
$=x^2y^2+x^2+y^2+1$
右辺 $=x^2y^2+x^2+y^2+1$
したがって，左辺 $=$ 右辺

83 $a+b+c=0$ より，$c=-a-b$
これを，証明すべき等式の両辺に代入すると，
左辺 $=a^2-b(-a-b)$
$=a^2+ab+b^2$
右辺 $=b^2-(-a-b)a$
$=b^2+a^2+ab$
したがって，左辺 $=$ 右辺

84（1）$a:b=c:d$ より，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，
$a=bk,\ c=dk$
これらを，証明すべき等式の両辺に代入すると

左辺 $= \dfrac{2bk+3b}{2bk-3b} = \dfrac{b(2k+3)}{b(2k-3)} = \dfrac{2k+3}{2k-3}$

右辺 $= \dfrac{2dk+3d}{2dk-3d} = \dfrac{d(2k+3)}{d(2k-3)} = \dfrac{2k+3}{2k-3}$

したがって，左辺 = 右辺

（2）$a:b=c:d$ より，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，

$a=bk$，$c=dk$

これらを，証明すべき等式の両辺に代入すると

左辺 $= \dfrac{(bk)^2}{b^2} = \dfrac{b^2k^2}{b^2} = k^2$

右辺 $= \dfrac{(bk)^2-(dk)^2}{b^2-d^2} = \dfrac{k^2(b^2-d^2)}{b^2-d^2} = k^2$

したがって，左辺 = 右辺

CHECK

85（1）

$$x = \frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot3\cdot3}}{2\cdot3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{-7\pm\sqrt{13}}{6}}$$

（2）

$$2x^2-3x+4=0$$
$$x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}$$
$$= \frac{3\pm\sqrt{-23}}{4}$$
$$= \boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{23}\,i}{4}}$$

（3）

$$x = \frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-3\cdot1}}{3}$$
$$= \frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{0}}{3}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

〔別解〕

$$(\sqrt{3}x)^2+2\sqrt{3}x+1^2=0$$
$$(\sqrt{3}x+1)^2=0$$
$$x = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

（4）

$$12x^2-5x-2=0$$
$$(4x+1)(3x-2)=0$$

$4x+1=0$ または，$3x-2=0$

よって，$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{3}}$

（5）両辺を -3 倍すると

$$3x^2+12x-13=0$$
$$x = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-3\cdot(-13)}}{3}$$
$$x = \frac{-6\pm\sqrt{75}}{3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{-6\pm5\sqrt{3}}{3}}$$

（6）両辺を 12 倍すると

$$6x^2-4x+3=0$$
$$x = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-6\cdot3}}{6}$$
$$x = \frac{2\pm\sqrt{-14}}{6}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2\pm\sqrt{14}\,i}{6}}$$

86（1）$P(x)=x^3-4x^2+3$ とおくと，

$P(1)=1^3-4\cdot1^2+3=0$ であるから，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる．

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -4 & 0 & 3 & \ 1 \\ & 1 & -3 & -3 & \\ \hline 1 & -3 & -3 & 0 & \end{array}$$

よって

$$P(x)=(x-1)(x^2-3x-3)$$

$x^2-3x-3=0$ より，

$$x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}$$
$$= \frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$$

したがって

$$\boldsymbol{x=1,\ \frac{3\pm\sqrt{21}}{2}}$$

（2）$x^2=X$ とおくと

$$X^2-5X+4=0$$
$$(X-1)(X-4)=0$$
$$(x^2-1)(x^2-4)=0$$
$$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$$

したがって，

$\boldsymbol{x=\pm1,\ \pm2}$

（3）両辺に $x+1$ をかけると，

$$x(x+1)-4=2(x+1)$$
$$x^2+x-4=2x+2$$
$$x^2-x-6=0$$
$$(x+2)(x-3)=0$$

$\boldsymbol{x=-2,\ 3}$　（いずれも無縁解ではない）

（4）

$2x-5=\sqrt{x+8}\cdots$①

両辺を 2 乗すると

$$(2x-5)^2=x+8$$
$$4x^2-20x+25=x+8$$
$$4x^2-21x+17=0$$
$$(4x-17)(x-1)=0$$
$$x=\frac{17}{4},\ 1$$

$x=1$ は ① の右辺を負にするので無縁解である。

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{17}{4}}$

（5）

$$2x-3=\pm5$$

$2x-3=5$ のとき，$x=4$

$2x-3=-5$ のとき，$x=-1$

よって，$\boldsymbol{x=4,-1}$

87（1）3 つの式を，上から，①，②，③とする．

$$\begin{array}{lrl} ① & 2x+3y-z & =9 \\ ② & +)\quad x+\ \ y+z & =2 \\ \hline & 3x+4y & =11\cdots④ \end{array}$$

$$\begin{array}{rrll} ①\times 4 & & 8x+12y-4z & =36 \\ ③ & +) & 3x-2y+4z & =-5 \\ \hline & & 11x+10y & =31\cdots⑤ \end{array}$$

$$\begin{array}{rrll} ④\times 5 & & 15x+20y & =55 \\ ⑤\times 2 & -) & 22x-20y & =62 \\ \hline & & -7x & =-7 \\ & & x & =1 \end{array}$$

$x=1$ を④に代入して，

$3+4y=11$

$y=2$

$x=1,\ y=2$ を②に代入して，

$1+2+z=2$

$z=-1$

よって，$\boldsymbol{(x,y,z)=(1,\ 2,\ -1)}$

（2）2 つの式を，上から，①，②とする．

②より，$y=2-x\cdots②'$

これを，①に代入して

$x^2+4x(2-x)+2(2-x)^2=7$

$x^2+8x-4x^2+2(4-4x+x^2)=7$

$-3x^2+8x+8-8x+2x^2=7$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

これを，$②'$ に代入して

$x=1$ のとき，$y=1$

$x=-1$ のとき，$y=3$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 1),\ (-1,\ 3)}$

88　判別式を D とすると

$D=(k+2)^2-4\cdot 1\cdot(-k+1)$

$=k^2+4k+4+4k-4$

$=k^2+8k$

2 重解をもつためには，$D=0$ となればよいから

$k^2+8k=0$

$k(k+8)=0$

$\boldsymbol{k=0,\ -8}$

89　解と係数の関係より，$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3},\ \alpha\beta=\dfrac{4}{3}$

（1）　与式 $=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\cdot\dfrac{4}{3}$

$=\dfrac{4}{9}-\dfrac{8}{3}=\boldsymbol{-\dfrac{20}{9}}$

（2）　与式 $=\dfrac{\beta}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

90（1）$3x^2-5x-1=0$ として，これを解くと

$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3}$

$=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{6}$

よって

与式 $=\boldsymbol{3\left(x-\dfrac{5+\sqrt{37}}{6}\right)\left(x-\dfrac{5-\sqrt{37}}{6}\right)}$

（2）$x^2+x+1=0$ として，これを解くと

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

よって

与式 $=\boldsymbol{\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)}$

または

$=\boldsymbol{\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)}$

91（1）右辺 $=a+bx+b+c(x^2+2x+1)$

$=cx^2+(b+2c)x+a+b+c$

したがって，

$3x^2+2x+1=cx^2+(b+2c)x+a+b+c$

これが恒等式であるためには，

$$\begin{cases} 3=c \\ 2=b+2c \\ a+b+c=1 \end{cases}$$

よって，

$\boldsymbol{a=2,\ b=-4,\ c=3}$

〔別解〕

$x+1=X$ とおくと，$x=X-1$

これを左辺に代入すると

左辺 $=3(X-1)^2+2(X-1)+1$

$=3(X^2-2X+1)+2X-2+1$

$=3X^2-6X+3+2X-1$

$=3X^2-4X+2$

したがって，

$2-4X+3X^2=a+bX+cX^2$

これが恒等式であるためには，

$\boldsymbol{a=2,\ b=-4,\ c=3}$

（2）右辺 $=\dfrac{a(x+1)}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^2}=\dfrac{ax+(a+b)}{(x+1)^2}$

したがって，

$\dfrac{3x+2}{x^2+2x+1}=\dfrac{ax+(a+b)}{x^2+2x+1}$

これが恒等式であるためには，

$$\begin{cases} 3=a \\ 2=a+b \end{cases}$$

よって，

$\boldsymbol{a=3,\ b=-1}$

92　$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=k$ とおくと

$a=kx,\ b=ky,\ c=kz$

これらを，証明すべき式の両辺に代入すると

左辺 $=\{(kx)^2+(ky)^2+(kz)^2\}(x^2+y^2+z^2)$

$=(k^2x^2+k^2y^2+k^2z^2)(x^2+y^2+z^2)$

$=k^2(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)$

$=k^2(x^2+y^2+z^2)^2$

$$\text{右辺} = \{(kx)\cdot x + (ky)\cdot y + (kz)\cdot z)^2$$
$$= (kx^2 + ky^2 + kz^2)^2$$
$$= \{k(x^2 + y^2 + z^2)\}^2$$
$$= k^2(x^2 + y^2 + z^2)^2$$

よって，左辺 $=$ 右辺

STEP UP

93（1）$x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 1\cdot 2}}{1}$

$= \mathbf{3 \pm \sqrt{7}}$

（2）$x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1\cdot(-1)}}{1}$

$= \mathbf{2 \pm \sqrt{5}}$

（3）$x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 2\cdot(-3)}}{2}$

$= \mathbf{\dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{2}}$

（4）$x = \dfrac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 5\cdot 39}}{5}$

$= \dfrac{14 \pm \sqrt{196 - 195}}{5}$

$= \dfrac{14 \pm 1}{5}$

$= \dfrac{14+1}{5},\ \ \dfrac{14-1}{5}$

$= \mathbf{3,\ \dfrac{13}{5}}$

94　2 式を上から①，②とする．

（1）　①より，$\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{2} = k$ とおくと

$x = 3k,\ \ y = 5k,\ \ z = 2k \cdots$①$'$

①$'$ を②に代入すると

$2\cdot 3k - 3\cdot 5k + 2k + 7 = 0$

$-7k = -7$ であるから，$k = 1$

これを，①$'$ に代入して

$\boldsymbol{x = 3,\ y = 5,\ z = 2}$

（2）　②を①に代入すると

$x^2 + (x^2 - 4)^2 = 16$

$x^2 + x^4 - 8x^2 + 16 = 16$

$x^4 - 7x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 7) = 0$

よって，$x^2 = 0$　または，$x^2 = 7$

したがって，$x = 0,\ \pm\sqrt{7}$

これを②に代入して

$x = 0$ のとき，$y = -4$

$x = \pm\sqrt{7}$ のとき，$y = (\pm\sqrt{7})^2 - 4 = 7 - 4 = 3$

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = -4} \end{cases},\quad \begin{cases} \boldsymbol{x = \pm\sqrt{7}} \\ \boldsymbol{y = 3} \end{cases}$$

95（1）　左辺に $4x^2$ を加えて，引く．

$$x^4 - 6x^2 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = 0$$
$$x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^2 = 0$$
$$(x^2 - 1)^2 - (2x)^2 = 0$$
$$(x^2 - 1 + 2x)(x^2 - 1 - 2x) = 0$$
$$(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$x^2 + 2x - 1 = 0$ より

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1\cdot(-1)}}{1}$

$= -1 \pm \sqrt{2}$

$x^2 - 2x - 1 = 0$ より

$x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1\cdot(-1)}}{1}$

$= 1 \pm \sqrt{2}$

よって，$\boldsymbol{x = -1 \pm \sqrt{2},\ 1 \pm \sqrt{2}}$

（2）　左辺に x^2 を加えて，引く．

$$x^4 + x^2 + x^2 + 1 - x^2 = 0$$
$$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0$$
$$(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$$
$$(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0$$
$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$x^2 + x + 1 = 0$ より

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1)}}{2\cdot 1}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

$x^2 - x + 1 = 0$ より

$x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{1}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2},\ \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}}$

96（1）$\dfrac{3}{x(x-3)} - \dfrac{x+2}{x(x+1)} - \dfrac{17x+1}{(x+1)(x-3)} = \dfrac{3x}{x+1}$

両辺に，$x(x+1)(x-3)$ をかけると

$3(x+1) - (x+2)(x-3) - x(17x+1)$

$= 3x\cdot x(x-3)$

$3x + 3 - (x^2 - x - 6) - 17x^2 - x = 3x^3 - 9x^2$

$3x^3 + 9x^2 - 3x - 9 = 0$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

$P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ とおくと，$P(1) = 0$ であるから，$P(x)$ は，$x - 1$ で割り切れる．

1	3	−1	−3	1
	1	4	3	
1	4	3	0	

したがって，

$P(x) = (x-1)(x^2 + 4x + 3)$

$= (x-1)(x+3)(x+1)$

よって，$(x-1)(x+3)(x+1) = 0$ より，$x = 1,\ -3,\ -1$ であるが，$x = -1$ はもとの方程式の分母を 0 にするので無

縁解である．

したがって，$\boldsymbol{x=1,\ -3}$

（2）$\sqrt{3x-5}=2x-10$

両辺を 2 乗すると

$3x-5=(2x-10)^2$

$3x-5=4x^2-40x+100$

$4x^2-43x+105=0$

$(x-7)(4x-15)=0$

よって，$x=7,\ \dfrac{15}{4}$

i）$x=7$ のとき

左辺 $=14$，右辺 $=14$

ii）$x=\dfrac{15}{4}$ のとき

左辺 $=\dfrac{25}{2}$，右辺 $=\dfrac{15}{2}$　　不適

よって $\boldsymbol{x=7}$

（3）両辺を 2 乗すると

$(\sqrt{x-1}+2)^2=2x+5$

$(x-1)+4\sqrt{x-1}+4=2x+5$

$4\sqrt{x-1}=x+2$

両辺を 2 乗すると

$16(x-1)=x^2+4x+4$

$x^2-12x+20=0$

$(x-2)(x-10)=0$

$x=2,\ 10$

i）$x=2$ のとき

左辺 $=3$，右辺 $=3$

ii）$x=10$ のとき

左辺 $=5$，右辺 $=5$

よって $\boldsymbol{x=2,\ 10}$

97　静水での船の速さを毎時 x km とすると，上りの船の速さは，毎時 $(x-3)$ km であるから，かかる時間は，$\dfrac{60}{x-3}$（時間）

また，下りの船の速さは，毎時 $(x+3)$ km であるから，かかる時間は，$\dfrac{60}{x+3}$（時間）

よって，$\dfrac{60}{x-3}=\dfrac{60}{x+3}+5\quad (x>0)$

両辺に $(x-3)(x+3)$ をかけてこれを解くと

$60(x+3)=60(x-3)+5(x-3)(x+3)$

$60x+180=60x-180+5x^2-45$

$5x^2=405$

$x^2=81$

$x>0$ であるから，$x=9$

よって，この船の静水での速さは **毎時 9 km**

98　$\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=k$ とおくと

$x=k(b-c),\ y=k(c-a),\ z=k(a-b)$

これらを，証明すべき等式の左辺に代入すると

左辺 $=(b+c)\cdot k(b-c)+(c+a)\cdot k(c-a)+(a+b)\cdot k(a-b)$

$=k(b^2-c^2)+k(c^2-a^2)+k(a^2-b^2)$

$=k\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}$

$=k\cdot 0=0=$ 右辺

99　$x=-1$ を方程式に代入すると

$(-1)^4-4a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+a\cdot(-1)-24=0$

整理すると，$3a+b=23$

$x=2$ を方程式に代入すると

$2^4-4a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+a\cdot 2-24=0$

整理すると，$-30a+4b=8$

よって，$\begin{cases} 3a+b=23 & \cdots① \\ -30a+4b=8 & \cdots② \end{cases}$

$$\begin{array}{lrl} ①\times 4 & 12a+4b & =92 \\ ② & -)\ \ -30a+4b & =8 \\ \hline & 42a & =84 \\ & a & =2 \end{array}$$

①に代入して

$3\cdot 2+b=23$

$b=23-6=17$

したがって，$\boldsymbol{a=2,\ b=17}$

これらをもとの方程式に代入すると

$x^4-8x^3+17x^2+2x-24=0$

この方程式の左辺は，$(x+1)(x-2)$ を因数にもつので，この 2 次式で割ると

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^2 & -7x & +12 & & \\ x^2-x-2\,\big) & x^4 & -8x^3 & +17x^2 & +2x & -24 \\ & x^4 & -x^3 & -2x^2 & & \\ \hline & & -7x^3 & +19x^2 & +2x & \\ & & -7x^3 & +7x^2 & +14x & \\ \hline & & & 12x^2 & -12x & -24 \\ & & & 12x^2 & -12x & -24 \\ \hline & & & & & 0 \end{array}$$

よって

$(x+1)(x-2)(x^2-7x+12)=0$

$(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$

したがって，残りの解は，$\boldsymbol{x=3,\ 4}$

100

（1）　$x^3=1$ を解くと

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x-1=0$ より，$x=1$

$x^2+x+1=0$ より

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

ここで，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると

$\omega^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2$

$=\dfrac{1-2\sqrt{3}\,i+3\,i^2}{4}$

$=\dfrac{1-3-2\sqrt{3}\,i}{4}$

$=\dfrac{-2-2\sqrt{3}\,i}{4}$

$=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

また，$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると

$$\omega^2 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1+2\sqrt{3}\,i+3\,i^2}{4}$$
$$= \frac{1-3+2\sqrt{3}\,i}{4}$$
$$= \frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{4}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

よって，$x^2+x+1=0$ の虚数解の一方を ω とすれば，他方は ω^2 となる．

したがって，$x^3=1$ の解は，1，ω，ω^2 である．

（2）　ω は，$x^2+x+1=0$ の解だから，$\omega^2+\omega+1=0$，すなわち，$1+\omega+\omega^2=0$

101　与えられた方程式に $x=1+i$ を代入して

$(1+i)^3+p(1+i)^2+q(1+i)+6=0$

$(1+3i+3i^2+i^3)+p(1+2i+i^2)+q(1+i)+6=0$

$1+3i+3\cdot(-1)+(-1)\,i+p(1+2i-1)+q(1+i)+6=0$

$1+3\,i-3-i+2pi+q+q\,i+6=0$

$(q+4)+(2p+q+2)\,i=0$

よって

$$\begin{cases} q+4=0 \\ 2p+q+2=0 \end{cases}$$

これを解いて，$p=1$，$q=-4$

したがって，方程式は $x^3+x^2-4x+6=0$ となる．

$P(x)=x^3+x^2-4x+6$ とおくと

$$P(-3)=(-3)^3+(-3)^2-4\cdot(-3)+6$$
$$=-27+9+12+6=0$$

よって，$P(x)$ は $x+3$ で割り切れる．

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -4 & 6 & -3 \\ & -3 & 6 & -6 & \\ \hline 1 & -2 & 2 & 0 & \end{array}$$

したがって，$p(x)=(x+3)(x^2-2x+2)$

$(x+3)(x^2-2x+2)=0$ であるから

$x+3=0$ より，$x=-3$

$x^2-2x+2=0$ より

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-2}}{1}$$
$$=1\pm i$$

以上より，残りの解は，$\boldsymbol{x=1-i,\ -3}$