2章　方程式と不等式

BASIC

102（1）$x-15+5x<2$

$6x<2+15$

$6x<17$

$\boldsymbol{x<\dfrac{17}{6}}$

（2）$2x-5\geqq 6-3x+1$

$2x+3x\geqq 6+1+5$

$5x\geqq 12$

$\boldsymbol{x\geqq\dfrac{12}{5}}$

（3）両辺を 18 倍すると

$2(2x+3)-(x-6)<18$

$4x+6-x+6<18$

$4x-x<18-6-6$

$3x<6$

$\boldsymbol{x<2}$

（4）両辺を 12 倍すると

$4(x+4)-3(2x+3)<12$

$4x+16-6x-9<12$

$4x-6x<12-16+9$

$-2x<5$

$\boldsymbol{x>-\dfrac{5}{2}}$

103　条件に適する団体の人数を x 人とすると

$$\begin{cases} x<40 & \cdots① \\ 500x>500\times 0.8\times 40 & \cdots② \end{cases}$$

②を解くと

$500x>16000$

$x>\dfrac{160}{5}=32$

これと①より，$32<x<40$ であるから

33 人から 39 人

104　2 式を上から，①，②とする．

（1）　①を解くと

$2x-5x>-2-7$

$-3x>-9$

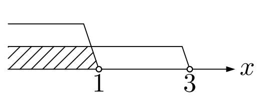
$x<3$

②を解くと

$3x-4x>-1$

$-x>-1$

$x<1$



よって，$\boldsymbol{x<1}$

（2）　①を解くと

$x-1\leqq 2x-2$

$x-2x\leqq -2+1$

$-x\leqq -1$

$x\geqq 1$

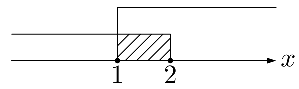
②を解くと

$6-7x\geqq 4x-16$

$-7x-4x\geqq -16-6$

$-11x\geqq -22$

$x\leqq 2$



よって，$\boldsymbol{1\leqq x\leqq 2}$

105（1）$(x+1)(x-7)\leqq 0$

各区間における各因数と左辺の符号を調べると

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	7	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(x-7)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，$\boldsymbol{-1\leqq x\leqq 7}$

（2）$(x+2)(2x-1)<0$

各区間における各因数と左辺の符号を調べると

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(2x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，$\boldsymbol{-2<x<\dfrac{1}{2}}$

（3）両辺を -1 倍すると

$12x^2-5x-3>0$

$(4x-3)(3x+1)>0$

各区間における各因数と左辺の符号を調べると

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$
$3x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(3x+1)(4x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，$\boldsymbol{x<-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{3}{4}<x}$

（4）$p>1$ に注意して，各区間における各因数と左辺の符号を調べると

x	$\cdots$	1	$\cdots$	p	$\cdots$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-p$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-p)$	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，$\boldsymbol{x \leqq 1,\ p \leqq x}$

106（1）$P(x) = x(x+1)(x-2)$ とおく．

各区間における各因数と左辺の符号を調べると

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 0,\ 2 \leqq x}$

（2）$P(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ とおく．

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 2 \cdot 1 - 1 = 0$ であるから，$P(x)$ は，$x-1$ を因数にもつ．

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & 1 & -2 & -1 & \ 1 \\ & 2 & 3 & 1 & \\ \hline 2 & 3 & 1 & 0 & \end{array}$$

よって

$$P(x) = (x-1)(2x^2+3x+1)$$
$$= (x-1)(2x+1)(x+1)$$

各区間における各因数と左辺の符号を調べると

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，$\boldsymbol{x < -1,\ -\frac{1}{2} < x < 1}$

107　左辺 $-$ 右辺 $= (ac+bd) - (ad+bc)$

$$= ac - ad + bd - bc$$
$$= a(c-d) - b(c-d)$$
$$= (a-b)(c-d)$$

ここで

$a > b$ より，$a - b > 0$

$c > d$ より，$c - d > 0$

よって，$(a-b)(c-d) > 0$

したがって，$(ac+bd) - (ad+bc) > 0$ であるから

$ac + bd > ad + bc$

108（1）　$a > 0,\ b > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab} \cdots ①$$

また，$\dfrac{1}{a} > 0,\ \dfrac{1}{b} > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cdots ②$$

①，②の辺々を掛け合わせると

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq 2\sqrt{ab} \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}}$$
$$= 4$$

したがって，$(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$

等号が成り立つのは，$a = b$，かつ $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b}$ のときであるから，$\boldsymbol{a = b}$ のとき．

（2）　$ab > 0,\ cd > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$ab + cd \geqq 2\sqrt{ab \cdot cd} = 2\sqrt{abcd} \cdots ①$$

また，$ac > 0,\ bd > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$ac + bd \geqq 2\sqrt{ac \cdot bd} = 2\sqrt{abcd} \cdots ②$$

①，②の辺々を掛け合わせると

$$(ab+cd)(ac+bd) \geqq 2\sqrt{abcd} \cdot 2\sqrt{abcd}$$
$$= 4(\sqrt{abcd})^2 = 4abcd$$

したがって，$(ab+cd)(ac+bd) \geqq 4abcd$

等号が成り立つのは，$ab = cd$，かつ $ac = bd$ のときである．

$ab = cd$ より，$a = \dfrac{cd}{b}$　$(b \neq 0$ より$)$

これを，$ac = bd$ に代入して

$\dfrac{c^2 d}{b} = bd$

$c^2 d = b^2 d$

$c^2 = b^2$　$(d \neq 0$ より$)$

$c > 0, b > 0$ であるから，$b = c$

これを，$ac = bd$ に代入して

$ab = bd$

$a = d$　$(b \neq 0$ より$)$

したがって，等号が成り立つのは

$\boldsymbol{a = d,\ b = c}$ のとき．

109（1）左辺 $= (x-5)^2$

$(x-5)^2 \geqq 0$ であるから

$x^2 - 10x + 25 \geqq 0$

（2）左辺 $= (x+3)^2 - 9 + 10$

$$= (x+3)^2 + 1$$

$(x+3)^2 \geqq 0$ であるから

$(x+3)^2 + 1 > 0$

よって，$x^2 + 6x + 10 > 0$

110（1）左辺 $= (x^2 + 2xy) + 2y^2$

$$= \{(x+y)^2 - y^2)\} + 2y^2$$
$$= (x+y)^2 - y^2 + 2y^2$$
$$= (x+y)^2 + y^2$$

$(x+y)^2 \geqq 0,\quad y^2 \geqq 0$ であるから

$(x+y)^2 + y^2 \geqq 0$

よって，$x^2 + 2xy + 2y^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは，

$x + y = 0,\quad y = 0$

すなわち，$x = y = 0$ のとき．

（2） $$\begin{aligned}\text{左辺}-\text{右辺}&=2x^2+2y^2+2z^2\\&\quad-(2xy+2yz+2zx)\\&=(x^2-2xy+y^2)\\&\quad+(y^2-2yz+z^2)\\&\quad+(z^2-2zx+x^2)\\&=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\end{aligned}$$

$(x-y)^2 \geqq 0$, $(y-z)^2 \geqq 0$, $(z-x)^2 \geqq 0$ であるから

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqq 0$

よって，$2x^2+2y^2+2z^2 \geqq 2xy+2yz++2zx$

等号が成り立つのは，

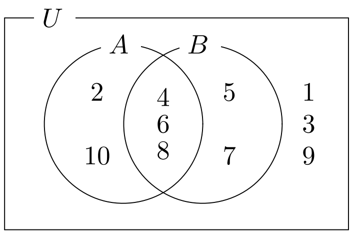
$x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$

すなわち，$x=y=z$ のとき．

111　A, B を，それぞれ要素を書き並べて表すと

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

$B=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$



（1）与式 $=\mathbf{\{4,\ 6,\ 8\}}$

（2）与式 $=\mathbf{\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}}$

（3）（1）の補集合であるから

与式 $=\mathbf{\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10\}}$

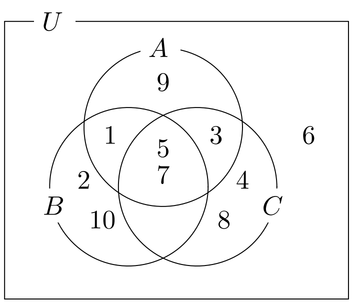
（4）ド・モルガンの法則より

与式 $=\overline{A\cap B}$

$=\mathbf{\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10\}}$

112　A を，要素を書き並べて表すと

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$



（1）$A\cup B=\{1,2,3,5,7,9,10\}$ であるから

$\overline{A\cup B}=\{4,6,8\}$

よって

$\overline{A\cup B}\cap C=\mathbf{\{4,8\}}$

（2）$A\cap B=\{1,5,7\}$ であるから

$\overline{A\cap B}=\{2,3,4,6,8,9,10\}$

また，$\overline{C}=\{1,2,6,9,10\}$

よって

$\overline{A\cap B}\cup\overline{C}=\mathbf{\{1,2,3,4,6,8,9,10\}}$

113（1）　条件 $x^2>9$ の真理集合を P，条件 $x>3$ の真理集合を Q とする．

$x^2-9>0$

$(x+3)(x-3)>0$

よって，$P=\{x\mid x<-3,\ \ 3<x\}$

したがって，$P\supset Q$ であるから，命題は**偽**である．（反例 $x=-4$ など）

（2）　条件 $x^2<9$ の真理集合を P，条件 $x<3$ の真理集合を Q とする．

$x^2-9<0$

$(x+3)(x-3)<0$

よって，$P=\{x\mid -3<x<3\}$

したがって，$P\subset Q$ であるから，命題は**真**である．

114（1）$xy=0$ $\quad\underset{\overset{\bigcirc}{\longleftarrow}}{\overset{\times}{\longrightarrow}}\quad$ $x=y=0$

よって

$xy=0 \iff$ ではなく $xy=0 \ \Longleftarrow\ x=y=0$

したがって，**必要**条件である．

※ $\overset{\times}{\longrightarrow}$ の反例は，$x=1, y=0$ など

（2）$x=3$ $\quad\underset{\overset{\times}{\longleftarrow}}{\overset{\bigcirc}{\longrightarrow}}\quad$ $x^2=9$

よって

$x=3 \ \Longrightarrow\ x^2=9$

したがって，**十分**条件である．

※ $\overset{\times}{\longleftarrow}$ の反例は，$x=-3$

（3）$x^2+y^2=0$ $\quad\underset{\overset{\bigcirc}{\longleftarrow}}{\overset{\bigcirc}{\longrightarrow}}\quad$ $x=y=0$

よって

$x^2+y^2=0 \ \Longleftrightarrow\ x=y=0$

したがって，**必要十分**条件である．

（4）$2x+y=5$ $\quad\underset{\overset{\bigcirc}{\longleftarrow}}{\overset{\times}{\longrightarrow}}\quad$ $x=2, y=1$

$2x+y=5 \ \Longleftarrow\ x=2, y=1$

したがって，**必要**条件である．

※ $\overset{\times}{\longrightarrow}$ の反例は，$x=0, y=5$ など

115　$n>4$ の否定は，$n\leqq 4$ で，全体集合は 10 以下の自然数だから，条件 $\overline{p}$ は，「n は自然数で，$1\leqq n\leqq 4$」となる．

よって，真理集合は，

$\mathbf{\{1,2,3,4\}}$

116（1）$\boldsymbol{x \neq 0}$ **かつ** $\boldsymbol{x \neq 1}$

（2）$1\leqq x\leqq 3$ $\ \rightarrow\ $ $1\leqq x$ かつ $x\leqq 3$ であるから

$\boldsymbol{x<1}$ **または** $\boldsymbol{x>3}$

117（1）逆　$\boldsymbol{x+y>0 \rightarrow x>0}$ **かつ** $\boldsymbol{y>0}$　**偽**

裏　$\boldsymbol{x\leqq 0}$ **または** $\boldsymbol{y\leqq 0 \rightarrow x+y\leqq 0}$　**偽**

対偶　$\boldsymbol{x+y\leqq 0 \rightarrow x\leqq 0}$ **または** $\boldsymbol{y\leqq 0}$　**真**

（2）逆　$\boldsymbol{x>0}$ **かつ** $\boldsymbol{y>0 \rightarrow xy>0}$　**真**

裏　$\boldsymbol{xy\leqq 0 \rightarrow x\leqq 0}$ **または** $\boldsymbol{y\leqq 0}$　**真**

対偶　$\boldsymbol{x \leqq 0}$ **または** $\boldsymbol{y \leqq 0 \to xy \leqq 0}$　**偽**

118 与えられた命題の対偶は，

「$m,\ n$ が整数のとき，m が奇数かつ n が奇数ならば，mn は奇数である．」

であるから，これを証明する．

a, b を整数として，$m = 2a+1, n = 2b+1$ と表せるから，

$$mn = (2a+1)(2b+1)$$
$$= 4ab + 2a + 2b + 1$$
$$= 2(2ab + a + b) + 1$$

よって，mn は奇数である．

したがって，元の命題も真である．

CHECK

119（1）

$$3x - 5x < -9 - 5$$
$$-2x < -14$$
$$\boldsymbol{x > 7}$$

（2）　両辺を 6 倍して

$$2(5x-2) \geqq 3 \cdot 7x - 6$$
$$10x - 4 \geqq 21x - 6$$
$$10x - 21x \geqq -6 + 4$$
$$-11x \geqq -2$$
$$\boldsymbol{x \leqq \frac{2}{11}}$$

120　2 式を上から，①，②とする．

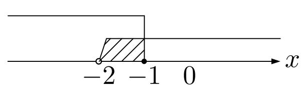
①を解くと

$$6x - 2x > -3 - 5$$
$$4x > -8$$
$$x > -2$$

②を解くと

両辺を 6 倍して

$$3x - 1 \geqq 10x + 6$$
$$3x - 10x \geqq 6 + 1$$
$$-7x \geqq 7$$
$$x \leqq -1$$



よって

$$\boldsymbol{-2 < x \leqq -1}$$

121（1）　$(x+1)(x-4) \leqq 0$

よって

$$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 4}$$

（2）　$(x+1)(x-2) > 0$

よって

$$\boldsymbol{x < -1,\ 2 < x}$$

（3）　$P(x) = (x-1)(x-3)(x+2)$ とし，各区間における因数の符号を調べると

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より，$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 1,\ 3 \leqq x}$

（4）　$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ とし，$P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = x(x^2 - 3x + 2)$$
$$= x(x-1)(x-2)$$

よって，$x(x-1)(x-2) < 0$

各区間における因数の符号を調べると

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より，$\boldsymbol{x < 0,\ 1 < x < 2}$

122（1）　この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = \{-(m+2)\}^2 - 1 \cdot (-m)$$
$$= m^2 + 4m + 4 + m$$
$$= m^2 + 5m + 4$$

異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$D > 0$ であるから

$$m^2 + 5m + 4 > 0$$
$$(m+4)(m+1) > 0$$

よって

$$\boldsymbol{m < -4,\ -1 < m}$$

（2）　与えられた方程式は 2 次方程式であるから

$m \neq 0 \cdots$ ①

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 4m \cdot m$$
$$= 4 - 4m^2$$

異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$D > 0$ であるから

$$4 - 4m^2 > 0$$
$$m^2 - 1 < 0$$
$$(m+1)(m-1) < 0$$
$$-1 < m < 1$$

これと①より

$$\boldsymbol{-1 < m < 0,\ 0 < m < 1}$$

123（1）　左辺 $= (x^2 - 4xy) + 5y^2$

$$= \{(x-2y)^2 - 4y^2\} + 5y^2$$
$$= (x-2y)^2 - 4y^2 + 5y^2$$
$$= (x-2y)^2 + y^2$$

$(x-2y)^2 \geqq 0,\ \ y^2 \geqq 0$ であるから

$$(x-2y)^2 + y^2 \geqq 0$$

よって，$x^2-4xy+5y^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは，

$x-2y=0,\quad y=0$

すなわち，$x=y=0$ のとき．

（2） $左辺-右辺=a^2+b^2-2(a+b-1)$

$$
\begin{aligned}
&=a^2+b^2-2a-2b+2\\
&=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\\
&=(a-1)^2+(b-1)^2
\end{aligned}
$$

$(a-1)^2 \geqq 0,\quad (b-1)^2 \geqq 0$ であるから

$(a-1)^2+(b-1)^2 \geqq 0$

よって，$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$

等号が成り立つのは，

$a-1=0,\quad b-1=0$

すなわち，$a=b=1$ のとき．

124　$x^2<4x+12$ を解くと

$x^2-4x-12<0$

$(x+2)(x-6)<0$

$-2<x<6$

よって

$A=\{x\,|\,-2<x<6\}$

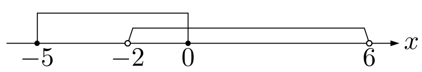
$x^2+5x \leqq 0$ を解くと

$x(x+5) \leqq 0$

$-5 \leqq x \leqq 0$

よって

$B=\{x\,|\,-5 \leqq x \leqq 0\}$

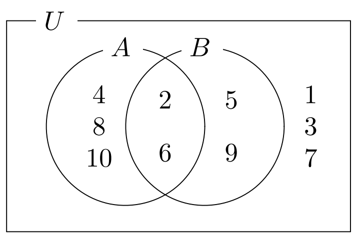


（1）与式 $=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{-2<x \leqq 0}\}$

（2）与式 $=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{-5 \leqq x<6}\}$

125　A を，要素を書き並べて表すと

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$



（1）　$\overline{B}=\{1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 10\}$ であるから

与式 $=\boldsymbol{\{4,\ 8,\ 10\}}$

（2）　$A\cup B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10\}$ であるから

与式 $=\boldsymbol{\{1,\ 3,\ 7\}}$

126（1）$x^2=1$　$\begin{array}{c}\xrightarrow{\times}\\ \xleftarrow{\circ}\end{array}$　$x=1$

よって

$x^2=1 \iff$ ではなく $x^2=1 \Longleftarrow x=1$

したがって，**必要**条件である．

※ $\xrightarrow{\times}$ の反例は，$x=-1$

（2）$x^2=0$　$\begin{array}{c}\xrightarrow{\circ}\\ \xleftarrow{\circ}\end{array}$　$x=0$

よって

$x^2=0 \iff x=0$

したがって，**必要十分**条件である．

（3）$a=b=2$　$\begin{array}{c}\xrightarrow{\circ}\\ \xleftarrow{\times}\end{array}$　$ab=4$

よって

$a=b=2 \Longrightarrow ab=4$

したがって，**十分**条件である．

※ $\xleftarrow{\times}$ の反例は，$a=4, b=1$ など

127 逆　$\boldsymbol{x=1 \to (x-1)(x-2)=0}$　**真**

裏　$\boldsymbol{(x-1)(x-2) \fallingdotseq 0 \to x \fallingdotseq 1}$　**真**

対偶　$\boldsymbol{x \fallingdotseq 1 \to (x-1)(x-2) \fallingdotseq 0}$　**偽**（反例　$x=2$）

STEP UP

128（1）$\begin{cases}2x-5<x+3 & \cdots ①\\ x+3<3x+7 & \cdots ②\end{cases}$

① を解くと

$2x-x<3+5$

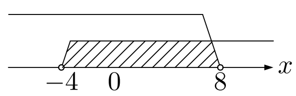
$x<8$

② を解くと

$x-3x<7-3$

$-2x<4$

$x>-4$



よって，$\boldsymbol{-4<x<8}$

（2）　3 つの式を上から ①,②,③ とする．

① を解くと

$3x-x \geqq 4-1$

$2x \geqq 3$

$x \geqq \dfrac{3}{2}$

② を解くと

$6-3x>-1$

$-3x>-1-6$

$-3x>-7$

$x<\dfrac{7}{3}$

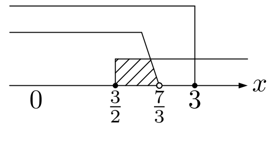
③ を解くと

$x+3 \geqq 6x-12$

$x-6x \geqq -12-3$

$-5x \geqq -15$

$x \leqq 3$



よって，$\boldsymbol{\dfrac{3}{2} \leqq x<\dfrac{7}{3}}$

129（1）

$$
\begin{aligned}
(a^2+1)-(a-a^2) &= a^2+1-a+a^2\\
&= 2a^2-a+1\\
&= 2\left(a^2-\frac{1}{2}a\right)+1\\
&= 2\left\{\left(a-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}+1\\
&= 2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+1\\
&= 2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0
\end{aligned}
$$

よって，$(a^2+1)-(a-a^2)>0$ であるから

$\boldsymbol{a^2+1>a-a^2}$

（2）　左辺を因数分解する．

$$
\begin{array}{ll|ccc}
1 & & -a(a-1)(a^2+1) & & a+1\\
\hline
1 & \times & -a(a-1) & \longrightarrow & -a^2+a\\
1 & & a^2+1 & \longrightarrow & a^2+1
\end{array}
$$

よって，$\{x-a(a-1)\}\{x+(a^2+1)\}<0$

$\{x+(a-a^2)\}\{x+(a^2+1)\}<0$

ここで，$a^2+1>a-a^2$ であるから，$-(a^2+1)<-(a-a^2)$

したがって，$\boldsymbol{-(a^2+1)<x<-(a-a^2)}$

130　左辺を因数分解する．

$$
\begin{array}{ll|ccc}
1 & & -(k+1)(k-2) & & -3\\
\hline
1 & \times & k-2 & \longrightarrow & k-2\\
1 & & -(k+1) & \longrightarrow & -k-1
\end{array}
$$

よって，$\{x+(k-2)\}\{x-(k+1)\}=0$ であるから

$x=-k+2,\ \ k+1$

解がともに 3 より小さくなるので

$$
\begin{cases}
-k+2<3 & \cdots ①\\
k+1<3 & \cdots ②
\end{cases}
$$

① を解くと

$-k<3-2$

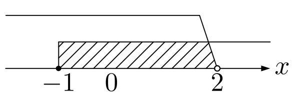
$-k<1$

$k>-1$

② を解くと

$k<3-1$

$k<2$

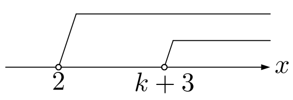


よって，$\boldsymbol{-1<k<2}$

131　与えられた不等式は，1 次不等式なので，$k \fallingdotseq 0$

$k>0$ とすると，$x<k+3$ となり，$k>0$ より，$k+3>3$ であるから，このときの解の集合が，$x>2$ に含まれることはない．

$k<0 \cdots ①$ のとき，不等式の解は，$x>k+3$ となる．



この解の集合が，$x>2$ に含まれるためには，$2 \leqq k+3$ となればよい．よって，これを解いて，$k \geqq -1$

これと ① より，$\boldsymbol{-1 \leqq k<0}$

132　長方形の 2 辺の長さを $a,\ b$，周囲の長さを l，面積を S とすると，$l=2a+2b,\ S=ab \cdots ①$ である．

ここで，$a>0,\ b>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \cdots ②$　　等号が成り立つのは $a=b$ のとき

① より，$a+b=\dfrac{l}{2}$，$ab=S$ であるから，② に代入して

$\dfrac{l}{4} \geqq \sqrt{S} \cdots ③$

（1）　③ より，$l \geqq 4\sqrt{S}$ であるから，S が一定であれば，l が最小となるのは，この不等式の等号が成り立つときであり，このとき，$a=b$ である．

よって，周囲の長さが最小となる四角形は正方形であり，最小値は $4\sqrt{S}$ である．

（2）　③ より，$\left(\dfrac{l}{4}\right)^2 \geqq (\sqrt{S})^2$，すなわち $S \leqq \dfrac{l^2}{16}$ であるから，l が一定であれば，S が最大となるのは，この不等式の等号が成り立つときであり，このとき，$a=b$ である．

よって，面積が最大となる四角形は正方形であり，最大値は $\dfrac{l^2}{16}$ である．

133　2 式を上から ①, ② とする．

（1）　① を解くと

$4x-4>3x-6$

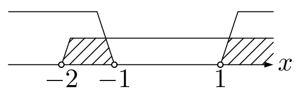
$4x-3x>-6+4$

$x>-2$

② を解くと

$(x+1)(x-1)>0$

$x<-1,\ 1<x$



よって，$\boldsymbol{-2<x<-1,\ \ 1<x}$

（2）　① を解くと

$(x-1)(x-8) \leqq 0$

$1 \leqq x \leqq 8$

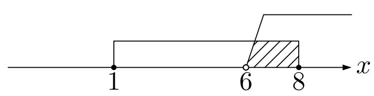
② の両辺を 2 倍して解くと

$x+6<2x$

$x-2x<-6$

$-x<-6$

$x>6$



よって，$\boldsymbol{6<x \leqq 8}$

134（1）　両辺に $(x^2-x-2)^2\ (>0)$ をかけると

$(x-1)(x^2-x-2)>0$

$(x-1)(x+1)(x-2)>0$

各区間における因数の符号を調べると

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より，$\boldsymbol{-1 < x < 1,\ \ 2 < x}$

（2）　両辺に $(x-1)^2(x+1)^2\ (>0)$ をかけると

$2(x-1)(x+1)^2 > (x+1)(x-1)^2$

$2(x-1)(x+1)^2 - (x+1)(x-1)^2 > 0$

$(x-1)(x+1)\{2(x+1)-(x-1)\} > 0$

$(x-1)(x+1)(2x+2-x+1) > 0$

$(x-1)(x+1)(x+3) > 0$

各区間における因数の符号を調べると

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より，$\boldsymbol{-3 < x < -1,\ \ 1 < x}$

135（1）　i）$x \geqq 0 \cdots$ ① のとき，$|x| = x$ であるから

$x < 3$

これと ① より，$0 \leqq x < 3 \cdots$ ②

ii）$x < 0 \cdots$ ③ のとき，$|x| = -x$ であるから

$-x < 3$

$x > -3$

これと ③ より，$-3 < x < 0 \cdots$ ④

②, ④ より，$\boldsymbol{-3 < x < 3}$

（2）　（1）より与えられた不等式を，絶対値記号を用いないで表すと

$-3 < 2x-3 < 3$

これを解くと

$-3+3 < 2x-3+3 < 3+3$

$0 < 2x < 6$

よって，　$\boldsymbol{0 < x < 3}$

136（1）　i）$x-7 \geqq 0$，すなわち $x \geqq 7 \cdots$ ① のとき

$|x-7| = x-7$ であるから

$x-7 > 5x+2$

$x-5x > 2+9$

$-4x > 11$

$x < \dfrac{11}{4}$

これと ① より，解なし．

ii）$x-7 < 0$ すなわち，$x < 7 \cdots$ ② のとき

$|x-7| = -(x-7)$ であるから

$-(x-7) > 5x+2$

$-x+7 > 5x+2$

$-x-5x > 2-7$

$-6x > -5$

$x < \dfrac{5}{6}$

これと ② より，$x < \dfrac{5}{6}$

以上より，$\boldsymbol{x < \dfrac{5}{6}}$

（2）　i）$x-2 \geqq 0$　かつ　$x-3 \geqq 0$，すなわち $x \geqq 3 \cdots$ ① のとき

$|x-2| = x-2$, $|x-3| = x-3$ であるから

$(x-2)+(x-3) > 5$

$2x-5 > 5$

$2x > 10$

$x > 5$

これと ① より，$x > 5 \cdots$ ②

ii）$x-2 \geqq 0$　かつ　$x-3 < 0$，すなわち $2 \leqq x < 3 \cdots$ ③ のとき

$|x-2| = x-2$, $|x-3| = -(x-3)$ であるから

$(x-2)-(x-3) > 5$

$1 > 5$

このとき，解なし．

iii）$x-2 < 0$　かつ　$x-3 < 0$，すなわち $x < 2 \cdots$ ④ のとき

$|x-2| = -(x-2)$, $|x-3| = -(x-3)$ であるから

$-(x-2)-(x-3) > 5$

$-2x+5 > 5$

$-2x > 0$

$x < 0$

これと ④ より，$x < 0 \cdots$ ⑤

②, ⑤ より，$\boldsymbol{x < 0,\ \ 5 < x}$

137（1）　左辺 − 右辺 $= (x^2+1)(y^2+1) - (xy+1)^2$

$= x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 - (x^2y^2 + 2xy + 1)$

$= x^2 - 2xy + y^2$

$= (x-y)^2 \geqq 0$

よって，$(x^2+1)(y^2+1) \geqq (xy+1)^2$

（2）　左辺 − 右辺 $= (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2$

$$\begin{aligned}
&= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 \\
&\quad + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 \\
&\quad + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 \\
&\quad - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 \\
&\quad + 2abxy + 2bcyz + 2cazx) \\
&= (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) \\
&\quad + (b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2) \\
&\quad + (c^2x^2 - 2cazx + a^2z^2) \\
&= (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

よって，$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（3）　i）$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき

$|a|=a$，$|b|=b$ であるから
$-|a||b|=-ab \leqq 0$
$|a||b|=ab \geqq 0$
よって，$-|a||b| \leqq 0 \leqq ab=|a||b|$

ii）$a \geqq 0$，$b<0$ のとき
$|a|=a$，$|b|=-b$ であるから
$-|a||b|=-a\cdot(-b)=ab \leqq 0$
$|a||b|=a\cdot(-b)=-ab \geqq 0$
よって，$-|a||b|=ab \leqq 0 \leqq |a||b|$

iii）$a<0$，$b \geqq 0$ のとき
$|a|=-a$，$|b|=b$ であるから
$-|a||b|=-(-a)\cdot b=ab \leqq 0$
$|a||b|=(-a)\cdot b=-ab \geqq 0$
よって，$-|a||b|=ab \leqq 0 \leqq |a||b|$

iv）$a<0$，$b<0$ のとき
$|a|=-a$，$|b|=-b$ であるから
$-|a||b|=-(-a)\cdot(-b)=-ab \leqq 0$
$|a||b|=(-a)\cdot(-b)=ab \geqq 0$
よって，$-|a||b| \leqq 0 \leqq ab=|a||b|$

以上より，$-|a||b| \leqq ab \leqq |a||b|$

（4） i） $||a|-|b|| \leqq |a+b|$ の証明

$$(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2$$
$$=|a+b|^2-||a|-|b||^2$$
$$=(a+b)^2-(|a|-|b|)^2$$
$$=(a^2+2ab+b^2)-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$$
$$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2|a||b|+b^2)$$
$$=2ab+2|a||b|$$
$$=2(ab+|a||b|)$$

（3）より，$-|a||b| \leqq ab$ であるから
$ab+|a||b| \geqq 0$
よって，$2(ab+|a||b|) \geqq 0$
したがって，$|a+b|^2 \geqq ||a|-|b||^2$
ここで，$|a+b| \geqq 0$，$||a|-|b|| \geqq 0$ であるから
$|a+b| \geqq ||a|-|b||$

ii） $|a+b| \leqq |a|+|b|$ の証明

$$(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2$$
$$=(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$$
$$=(|a|+|b|)^2-(a+b)^2$$
$$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a^2+2ab+b^2)$$
$$=(a^2+2|a||b|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$$
$$=2|a||b|-2ab$$
$$=2(|a||b|-ab)$$

（3）より，$ab \leqq |a||b|$ であるから
$|a||b|-ab \geqq 0$
よって，$2(|a||b|-ab) \geqq 0$
したがって，$(|a|+|b|)^2 \geqq |a+b|^2$
ここで，$|a|+|b| \geqq 0$，$|a+b| \geqq 0$ であるから
$|a|+|b| \geqq |a+b|$

以上より，$||a|-|b|| \leqq |a+b| \leqq |a|+|b|$

PLUS

138　それぞれの式を上から ①，②，$\cdots$ とする．

（1）　① + ② より
$x(x-y)+x(x+y)=12+60$
$x\{(x-y)+(x+y)\}=72$
$x\cdot 2x=72$
$2x^2=72$
$x^2=36$
$x=\pm 6$

i）　$x=6$ を ① に代入して
$6(6-y)=12$
$6-y=2$
$y=4$

ii）　$x=-6$ を ① に代入して
$-6(-6-y)=12$
$-6-y=-2$
$y=-4$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y)=(6,\ 4),\ (-6,\ -4)}$

（2）　① より，$(x+2y)(x-3y)=0$ であるから
$x+2y=0$　または $x-3y=0$

i）　$x+2y=0$ のとき，$x=-2y$ であるから，これを ② に代入して
$(-2y)^2-2y^2=4$
$4y^2-2y^2=4$
$2y^2=4$
$y^2=2$
$y=\pm\sqrt{2}$
このとき，$x=-2y=-2\cdot(\pm\sqrt{2})=\mp 2\sqrt{2}$

ii）　$x-3y=0$ のとき，$x=3y$ であるから，これを ② に代入して
$(3y)^2-2y^2=4$
$9y^2-2y^2=4$
$7y^2=4$
$y^2=\dfrac{4}{7}$
$y=\pm\sqrt{\dfrac{4}{7}}=\pm\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$
このとき，$x=3y=3\cdot\left(\pm\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)=\pm\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$

よって
$\boldsymbol{(x,y)=(\pm 2\sqrt{2},\ \mp\sqrt{2})}$　**（複号同順），**
$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{6\sqrt{7}}{7},\ \pm\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)}$　**（複号同順）**

（3）　② より，$(x+5y)(x-y)=0$ であるから
$x+5y=0$　または $x-y=0$

i）　$x+5y=0$ のとき，$x=-5y$ であるから，これを ① に代入して

$3(-5y)^2-5\cdot(-5y)\cdot y+2y^2=17$

$75y^2+25y^2+2y^2=17$

$102y^2=17$

$y^2=\frac{1}{6}$

$y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

このとき，$x=-5y=-5\cdot(\pm\frac{1}{\sqrt{6}})=\mp\frac{5}{\sqrt{6}}$

ii）　$x-y=0$ のとき，$x=y$ であるから，これを ① に代入して

$3y^2-5y^2+2y^2=17$

$0=17$

このとき，解はない．

よって，$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\pm\frac{5}{\sqrt{6}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}$　**（複号同順）**

（4）　① × 4 より，$8x^2-4xy=48\cdots$ ①′

② × 3 より，$6xy+3y^2=48\cdots$ ②′

①′, ②′ より

$8x^2-4xy=6xy+3y^2$

$8x^2-10xy-3y^2=0$

$(4x+y)(2x-3y)=0$

よって，$4x+y=0$　または $2x-3y=0$

i）　$4x+y=0$ のとき，$y=-4x$ であるから，これを ① に代入して

$2x^2-x\cdot(-4x)=12$

$2x^2+4x^2=12$

$6x^2=12$

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

このとき，$y=-4x=-4\cdot(\pm\sqrt{2})=\mp4\sqrt{2}$

ii）　$2x-3y=0$ のとき，$y=\frac{2}{3}x$ であるから，これを ① に代入して

$2x^2-x\cdot\frac{2}{3}x=12$

$2x^2-\frac{2}{3}x^2=12$

$6x^2-2x^2=36$

$4x^2=36$

$x^2=9$

$x=\pm3$

このとき，$y=\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\cdot(\pm3)=\pm2$

よって

$\boldsymbol{(x,y)=(\pm\sqrt{2},\ \mp4\sqrt{2})}$　**（複号同順），**

$\boldsymbol{(\pm3,\ \pm2)}$　**（複号同順）**

（5）　①, ②, ③ の辺々をかけると

$xy\cdot yz\cdot zx=2\cdot6\cdot3$

$x^2y^2z^2=36$

$(xyz)^2=36$

$xyz=\pm6\cdots$ ④

④ ÷ ① より，$\frac{xyz}{xy}=\frac{\pm6}{2}$ であるから，$z=\pm3$

④ ÷ ② より，$\frac{xyz}{yz}=\frac{\pm6}{6}$ であるから，$x=\pm1$

④ ÷ ③ より，$\frac{xyz}{zx}=\frac{\pm6}{3}$ であるから，$y=\pm2$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(\pm1,\ \pm2,\ \pm3)}$　**（複号同順）**

139　1 列に植える予定の木の本数を m 本とすると

$$\begin{cases} mn=160 & \cdots① \\ (m-3)(n+2)=160+10 & \cdots② \end{cases}$$

② より，$mn+2m-3n-6=170$

これに，① を代入して

$160+2m-3n-6=170$

$2m-3n=16$

これより，$m=\frac{3}{2}n+8$ であるから，これを ① に代入して

$\left(\frac{3}{2}n+8\right)n=160$

$\frac{3}{2}n^2+8n=160$

$3n^2+16n-320=0$

$3n^2+16n-320=0$

$(n-8)(3n+40)=0$

よって，$n=8,\ -\frac{40}{3}$

$n>0$ であるから，$\boldsymbol{n=8}$