3章　関数とグラフ

§1　2次関数 (p.27〜P.29)

BASIC

140 (1)

$$f(-2) = -(-2) + 2$$
$$= 2 + 2$$
$$= \boldsymbol{4}$$

(2)

$$f(a+2) = -(a+2) + 2$$
$$= -a - 2 + 2$$
$$= \boldsymbol{-a}$$

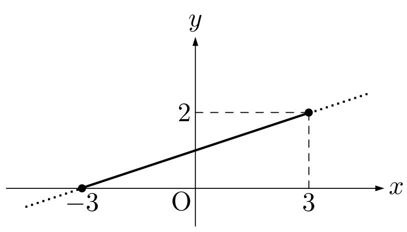
(3)

$$f(a-2) = -(a-2) + 2$$
$$= -a + 2 + 2$$
$$= \boldsymbol{-a+4}$$

141 (1)

$x = -3$ のとき，$y = \dfrac{1}{3} \cdot (-3) + 1 = 0$

$x = 3$ のとき，$y = \dfrac{1}{3} \cdot 3 + 1 = 2$

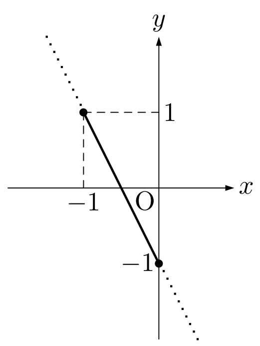


よって，$\boldsymbol{0 \leqq y \leqq 2}$

(2)

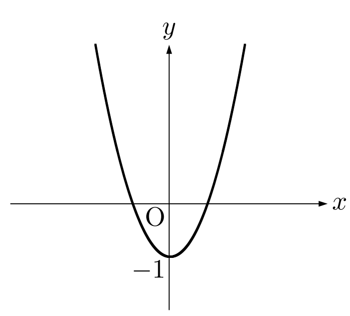
$x = -1$ のとき，$y = -2 \cdot (-1) - 1 = 1$

$x = 0$ のとき，$y = -2 \cdot 0 - 1 = -1$



よって，$\boldsymbol{-1 \leqq y \leqq 1}$

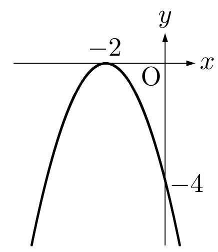
142 (1)　この関数のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを y 軸方向に -1 平行移動したものである．



軸　$\boldsymbol{x = 0}$

頂点　**(0，1)**

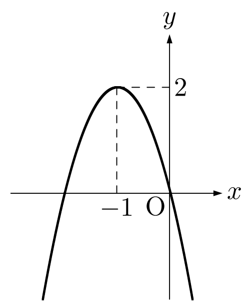
(2)　この関数のグラフは，$y = -x^2$ のグラフを x 軸方向に -2 平行移動したものである．



軸　$\boldsymbol{x = -2}$

頂点　$\boldsymbol{(-2,\ 0)}$

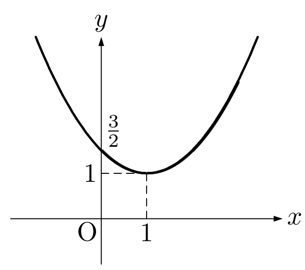
(3)　この関数のグラフは，$y = -2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 平行移動したものである．



軸　$\boldsymbol{x = -1}$

頂点　$\boldsymbol{(-1,\ 2)}$

(4)　この関数のグラフは，$y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 平行移動したものである．



軸　$\boldsymbol{x = 1}$

頂点　**(1，1)**

143　グラフより

軸　$\boldsymbol{x = 1}$

頂点　**(1，2)**

また，放物線の方程式は

$$y = a(x-1)^2 + 2$$

とおくことができる．これが，点 (0，1) を通るので

$$1 = a(0-1)^2 + 2$$
$$1 = a + 2$$
$$a = -1$$

したがって，求める放物線の方程式は

$$\boldsymbol{y = -(x-1)^2 + 2}$$

144 (1)

$$y = -3\{x - (-3)\}^2$$
$$= -3(x+3)^2$$

よって，$\boldsymbol{y = -3(x+3)^2}$

（2）　$y-(-1)=-3(x-1)^2$

$y+1=-3(x-1)^2$

よって，$\boldsymbol{y=-3(x-1)^2-1}$

（3）　$y-1=-3\{x-(-2)\}^2$

$y-1=-3(x+2)^2$

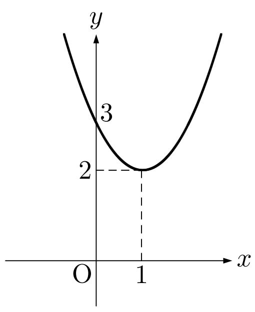
よって，$\boldsymbol{y=-3(x+2)^2+1}$

145（1）　$y=(x-1)^2-1^2+3$

$=(x-1)^2+2$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=(x-1)^2+2}$

この関数のグラフは，$y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 平行移動したものである．



（2）　$y=2\left(x^2+\dfrac{3}{2}x\right)-1$

$=2\left\{\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}-1$

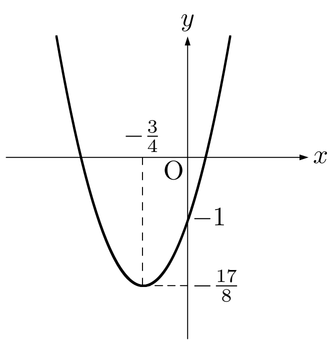
$=2\left\{\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{16}\right\}-1$

$=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}-1$

$=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{17}{8}$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{17}{8}}$

この関数のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{3}{4}$，y 軸方向に $-\dfrac{17}{8}$ 平行移動したものである．



（3）　$y=9\left(x^2-\dfrac{2}{3}x\right)+1$

$=9\left\{\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}+1$

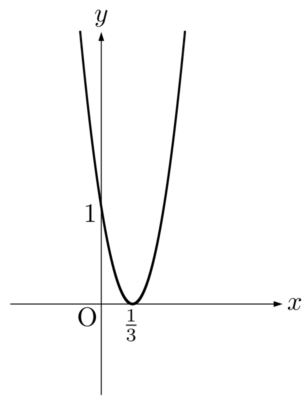
$=9\left\{\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{9}\right\}+1$

$=9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-1+1$

$=9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2}$

この関数のグラフは，$y=9x^2$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ 平行移動したものである．



（4）　$y=-2(x^2-2x)-3$

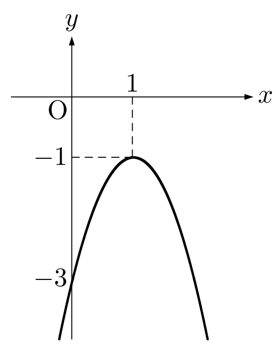
$=-2\{(x-1)^2-1^2\}-3$

$=-2(x-1)^2+2-3$

$=-2(x-1)^2-1$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=-2(x-1)^2-1}$

この関数のグラフは，$y=-2x^2$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に -1 平行移動したものである．



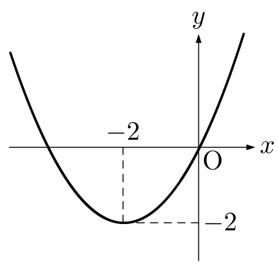
（5）　$y=\dfrac{1}{2}(x^2+4x)$

$=\dfrac{1}{2}\{(x+2)^2-2^2\}$

$=\dfrac{1}{2}(x+2)^2-2$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}(x+2)^2-2}$

この関数のグラフは，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に -2 平行移動したものである．



（6）　$y=-3(x^2+x)-2$

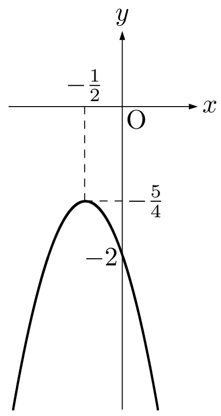
$=-3\left\{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}-2$

$=-3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}-2$

$=-3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=-3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}$

この関数のグラフは，$y=-3x^2$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に $-\dfrac{5}{4}$ 平行移動したものである．



146（1）　頂点の座標が $(2,\ -1)$ であるから，求める放物線の方程式は $y=a(x-2)^2-1$ とおくことができる．この放物線が，原点 $(0,\ 3)$ を通るから

$3=a(0-2)^2-1$

$3=4a-1$

よって，$a=1$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=(x-2)^2-1}$

（2）　軸が $x=-2$ であるから，求める放物線の方程式は $y=a(x+2)^2+q$ とおくことができる．この放物線が，2 点 $(-1,\ 3)$, $(-5,\ 11)$ を通るから

$$\begin{cases} 3=a(-1+2)^2+q \\ 11=a(-5+2)^2+q \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} a+q=3 \\ 9a+q=11 \end{cases}$$

これを解いて，$a=1,\ q=2$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=(x+2)^2+2}$

（3）　頂点が y 軸上にあるので，求める放物線の方程式は $y=ax^2+q$ とおくことができる．この放物線が，2 点 $(-1,\ 2)$, $(2,\ -1)$ を通るから

$$\begin{cases} 2=a\cdot(-1)^2+q \\ -1=a\cdot 2^2+q \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} a+q=2 \\ 4a+q=-1 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-1,\ q=3$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=-x^2+3}$

147（1）　求める放物線の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおく．この放物線が 3 点 $(1,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 9)$ を通るから

$$\begin{cases} 1=a+b+c & \cdots① \\ 3=4a+2b+c & \cdots② \\ 9=9a+3b+c & \cdots③ \end{cases}$$

② − ① より，$3a+b=2$

③ − ② より，$5a+b=6$

よって，$a=2,\ b=-4$

これらを①に代入して，$c=3$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=2x^2-4x+3}$

（2）　求める放物線の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおく．この放物線が 3 点 $(4,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ -4)$ を通るから

$$\begin{cases} 0=16a+4b+c & \cdots① \\ 0=a+b+c & \cdots② \\ -4=c & ③ \end{cases}$$

③を①，②に代入して

$16a+4b=4$

$a+b=4$

よって，$a=-1,\ b=5$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=-x^2+5x-4}$

〔別解〕

二次方程式の解とグラフの関係から，求める放物線の方程式を，$y=a(x-1)(x-4)$ とおくことができる．この放物線が点 $(0,\ -4)$ を通るから

$-4=a(0-1)(0-4)$

$-4=4a$，よって，$a=-1$

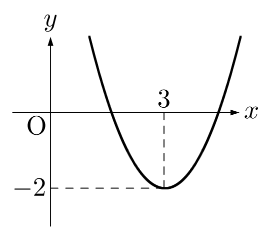
したがって，求める放物線の方程式は

$y=-(x-1)(x-4)$

展開すると，$\boldsymbol{y=-x^2+5x-4}$

148（1）　標準形に変形すると

$$\begin{aligned} y &= (x-3)^2-9+7 \\ &= (x-3)^2-2 \end{aligned}$$



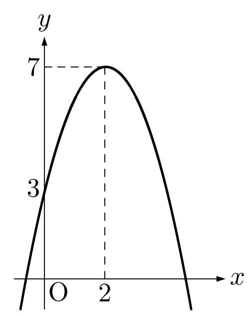
よって

最大値　**なし**

最小値　**-2 ($x=3$ のとき)**

（2）　標準形に変形すると

$$\begin{aligned} y &= -(x^2-4x)+3 \\ &= -\{(x-2)^2-2^2\}+3 \\ &= -(x-2)^2+4+3 \\ &= -(x-2)^2+7 \end{aligned}$$



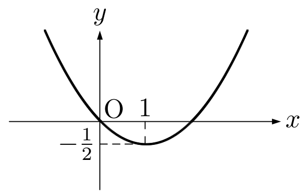
よって

最大値　**7 ($x=2$ のとき)**

最小値　**なし**

（3）　標準形に変形すると

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x)$$
$$= \frac{1}{2}\{(x-1)^2 - 1^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}$$



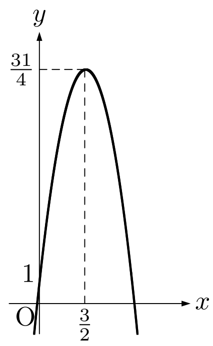
よって

最大値　**なし**

最小値　$\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$　**($\boldsymbol{x=1}$ のとき)**

（4）　標準形に変形すると

$$y = -3(x^2 - 3x) + 1$$
$$= -3\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} + 1$$
$$= -3\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} + 1$$
$$= -3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} + 1$$
$$= -3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}$$



よって

最大値　$\boldsymbol{\frac{31}{4}}$　**($\boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$ のとき)**

最小値　**なし**

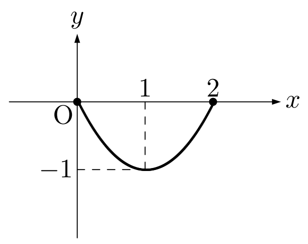
149（1）　標準形に変形すると

$$y = (x-1)^2 - 1^2$$
$$= (x-1)^2 - 1$$

また

$x=0$ のとき，$y=0$

$x=2$ のとき，$y=0$



よって

最大値　**0　($\boldsymbol{x=0,2}$ のとき)**

最小値　**−1　($\boldsymbol{x=1}$ のとき)**

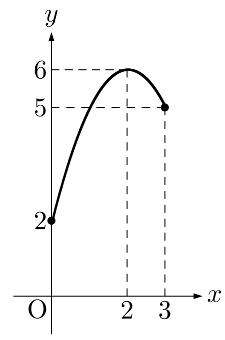
（2）　標準形に変形すると

$$y = -(x^2 - 4x) + 2$$
$$= -\{(x-2)^2 - 2^2\} + 2$$
$$= -(x-2)^2 + 4 + 2$$
$$= -(x-2)^2 + 6$$

また

$x=0$ のとき，$y=2$

$x=3$ のとき，$y=5$



よって

最大値　**6　($\boldsymbol{x=2}$ のとき)**

最小値　**2　($\boldsymbol{x=0}$ のとき)**

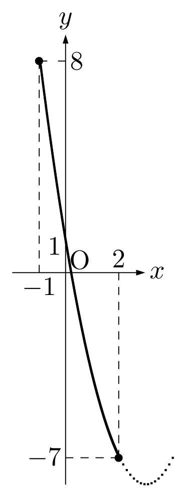
（3）　標準形に変形すると

$$y = (x-3)^2 - 3^2 + 1$$
$$= (x-3)^2 - 8$$

また

$x=-1$ のとき，$y=8$

$x=2$ のとき，$y=-7$



よって

最大値　**8　($\boldsymbol{x=-1}$ のとき)**

最小値　**−7　($\boldsymbol{x=2}$ のとき)**

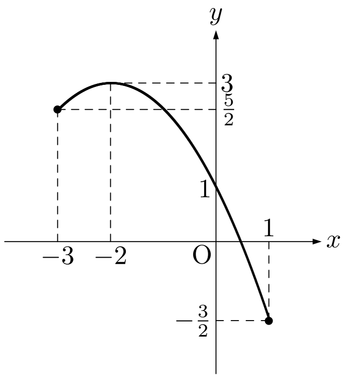
（4）　標準形に変形すると

$$y = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x) + 1$$
$$= -\frac{1}{2}\{(x+2)^2 - 2^2\} + 1$$
$$= -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 + 1$$
$$= -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3$$

また

$x=-3$ のとき，$y=\frac{5}{2}$

$x=1$ のとき，$y=-\frac{3}{2}$



よって

最大値　**3 ($x = -2$ のとき)**

最小値　$\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$ **($x = 1$ のとき)**

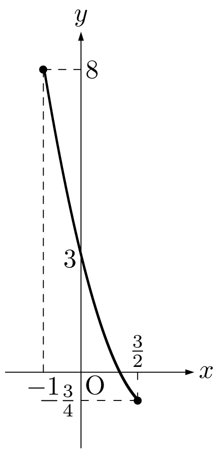
（5）　標準形に変形すると

$$y = x^2 - 4x + 3$$
$$= (x-2)^2 - 2^2 + 3$$
$$= (x-2)^2 - 1$$

また

$x = -1$ のとき，$y = 8$

$x = \frac{3}{2}$ のとき，$y = -\frac{3}{4}$



よって

最大値　**8 ($x = -1$ のとき)**

最小値　$\boldsymbol{-\frac{3}{4}}$ $\left(\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}\text{**のとき**}\right)$

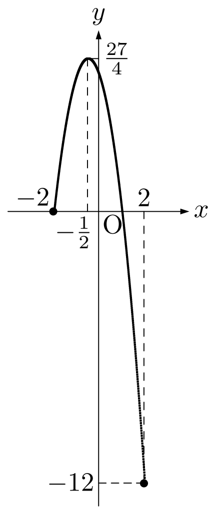
（6）　標準形に変形すると

$$y = 3(-x^2 - x + 2)$$
$$= -3(x^2 + x) + 6$$
$$= -3\left\{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} + 6$$
$$= -3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} + 6$$
$$= -3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}$$

また

$x = -2$ のとき，$y = 0$

$x = 2$ のとき，$y = -12$



よって

最大値　$\boldsymbol{\frac{27}{4}}$ $\left(\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}\text{**のとき**}\right)$

最小値　**−12 ($x = 2$ のとき)**

150　高さは，$6 - x\,(\mathrm{cm})$ であるから，$x > 0$，$6 - x > 0$ より，定義域は，$0 < x < 6$

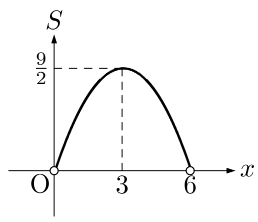
三角形の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}x(6 - x)$$
$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 6x)$$
$$= -\frac{1}{2}\{(x-3)^2 - 3^2\}$$
$$= -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{9}{2}$$

また

$x = 0$ のとき，$y = 0$

$x = 6$ のとき，$y = 0$



よって，$\boldsymbol{x = 3}$ のとき，S は **最大値** $\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ (cm^2) をとる．

151（1）　$x^2 - 3x + 1 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$
$$= 9 - 4 = 5 > 0$$

よって，グラフは x 軸と**2 点で交わる．**

共有点の x 座標は，$x^2 - 3x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\boldsymbol{x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

（2）　$-x^2 - 4x - 5 = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (-1) \cdot (-5)$$
$$= 4 - 5 = -1 < 0$$

よって，グラフと x 軸との**共有点はない．**

（3）　$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2$$
$$= 1 - 1 = 0$$

よって，グラフは x 軸と**接する．**

接点の x 座標は，$\frac{1}{2}x^2-2x+2=0$ を解いて

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$\boldsymbol{x=2}$

152（1）　$-x^2+2x+3k=0$ の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=1^2-(-1)\cdot 3k$

$=1+3k$

放物線のグラフが x 軸と 2 点で交わるのは，$D>0$ のときだから

$1+3k>0$

$3k>-1$

$\boldsymbol{k>-\frac{1}{3}}$

（2）　$3x^2-kx+2=0$ の判別式を D とすると

$D=(-k)^2-4\cdot 3\cdot 2$

$=k^2-24$

放物線のグラフが x 軸に接するのは，$D=0$ のときだから

$k^2-24=0$

$k^2=24$

$\boldsymbol{k=\pm 2\sqrt{6}}$

（3）　与えられた式は 2 次関数の式であるから

$k\neq 0\cdots$①

$kx^2-x+1=0$ の判別式を D とすると

$D=(-1)^2-4\cdot k\cdot 1$

$=1-4k$

放物線のグラフが x 軸と共有点をもたないのは，$D<0$ のときだから

$1-4k<0$

$-4k<-1$

$k>\frac{1}{4}$

これは，①を満たしている．

よって，$\boldsymbol{k>\frac{1}{4}}$

153（1）　両辺に -1 をかけて，$x^2-3x+2\leqq 0$

$x^2-3x+2=0$ の判別式を D とすると

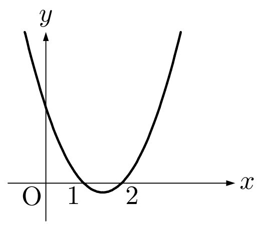
$D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2$

$=9-8=1>0$

$x^2-3x+2=0$ を解くと

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1,\ 2$



$y=x^2-3x+2$ のグラフより，

$x^2-3x+2\leqq 0$ の解は

$\boldsymbol{1\leqq x\leqq 2}$

（2）　$x^2+4x+4=0$ の判別式を D とすると

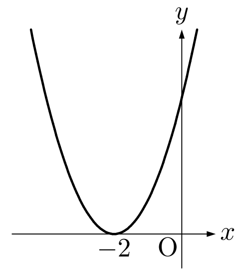
$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot 4$

$=4-4=0$

$x^2+4x+4=0$ を解くと

$(x+2)^2=0$

$x=-2$ (2 重解)



$y=x^2+4x+4$ のグラフより，

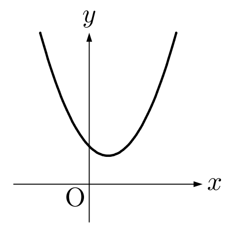
$x^2+4x+4>0$ の解は

$\boldsymbol{x\neq -2}$

（3）　$x^2-x+1=0$ の判別式を D とすると

$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1$

$=1-4=-3<0$



よって，$y=x^2-x+1$ のグラフは，x 軸と共有点をもたず，つねに $y>0$ である．したがって，$x^2-x+1<0$ を満たす x は存在しないから，**解なし**．

（4）　$x^2-5x+3=0$ の判別式を D とすると

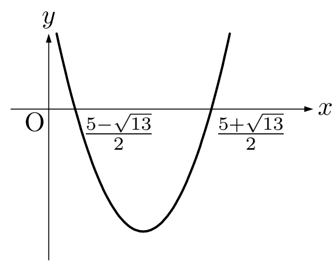
$D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 3$

$=25-12=13>0$

$x^2-5x+3=0$ を解くと

$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{13}}{2\cdot 1}$

$=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$



$y=x^2-5x+3$ のグラフより，

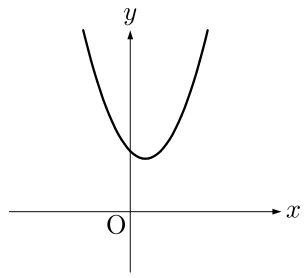
$x^2-5x+3>0$ の解は

$\boldsymbol{x<\frac{5-\sqrt{13}}{2},\quad \frac{5+\sqrt{13}}{2}<x}$

（5）　$2x^2-x+1=0$ の判別式を D とすると

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1$

$=1-8=-7<0$



よって，$y=2x^2-x+1$ のグラフは，x 軸と共有点をもたず，つねに $y>0$ である．したがって，$2x^2-x+1>0$ を満たす x は**すべての実数**である．

CHECK

154 　$y=-(x^2+2x)+1$

$=-\{(x+1)^2-1^2\}+1$

$=-(x+1)^2+1+1$

$=-(x+1)^2+2$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=-(x+1)^2+2}$

軸　　$\boldsymbol{x=-1}$

頂点　$\boldsymbol{(-1,\ 2)}$

155（1）　求める放物線の方程式は

$y-(-5)=(x-3)^2-2(x-3)$

$y+5=x^2-6x+9-2x+6$

$y=x^2-6x+9-2x+6-5$

$=x^2-8x+10$

よって，$\boldsymbol{y=x^2-8x+10}$

また，標準形であれば

$y=(x-4)^2-4^2+10$

$=(x-4)^2-6$

すなわち，$\boldsymbol{y=(x-4)^2-6}$

〔別解〕

与えられた放物線の頂点の座標を求めると

$y=(x-1)^2-1$ より，$(1,\ -1)$

求める放物線の頂点は

$(1+3,\ -1-5)=(4,\ -6)$ であるから，放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=(x-4)^2-6}$

（2）　求める放物線の方程式は

$y-1=\dfrac{1}{2}\{x-(-2)\}^2+\{x-(-2)\}$

$y=\dfrac{1}{2}(x^2+4x+4)+x+2+1$

$=\dfrac{1}{2}x^2+2x+2+x+3$

$=\dfrac{1}{2}x^2+3x+5$

よって，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x^2+3x+5}$

また，標準形であれば

$y=\dfrac{1}{2}(x^2+6x)+5$

$=\dfrac{1}{2}\{(x+3)^2-3^2\}+5$

$=\dfrac{1}{2}(x+3)^2-\dfrac{9}{2}+5$

$=\dfrac{1}{2}(x+3)^2+\dfrac{1}{2}$

すなわち，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}(x+3)^2+\dfrac{1}{2}}$

〔別解〕

与えられた放物線の頂点の座標を求めると

$y=\dfrac{1}{2}(x^2+2x)$

$=\dfrac{1}{2}\{(x+1)^2-1\}$

$=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-\dfrac{1}{2}$

これより，$\left(-1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$

求める放物線の頂点は

$\left(-1-2,\ -\dfrac{1}{2}+1\right)=\left(-3,\ \dfrac{1}{2}\right)$ であるから，放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}(x+3)^2+\dfrac{1}{2}}$

156（1）　放物線の頂点の座標は $(2,\ 0)$ であるから，求める放物線の方程式は，$y=a(x-2)^2$ とおくことができる．この放物線が，点 $(0,\ -4)$ を通るから

$-4=a(0-2)^2$

$-4=4a$

よって，$a=-1$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=-(x-2)^2}$

（2）　x 軸との 2 つの交点と，放物線の対称性から，この放物線の頂点の x 座標は

$\dfrac{-1+3}{2}=1$ である．

よって，求める放物線の方程式は $y=a(x-1)^2-4$ とおくことができる．この放物線が点 $(3,\ 0)$ を通るから

$0=a(3-1)^2-4$

$0=4a-4$

$a=1$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=(x-1)^2-4}$

（3）　求める放物線の方程式を $y=-2x^2+bx+c$ とおくと，この放物線が 2 点 $(0,\ -1)$，$(3,\ -7)$ を通ることから

$$\begin{cases}-1=c & \cdots ① \\ -7=-18+3b+c & \cdots ②\end{cases}$$

① を ② に代入して

$-7=-18+3b-1$

$3b=12$

$b=4$

よって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=-2x^2+4x-1}$

または，標準形に変形して

$y=-2(x^2-2x)-1$

$=-2\{(x-1)^2-1\}-1$

$=-2(x-1)^2+1$

すなわち，$\boldsymbol{y=-2(x-1)^2+1}$

（4）　求める放物線の方程式を，$y=ax^2+bx+c$ とおくと，この放物線が，3 点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(-1,\ -6)$ を通ることから

$$\begin{cases} 0=4a-2b+c & \cdots ① \\ 0=a+b+c & \cdots ② \\ -6=a-b+c & \cdots ③ \end{cases}$$

① − ② より，$3a-3b=0$，すなわち，$a=b$

② − ③ より，$2b=6$，これより，$b=3$

よって，$a=b=3$ であるから，これを ② に代入して

$3+3+c=0$，すなわち，$c=-6$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=3x^2+3x-6}$

〔別解〕

x 軸との 2 つの交点と，放物線の対称性から，この放物線の頂点の x 座標は

$\dfrac{-2+1}{2}=-\dfrac{1}{2}$ である．

よって，求める放物線の方程式は $y=a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+q$ とおくことができる．この放物線が点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ -6)$ を通るから

$$\begin{cases} 0=a\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2+q \\ -6=a\left(-1+\dfrac{1}{2}\right)^2+q \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} \dfrac{9}{4}a+q=0 & \cdots ① \\ \dfrac{1}{4}a+q=-6 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$\dfrac{9}{4}a-\dfrac{1}{4}a=6$

よって，$a=3$

これを ① に代入して，$q=-\dfrac{9}{4}\times 3=-\dfrac{27}{4}$

したがって，求める放物線の方程式は

$\boldsymbol{y=3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{27}{4}}$

または，$\boldsymbol{y=3x^2+3x-6}$

〔別解〕

求める放物線の方程式は，$y=a(x+2)(x-1)$ とおくことができる．これが点 $(-1,\ -6)$ を通るので

$-6=a(-1+2)(-1-1)$

$-6=a\cdot 1\cdot(-2)$

よって，$-2a=-6$ であるから，$a=3$

したがって，求める放物線の方程式は

$y=3(x+2)(x-1)$

展開して整理すると

$y=3(x^2+x-2)$，すなわち，$\boldsymbol{y=3x^2+3x-6}$

157　放物線 $y=-x^2+4x+5$ の頂点の座標を求めると

$$\begin{aligned} y&=-(x^2-4x)+5 \\ &=-(x-2)^2+4+5 \\ &=-(x-2)^2+9 \end{aligned}$$

よって，頂点の座標は $(2,\ 9)$

放物線 $y=-x^2-2x+1$ の頂点の座標を求めると

$$\begin{aligned} y&=-(x^2+2x)+1 \\ &=-(x+1)^2+1+1 \\ &=-(x+1)^2+2 \end{aligned}$$

よって，頂点の座標は $(-1,\ 2)$

したがって，頂点が $(-1,\ 2)\to(2,\ 9)$ と移動しているので

$\boldsymbol{x}$ 軸方向に 3，$\boldsymbol{y}$ 軸方向に 7

〔別解〕

$y=-x^2-2x+1$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動した放物線の式は

$y-q=-(x-p)^2-2(x-p)+1$

$y=-x^2+2px-p^2-2x+2p+1+q$

$y=-x^2+(2p-2)x-p^2+2p+q+1$

これが，放物線 $y=-x^2+4x+5$ となるので

$$\begin{cases} 2p-2=4 & \cdots ① \\ -p^2+2p+q+1=5 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$p=3$

これを ② に代入して

$-3^2+2\cdot 3+q+1=5$

$-9+6+q+1=5$

$q=7$

よって，**$\boldsymbol{x}$ 軸方向に 3，$\boldsymbol{y}$ 軸方向に 7**

158　放物線 $y=x^2+bx+c$ の頂点の座標を求めると

$y=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{4}+c$

よって，頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2},\ -\dfrac{b^2}{4}+c\right)$

この点を，x 軸方向に 3，y 軸方向に 2 平行移動した点は，$\left(-\dfrac{b}{2}+3,\ -\dfrac{b^2}{4}+c+2\right)$ であり，この点が $(4,\ 3)$ であるから

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2}+3=4 & \cdots ① \\ -\dfrac{b^2}{4}+c+2=3 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$-\dfrac{b}{2}=1$ であるから，$b=-2$

これを ② に代入して

$-\dfrac{(-2)^2}{4}+c+2=3$

これより，$c=2$

以上より，$\boldsymbol{b=-2,\ c=2}$

〔別解〕

点 $(4,\ 3)$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に -2 平行移動した点は

$(4-3,\ 3-2)=(1,\ 1)$

であり，これが $y=x^2+bx+c$ の頂点となる．

点 $(1,\ 1)$ を頂点とする放物線の式は

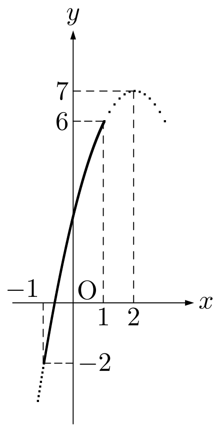
$$\begin{aligned} y&=(x-1)^2+1 \\ &=x^2-2x+1+1 \\ &=x^2-2x+2 \end{aligned}$$

これが，$y=x^2+bx+c$ となるので，$\boldsymbol{b=-2,\ c=2}$

159　
$$\begin{aligned} y&=-(x^2-4x)+3 \\ &=-\{(x-2)^2-4\}+3 \\ &=-(x-2)^2+7 \end{aligned}$$

（1）　$x=-1$ のとき，$y=-(-1-2)^2+7=-2$

$x=1$ のとき，$y=-(1-2)^2+7=6$

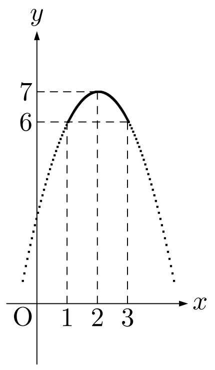


よって

最大値　6　$(x=1)$

最小値　−2　$(x=-1)$

（2）　$x=3$ のとき，$y=-(3-2)^2+7=6$

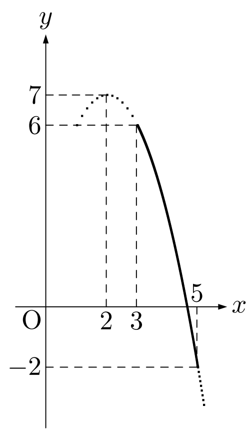


よって

最大値　7　$(x=2)$

最小値　6　$(x=1,\ 3)$

（3）　$x=5$ のとき，$y=-(5-2)^2+7=-2$



よって

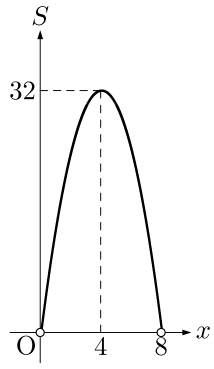
最大値　6　$(x=3)$

最小値　−2　$(x=5)$

160　断面積を S とすると

$$S=x(16-2x)$$
$$=-2x^2+16x$$
$$=-2(x^2-8x)$$
$$=-2\{(x-4)^2-16\}$$
$$=-2(x-4)^2+32$$

ここで，$x>0$，$16-2x>0$ より，$0<x<8$



よって，$x=4$ のとき，S は最大値 32 をとる．

したがって，折り曲げる部分の幅は **4 cm**

161　2 次方程式 $x^2-x-k=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-k)$$
$$=4k+1$$

（1）　与えられた 2 次関数のグラフが x 軸と 2 点で交わるのは，$D>0$ のときであるから

$4k+1>0$

$4k>-1$

$\boldsymbol{k>-\dfrac{1}{4}}$

（2）　与えられた 2 次関数のグラフが x 軸と接するのは，$D=0$ のときであるから

$4k+1=0$

$4k=-1$

$\boldsymbol{k=-\dfrac{1}{4}}$

（3）　与えられた 2 次関数のグラフが x 軸と共有点を持たないのは，$D<0$ のときであるから

$4k+1<0$

$4k<-1$

$\boldsymbol{k<-\dfrac{1}{4}}$

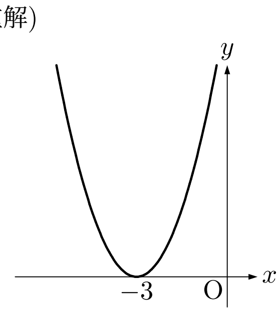
162（1）　$x^2+6x+9=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=3^2-1\cdot 9$$
$$=9-9=0$$

$x^2+6x+9=0$ を解くと

$(x+3)^2=0$

$x=-3$ (2 重解)



$y=x^2+6x+9$ のグラフより，$x^2+6x+9\geqq 0$ の解は

すべての実数

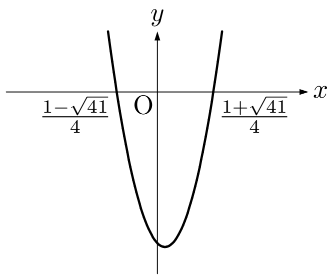
（2）　$2x^2-x-5=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-5)$$
$$=1+40=41>0$$

$2x^2-x-5=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{41}}{2\cdot 2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{41}}{4}$$



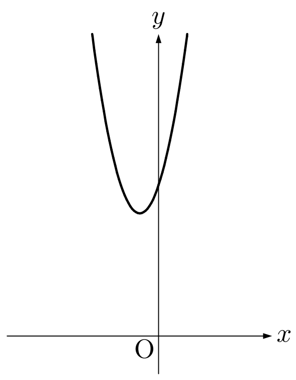
$y=2x^2-x-5$ のグラフより，$2x^2-x-5\leqq 0$ の解は

$$\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{41}}{4}\leqq x\leqq\frac{1+\sqrt{41}}{4}}$$

（3）　$3x^2+3x+4=0$ の判別式を D とすると

$$D=3^2-4\cdot 3\cdot 4$$

$$=9-48=-39<0$$



よって，$y=3x^2+3x+4$ のグラフは，x 軸と共有点をもたず，つねに $y>0$ である．したがって，$3x^2+3x+4<0$ を満たす x は存在しないから，**解なし**．

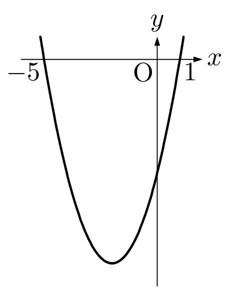
STEP UP

163（1）　$y=0$ として，放物線と x 軸との交点を求めると

$$x^2+4x-5=0$$

$$(x+5)(x-1)=0$$

$$x=-5,\ 1$$



よって，このグラフを，x 軸方向に 5，または -1 平行移動すればグラフは原点を通る．

また，この放物線の頂点の座標は

$$y=x^2+4x-5$$

$$=(x+2)^2-4-5$$

$$=(x+2)^2-9$$

より，$(-2,\ -9)$ である．

i）5 平行移動したとき

頂点を x 軸方向に 5 平行移動すると

$(-2+5,\ -9)=(3,\ -9)$ に移るので，求める方程式は

$$\boldsymbol{y=(x-3)^2-9}$$

または，右辺を展開，整理して，$\boldsymbol{y=x^2-6x}$

ii）-1 平行移動したとき

頂点を x 軸方向に 5 平行移動すると

$(-2-1,\ -9)=(-3,\ -9)$ に移るので，求める方程式は

$$\boldsymbol{y=(x+3)^2-9}$$

または，右辺を展開，整理して，$\boldsymbol{y=x^2+6x}$

〔別解〕　（途中までは上と同じ）

i）5 平行移動したとき

$y=x^2+4x-5$ を x 軸方向に 5 平行移動したグラフの式は

$$y=(x-5)^2+4(x-5)-5$$

$$=x^2-10x+25+4x-20-5$$

$$=x^2-6x$$

すなわち，$\boldsymbol{y=x^2-6x}$

ii）-1 平行移動したとき

$y=x^2+4x-5$ を x 軸方向に -1 平行移動したグラフの式は

$$y=(x+1)^2+4(x+1)-5$$

$$=x^2+2x+1+4x+4-5$$

$$=x^2+6x$$

すなわち，$\boldsymbol{y=x^2+6x}$

〔別解〕

$y=x^2+4x-5$ を x 軸の方向に p だけ平行移動したグラフの式は，$y=(x-p)^2+4(x-p)-5$ である．

これが原点 $(0,\ 0)$ を通ることから

$$0=(0-p)^2+4(0-p)-5$$

これを解くと

$$0=p^2-4p-5$$

$$(p+1)(p-5)=0$$

よって，$p=-1,\ 5$

i）$p=-1$ のとき

$$y=(x+1)^2+4(x+1)-5$$

$$=x^2+2x+1+4x+4-5$$

$$=x^2+6x$$

すなわち，$\boldsymbol{y=x^2+6x}$

ii）$p=5$ のとき

$$y=(x-5)^2+4(x-5)-5$$

$$=x^2-10x+25+4x-20-5$$

$$=x^2-6x$$

すなわち，$\boldsymbol{y=x^2-6x}$

（2）　頂点 $(-2,\ -9)$ を y 軸に関して対称移動すると，$(2,\ -9)$ となる．

求める放物線はもとの放物線と合同であるから

$$\boldsymbol{y=(x-2)^2-9}$$

または，右辺を展開，整理して，$\boldsymbol{y=x^2-4x-5}$

〔別解〕

$y=x^2+4x-5$ を，y 軸に関して対称移動させた関数の方程式は，x を $-x$ に置き換えて

$$y=(-x)^2+4\cdot(-x)-5$$

すなわち，$\boldsymbol{y=x^2-4x-5}$

（3）　頂点 $(-2,\ -9)$ を原点に関して対称移動すると，$(2,\ 9)$ となる．

求める放物線は $y--x^2$ と合同であるから

$$\boldsymbol{y=-(x-2)^2+9}$$

または，右辺を展開，整理して，$\boldsymbol{y=-x^2+4x+5}$

〔別解〕

$y=x^2+4x-5$ を，y 軸に関して対称移動させた関数の方程式は，x を $-x$ に，y を $-y$ に置き換えて

$$-y=(-x)^2+4\cdot(-x)-5$$

すなわち，$\boldsymbol{y=-x^2+4x+5}$

164　求める放物線の方程式は，$y=a(x-p)^2$ とおくことができる．この放物線が 2 点 $(-2,\ 1)$，$(2,\ 9)$ を通ることから

$$\begin{cases} 1=a(-2-p)^2 & \cdots① \\ 9=a(2-p)^2 & \cdots② \end{cases}$$

① より，$a=\dfrac{1}{(-2-p)^2}$

② に代入して

$$9=\frac{(2-p)^2}{(-2-p)^2}$$

これより，$\left(\dfrac{2-p}{-2-p}\right)^2=9$ であるから，$\dfrac{2-p}{-2-p}=\pm3$

i）　$\dfrac{2-p}{-2-p}=3$ のとき

$$2-p=3(-2-p)$$
$$2-p=-6-3p$$
$$2p=-8$$
$$p=-4$$

このとき，$a=\dfrac{1}{-2+4}=\dfrac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}(x+4)^2}$

ii）　$\dfrac{2-p}{-2-p}=-3$ のとき

$$2-p=-3(-2-p)$$
$$2-p=6+3p$$
$$-4p=4$$
$$p=-1$$

このとき，$a=\dfrac{1}{-2+1}=-1$

よって，$\boldsymbol{y=-(x+1)^2}$

165　y が最大値をとるので，$a<0$ である．

題意より，この関数は $y=a\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+3$ とおくことができる．

右辺を展開，整理すると

$$y=a\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)+3$$
$$=ax^2+3ax+\frac{9}{4}a+3$$

これを，$y=ax^2-12x+b$ と比較して

$$\begin{cases} 3a=-12 & \cdots① \\ \dfrac{9}{4}a+3=b & \cdots② \end{cases}$$

① より，$a=-4$

これを ② に代入して

$$b=\frac{9}{4}\cdot(-4)+3$$
$$=-9+3=-6$$

よって，$\boldsymbol{a=-4,\ b=-6}$

166（1）　$y=(x+m)^2-m^2-m$ より

$$\boldsymbol{z=-m^2-m}$$

（2）　$z=-(m^2+m)$

$$=-\left\{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}$$
$$=-\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

よって，z は $\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2}}$ のとき最大となり，最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$．

167（1）　$x^2-2(m-1)x-m=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-(m-1)\}^2-1\cdot(-m)$$
$$=(m^2-2m+1)+m$$
$$=m^2-m+1$$
$$=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1$$
$$=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

よって，放物線は x 軸と異なる 2 点で交わる．

（2）　x 軸との交点の x 座標は，$x^2-2(m-1)x-m=0$ の解であるから

$$x=\frac{-\{-(m-1)\}\pm\sqrt{m^2-m+1}}{1}$$
$$=(m-1)\pm\sqrt{m^2-m+1}$$

よって，2 点間の距離は

$$(m-1)+\sqrt{m^2-m+1}-\{(m-1)-\sqrt{m^2-m+1}\}$$
$$=2\sqrt{m^2-m+1} \text{ である．}$$

これが最小となるのは，m^2-m+1 が最小となるときなので，（1）より

$$m^2-m+1=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

であるから，$\boldsymbol{m=\dfrac{1}{2}}$ のとき，2 点間の距離は最小となる．

168　$x^2+2mx+1=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot1=m^2-1$$

与えられた 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつので，$D>0$

すなわち，$m^2-1>0$

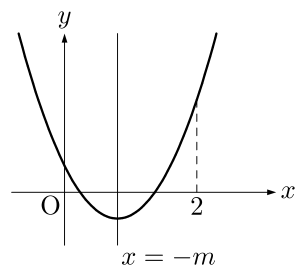
これを解いて

$$(m+1)(m-1)>0$$

よって，$m<-1,\ 1<m\quad\cdots①$

$f(x)=x^2+2mx+1$ とおくと，方程式の 2 つの解が $0<x<2$

であるためには $y = f(x)$ のグラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標が $0 < x < 2$ となればよい．



$f(x) = (x+m)^2 - m^2 + 1$ より，軸の方程式は，$x = -m$ であるから，グラフが $0 < x < 2$ において x 軸と 2 点で交わるためには

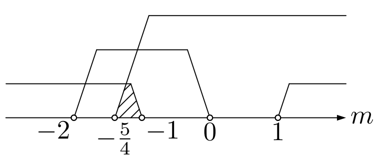
$$\begin{cases} 0 < -m < 2 & \cdots ② \\ f(0) > 0 & \cdots ③ \\ f(2) > 0 & \cdots ④ \end{cases}$$

が成り立てばよい．

② より，$-2 < m < 0 \quad \cdots ⑤$

③ より，$f(0) = 0^2 + 2m \cdot 0 + 1 = 1 > 0$ であるから，これは常に成り立つ．

④ より，$f(2) = 2^2 + 2m \cdot 2 + 1 = 4m + 5$ であるから，$4m + 5 > 0$，すなわち，$m > -\dfrac{5}{4} \quad \cdots ⑥$



①，⑤，⑥ より，$\boldsymbol{-\dfrac{5}{4} < m < -1}$

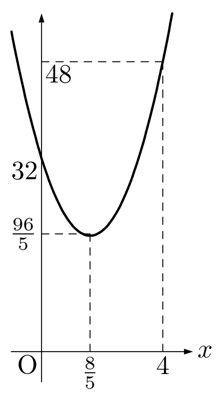
169　$x + y = 4$ より，$y = 4 - x \quad \cdots ①$

$y \geqq 0$ であるから，$4 - x \geqq 0$，すなわち，$x \leqq 4$

これと，$x \geqq 0$ より，x の変域は，$0 \leqq x \leqq 4$

① を $3x^2 + 2y^2$ に代入して

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 &= 3x^2 + 2(4-x)^2 \\ &= 3x^2 + 2(16 - 8x + x^2) \\ &= 5x^2 - 16x + 32 \\ &= 5\left(x^2 - \frac{16}{5}x\right) + 32 \\ &= 5\left\{\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 - \frac{16}{25}\right\} + 32 \\ &= 5\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{96}{5} \end{aligned}$$



$x = 0$ のとき，$y = 32$

$x = 4$ のとき，$y = 5 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 + 32 = 48$

以上より，$x = 4$ のとき，最大値をとり，$x = \dfrac{8}{5}$ のとき，最小値をとる．

① より

$x = 4$ のとき，$y = 4 - 4 = 0$

$x = \dfrac{8}{5}$ のとき，$y = 4 - \dfrac{8}{5} = \dfrac{12}{5}$

よって，$\boldsymbol{x = 4,\ y = 0}$ のとき，最大値 **48**

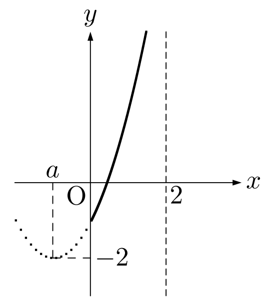
$\boldsymbol{x = \dfrac{8}{5},\ y = \dfrac{12}{5}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{96}{5}}$

170　$y = f(x)$ とおく．

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2ax + a^2 - 2 \\ &= (x-a)^2 - a^2 + a^2 - 2 \\ &= (x-a)^2 - 2 \end{aligned}$$

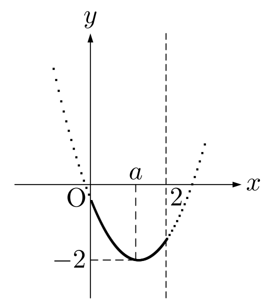
軸の方程式は，$x = a$ であり，この軸の位置によって場合分けする．

i）　$a < 0$ のとき



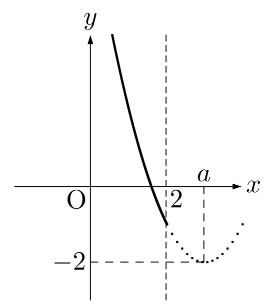
グラフより，$0 \leqq x \leqq 2$ における最小値は，$f(0) = a^2 - 2$ となる．

ii）　$0 \leqq a < 2$ のとき



グラフより，$0 \leqq x \leqq 2$ における最小値は，-2 となる．

iii）　$a \geqq 2$ のとき



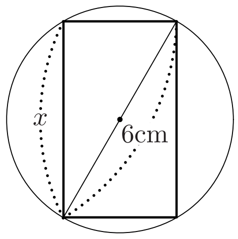
グラフより，$0 \leqq x \leqq 2$ における最小値は，$f(2)$ となる．

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-a)^2 - 2 \\ &= 4 - 4a + a^2 - 2 \\ &= a^2 - 4a + 2 \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & \text{最小値}\ \boldsymbol{a^2 - 2}\ (x = 0) \\ 0 \leqq a < 2 \text{ のとき} & \text{最小値}\ \boldsymbol{-2}\ (x = a) \\ a \geqq 2 \text{ のとき} & \text{最小値}\ \boldsymbol{a^2 - 4a + 2}\ (x = 2) \end{cases}$$

171　下の図のように長方形の縦の長さを $x\,(\mathrm{cm})$ とする．ただし，$0 < x < 6$



三平方の定理より，横の長さは，$\sqrt{6^2 - x^2} = \sqrt{36 - x^2}$ であるから，長方形の面積は，$x\sqrt{36 - x^2} = \sqrt{x^2(36 - x^2)}$ となる．

根号の中の $x^2(36 - x^2)$ が最大となるとき，面積も最大となるので，$y = x^2(36 - x^2)$ とおき，y が最大となる場合を調べる．

$x^2 = X$ とおくと，$0 < x < 6$ より，$0 < X < 36$

$$
\begin{aligned}
y &= X(36 - X) \\
&= -X^2 + 36X \\
&= -(X^2 - 36X) \\
&= -(X - 18)^2 + 18^2 \\
&= -(X - 18)^2 + 324
\end{aligned}
$$

よって，$X = 18$ のとき，y は最大値をとり，このとき面積も最大となる．

$x^2 = 18$ より，$x = 3\sqrt{2}$ であり，横の長さは

$\sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

すなわち，面積が最大となるのは，**1 辺の長さが $3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ の正方形**のときである．

∎