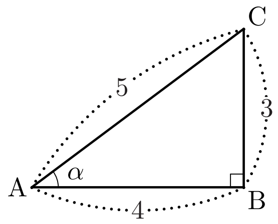
5章　三角関数

§1　三角比とその応用　(p.51〜p.55)

BASIC

249　(1)　図のように，頂点を定めると

$\mathrm{AC} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

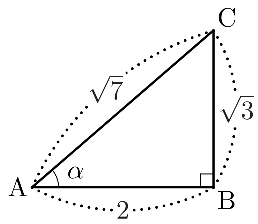


よって

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$，$\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$

(2)　図のように，頂点を定めると

$\mathrm{AC} = \sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$



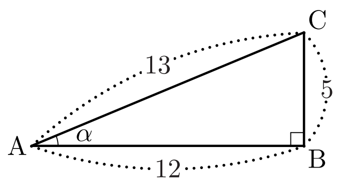
よって

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$，$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　図のように，頂点を定めると

$\mathrm{BC} = \sqrt{13^2-12^2} = \sqrt{25} = 5$



よって

$\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$，$\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$，$\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$

250　(1) 与式 $= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) 与式 $= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \mathbf{0}$

(3) 与式 $= \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3}$

$= \dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}$

$= -2-\sqrt{3}$

251　(1) 与式 $= \sin(90^\circ - 6^\circ)$

$= \cos 6^\circ$

(2) 与式 $= \cos(90^\circ - 38^\circ)$

$= \sin 38^\circ$

(3) 与式 $= \tan(90^\circ - 27^\circ)$

$= \dfrac{1}{\tan 27^\circ}$

252　(1) 与式 $= \mathbf{0.8290}$

(2) 与式 $= \mathbf{0.8988}$

(3) 与式 $= \mathbf{19.0811}$

253　$\mathrm{AB} = x\,(\mathrm{m})$ とすると

$\tan 11^\circ = \dfrac{153}{x}$

よって

$x = \dfrac{153}{\tan 11^\circ}$

$= \dfrac{153}{0.1944}$

$= 787.037\cdots$

したがって，**約 787 m**

254　(1) 与式 $= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$

$= \mathbf{1}$

(2) 与式 $= \dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1}{1 + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 1}$

$= \dfrac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$= \dfrac{-(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= -\dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}$

$= -\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}$

$= -2-\sqrt{3}$

（3）与式 $= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$= \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

255（1）与式 $= \sin(180^\circ - 83^\circ)$

$= \sin 83^\circ = \mathbf{0.9925}$

（2）与式 $= \cos(180^\circ - 24^\circ)$

$= -\cos 24^\circ = \mathbf{-0.9135}$

（3）与式 $= \tan(180^\circ - 80^\circ)$

$= -\tan 80^\circ = \mathbf{-5.6713}$

256（1）$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

α は鈍角なので，$\cos\alpha < 0$

よって，$\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{7}{16}} = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{7}}{4}}$

また

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3}{\sqrt{7}} = \boldsymbol{-\frac{3\sqrt{7}}{7}}$$

（2）$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

α は鋭角なので，$\cos\alpha > 0$

よって，$\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

また

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

（3）$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

$\sin\alpha > 0$ であるから

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{11}{36}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{6}}$$

また

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{6}}{-\frac{5}{6}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{11}}{5}}$$

（4）$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$

よって，$\cos^2\alpha = \dfrac{4}{5}$

α は鋭角なので，$\cos\alpha > 0$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

また

$$\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

（5）$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + (-4)^2 = 17$

よって，$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{17}$

α は鈍角なので，$\cos\alpha < 0$

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{17}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{17}}{17}}$$

また

$$\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = -4\cdot\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right) = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{17}}{17}}$$

257（1）正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ であるから

$$a = \frac{b}{\sin B}\cdot\sin A = \frac{3\cdot\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{3\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

（2）正弦定理より，$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ であるから

$$\sin C = c\cdot\frac{\sin B}{b} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（3）$C = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$

正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$ であるから

$$a = \frac{c}{\sin C}\cdot\sin A = \frac{2\cdot\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

258　外接円の半径を R とする．正三角形の 1 つの内角は $60°$ であるから，正弦定理より

$$2R = \frac{a}{\sin 60°}$$

よって

$$R = \frac{a}{2\sin 60°} = \frac{a}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}a}$$

259（1）余弦定理より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$= 4^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 30°$$
$$= 16 + 27 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 43 - 36 = 7$$

$a > 0$ であるから，$\boldsymbol{a = \sqrt{7}}$

（2）余弦定理より

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$= (\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 135°$$
$$= 6 + 12 - 12\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 18 + 12 = 30$$

$b > 0$ であるから，$\boldsymbol{b = \sqrt{30}}$

（3）余弦定理より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + c^2 - 2 \cdot 1 \cdot c \cdot \cos 60°$$
$$7 = 1 + c^2 - 2c \cdot \frac{1}{2}$$
$$7 = 1 + c^2 - c$$
$$c^2 - c - 6 = 0$$
$$(c-3)(c+2) = 0$$
$$c = 3,\ -2$$

$c > 0$ であるから，$\boldsymbol{c = 3}$

260 余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 5^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{16 + 25 - 4}{40} = \boldsymbol{\frac{37}{40}}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - c^2}{2ca} = \frac{5^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{25 + 4 - 16}{20} = \boldsymbol{\frac{13}{20}}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{4 + 16 - 25}{16} = \boldsymbol{-\frac{5}{16}}$$

261　余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 5^2 - a^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{16 + 25 - a^2}{40} = \frac{41 - a^2}{40}$$

A が鋭角となるためには，$\cos A > 0$ となればよいから

$$\frac{41 - a^2}{40} > 0$$
$$41 - a^2 > 0$$
$$a^2 - 41 < 0$$
$$(a + \sqrt{41})(a - \sqrt{41}) < 0$$

よって，$-\sqrt{41} < a < \sqrt{41}$

$a > 0$ であるから，求める a の範囲は

$\boldsymbol{0 < a < \sqrt{41}}$

262　△ABC の面積を S とする．

（1）$S = \frac{1}{2}bc\sin A$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 60°$$
$$= \frac{35}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{35\sqrt{3}}{4}}$$

（2）　$S = \frac{1}{2}ab\sin C$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 45°$$
$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

263　△ABC の面積を S とすると，$S = \frac{1}{2}ca\sin B$ であるから

$$7\sqrt{3} = \frac{1}{2}c \cdot 10 \cdot \sin 30°$$
$$7\sqrt{3} = 5c \cdot \frac{1}{2}$$
$$7\sqrt{3} = \frac{5}{2}c$$

よって

$$c = 7\sqrt{3} \cdot \frac{2}{5} = \boldsymbol{\frac{14\sqrt{3}}{5}}$$

264（1）　余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \boldsymbol{-\frac{1}{5}}$$

（2）　$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$，$\sin C > 0$ より

$$\sin C = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{5}}$$

（3）　$S = \frac{1}{2}ab\sin C$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$$
$$= \boldsymbol{4\sqrt{6}}$$

（4）　正弦定理より，$2R = \dfrac{c}{\sin C}$ であるから

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}$$
$$= \frac{35}{4\sqrt{6}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{35\sqrt{6}}{24}}$$

265　$\triangle$ABC の面積を S，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とし，ヘロンの公式を利用する．

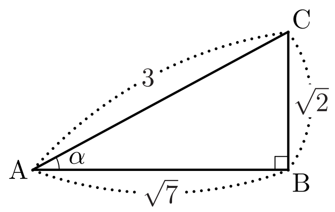
（1）
$$s = \frac{3+5+6}{2} = 7$$
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)}$$
$$= \sqrt{7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$= \sqrt{56} = \boldsymbol{2\sqrt{14}}$$

（2）
$$s = \frac{4+5+6}{2} = \frac{15}{2}$$
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$$

CHECK

266（1）　図のように，頂点を定めると

$$\mathrm{AB} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$$

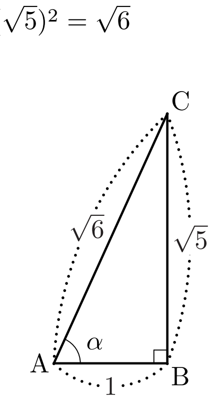


よって

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}},\quad \boldsymbol{\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}},$$
$$\boldsymbol{\tan\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{7}}$$

（2）　図のように，頂点を定めると

$$\mathrm{AC} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6}$$



よって

$$\boldsymbol{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{30}}{6}},\quad \boldsymbol{\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}},$$

$$\boldsymbol{\tan\alpha = \sqrt{5}}$$

267　$\triangle$A$'$BA において，$\angle$A$'$BA $= 30^\circ$ であるから

$$\angle \mathrm{BA'A} = 90^\circ - 3^\circ = 87^\circ$$

よって，$\tan 87^\circ = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AA'}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{10}$ であるから

$$\mathrm{AB} = \tan 87^\circ \times 10$$
$$= 19.0811 \times 10 = 190.811$$

よって，AB の距離はおよそ **191 m**

268（1）
$$与式 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{1-3-2\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{-2-2\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{-\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$$

（2）
$$与式 = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + (-1) + 0}{1 - (-\sqrt{3}) \cdot 1}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) \times \sqrt{3}}{(1+\sqrt{3}) \times \sqrt{3}}$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} = \frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-3)}{(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)}$$
$$= \frac{-6+4\sqrt{3}}{3-9} = \boldsymbol{\frac{3-2\sqrt{3}}{3}}$$

（3）
$$与式 = \cos\alpha \cdot (-\cos\alpha) - \sin\alpha \sin\alpha$$
$$= -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= -(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \boldsymbol{-1}$$

269　$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$
$$= 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

α は鈍角なので，$\sin\alpha > 0$

よって，$\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{24}{25}} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}$

また

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$= \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}}$$
$$= -\frac{3}{\sqrt{7}} = \boldsymbol{-\frac{3\sqrt{7}}{7}}$$

270
$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

よって，$\cos^2\alpha = \dfrac{4}{5}$

α は鋭角なので，$\cos\alpha < 0$

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = \boldsymbol{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

また

$$\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

271 （1）
$$A = 180^\circ - (B + C)$$
$$= 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$$
正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ であるから
$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin A}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{2\sin 30^\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{6}}$$
また，正弦定理より，$\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ であるから
$$c = 2R \cdot \sin C$$
$$= 2\sqrt{6} \cdot \sin 45^\circ$$
$$= 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

（2）
$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 \cdot \sin 120^\circ$$
$$= 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{25\sqrt{3}}{2}}$$
また，余弦定理より
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$= 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ$$
$$= 25 + 100 - 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 125 + 50 = 175$$
$c > 0$ であるから，$c = \sqrt{175} = \boldsymbol{5\sqrt{7}}$

（3）　余弦定理より
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$= 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ$$
$$= 144 + 225 - 360 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 369 - 180 = 189$$
$a > 0$ であるから，$a = \sqrt{189} = \boldsymbol{3\sqrt{21}}$

また，正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ であるから
$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin A}$$
$$= \frac{3\sqrt{21}}{2\sin 60^\circ}$$
$$= \frac{3\sqrt{21}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \frac{3\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{3\sqrt{7}}$$

（4）余弦定理より
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$
$$= \frac{6^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 7}$$
$$= \frac{36 + 49 - 64}{84}$$
$$= \frac{21}{84} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$$
$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$，$\sin C > 0$ より
$$\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{15}{16}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$
$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$= \boldsymbol{\frac{21\sqrt{15}}{4}}$$

（5）　$s = \dfrac{a + b + c}{2}$ とし，ヘロンの公式を利用する．
$$s = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$
$$= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$$
$$= \sqrt{21 \cdot 21 \cdot 2^4}$$
$$= 21 \cdot 4 = \mathbf{84}$$
$S = \dfrac{1}{2} bc \sin A$ より
$$\sin A = \frac{2S}{bc}$$
$$= \frac{2 \cdot 84}{14 \cdot 15} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

272　△ABD において
$$\angle \mathrm{BDA} = \angle \mathrm{DBC} - \angle \mathrm{BAD}$$
$$= 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$$
よって，$\mathrm{BA} = \mathrm{BD} = 2$

これより，$\mathrm{AC} = 2 + \sqrt{3}$

△ACD において，三平方の定理より
$$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{CD}^2}$$
$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1}$$
$$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$
$$= 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$
以上より
$$\sin 15^\circ = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AD}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$
$$\cos 15^\circ = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}$$
$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$
$$= \frac{(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC}}$$
$$= \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = \mathbf{2-\sqrt{3}}$$

〔２重根号をはずせるならば〕

$$\mathrm{AD} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{4(2+\sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{8+2\sqrt{12}}$$
$$= \sqrt{(6+2)+2\sqrt{6\cdot 2}}$$
$$= \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

よって

$$\sin 15^\circ = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AD}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$
$$= \mathbf{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$
$$= \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$
$$= \mathbf{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

STEP UP

273　（１）　$\cos\alpha > 0$ より，$0^\circ < \alpha < 90^\circ$

三角関数表より，$\alpha = \mathbf{39^\circ}$

（２）　$\cos\alpha < 0$ より，$90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$\cos\alpha = -0.5878$ より，$-\cos\alpha = 0.5878$

$-\cos\alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$ であるから

$\cos(180^\circ - \alpha) = 0.5878$

三角関数表より，$180^\circ - \alpha = 54^\circ$ となるから

$\alpha = 180^\circ - 54^\circ = \mathbf{126^\circ}$

（３）　i) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ のとき

三角関数表より，$\alpha = 6^\circ$

ii) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ のとき

$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ であるから

$\sin(180^\circ - \alpha) = 0.1045$

三角関数表より，$180^\circ - \alpha = 6^\circ$ となるから

$\alpha = 180^\circ - 6^\circ = 174^\circ$

よって，$\alpha = \mathbf{6^\circ}$，$\mathbf{174^\circ}$

（４）　$\tan\alpha < 0$ より，$90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$\tan\alpha = -6.3138$ より，$-\tan\alpha = 6.3138$

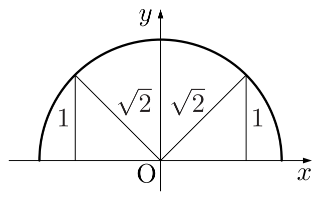
$-\tan\alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$ であるから

$\tan(180^\circ - \alpha) = 6.3138$

三角関数表より，$180^\circ - \alpha = 81^\circ$ となるから

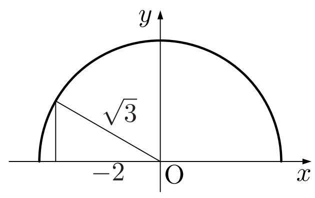
$\alpha = 180^\circ - 81^\circ = \mathbf{99^\circ}$

274　（１）



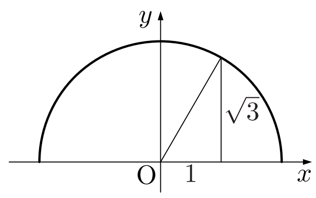
$\alpha = \mathbf{45^\circ}$，$\mathbf{135^\circ}$

（２）



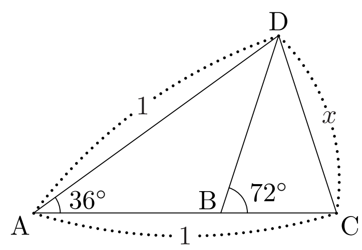
$\alpha = \mathbf{150^\circ}$

（３）



$\alpha = \mathbf{60^\circ}$

275　$\mathrm{CD} = x$ とおく．



$\mathrm{AC} = \mathrm{AD}$ より，$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{ACD} = \dfrac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$

これより，$\triangle\mathrm{DBC}$ は，$\mathrm{DB} = \mathrm{DC}$ の二等辺三角形であるから，$\angle\mathrm{BDC} = 180^\circ - (72^\circ \times 2) = 36^\circ$

また，$\angle\mathrm{BDA} = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$ より，$\triangle\mathrm{BAD}$ は，$\mathrm{BA} = \mathrm{BD}$ の二等辺三角形である．

以上より，$\mathrm{AB} = \mathrm{BD} = \mathrm{CD} = x$ であり，$\triangle\mathrm{ACD} \backsim \triangle\mathrm{DBC}$ であるから

$\mathrm{AD} : \mathrm{DC} = \mathrm{DC} : \mathrm{CB}$，すなわち，$1 : x = x : (1-x)$

これを解くと

$x^2 = 1 - x$

$x^2 + x - 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ より，$x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

すなわち，$\mathbf{CD} = \boldsymbol{\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$

$\triangle$ACD において，余弦定理より

$$\cos 36^\circ = \frac{\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{CD}^2}{2 \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{AC}}$$
$$= \frac{1^2 + 1^2 - \mathrm{CD}^2}{2 \cdot 1 \cdot 1}$$
$$= \frac{2 - \mathrm{CD}^2}{2}$$

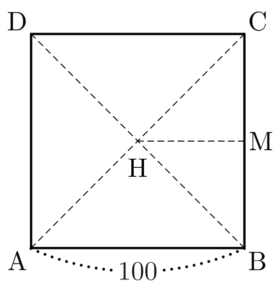
ここで，$\mathrm{CD}^2 = \left(\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4}$$
$$= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

よって，$\cos 36^\circ = \dfrac{2 - \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}}{2}$

$$= \frac{4 - (3 - \sqrt{5})}{4}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1 + \sqrt{5}}{4}}$$

276　底面に関わる線分の長さを求める．



$$\mathrm{AH} = 100 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 50\sqrt{2}$$
$$\mathrm{HM} = \mathrm{BM} = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

（1）　$\triangle$OAH において

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{AH}} = \frac{90}{50\sqrt{2}} = \frac{9}{5\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{10}$$
$$= \frac{9 \times 1.4142}{10} \fallingdotseq 1.2728$$

三角関数表より，$\alpha = \mathbf{52^\circ}$

（2）　$\triangle$OMH において

$$\tan\beta = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{MH}} = \frac{90}{50} = \frac{9}{5} = 1.8$$

三角関数表より，$\beta = \mathbf{61^\circ}$

（3）　$\triangle$OMH において，三平方の定理より

$$\mathrm{OM} = \sqrt{90^2 + 50^2} = \sqrt{8100 + 2500}$$
$$= \sqrt{10600} = 10\sqrt{106}$$

$\triangle$OMC において

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{OM}} = \frac{50}{10\sqrt{106}} = \frac{5}{\sqrt{106}}$$
$$= \frac{5\sqrt{106}}{106} \fallingdotseq 0.4856$$

（※ 結局，電卓を使うので，有理化は不要ですね．）

三角関数表より，$\dfrac{\gamma}{2} = 26^\circ$

よって，$\gamma = 26^\circ \times 2 = \mathbf{52^\circ}$

〔別解〕

$\triangle$OBH において，$\mathrm{BH} = 50\sqrt{2}$ であるから，三平方の定理より

$$\mathrm{OB} = \sqrt{90^2 + (50\sqrt{2})^2} = \sqrt{8100 + 5000}$$
$$= \sqrt{13100} = 10\sqrt{131}$$

$\triangle$OBC において，$\mathrm{OC} = \mathrm{OB} = 10\sqrt{131}$ であるから，余弦定理より

$$\cos\gamma = \frac{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{OC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2 \cdot \mathrm{OB} \cdot \mathrm{OC}}$$
$$= \frac{(10\sqrt{131})^2 + (10\sqrt{131})^2 - 100^2}{2 \cdot 10\sqrt{131} \cdot 10\sqrt{131}}$$
$$= \frac{(100 \cdot 131) \times 2 - 100^2}{200 \cdot 131}$$
$$= \frac{131 - 50}{131} = \frac{81}{131} \fallingdotseq 0.61832\cdots$$

三角関数表より，$\gamma = \mathbf{52^\circ}$

277　正弦定理より，$\dfrac{c}{\sin C} = 2R$

これより，$\sin C = \dfrac{c}{2R}$

よって，$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}ab \cdot \dfrac{c}{2R}$

$$= \frac{abc}{4R}$$

※ $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ から，$\sin C$ を消去することを考える．

正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

これより，$b = \dfrac{a\sin B}{\sin A}$

よって，$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a\sin B}{\sin A} \cdot \sin C$

$$= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}$$

※ $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ から，b を消去することを考える．

以上より，$S = \dfrac{abc}{4R} = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}$

278　$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とし，ヘロンの公式より，$\triangle$ABC の面積を求める．

$$s = \frac{8+5+7}{2} = 10$$

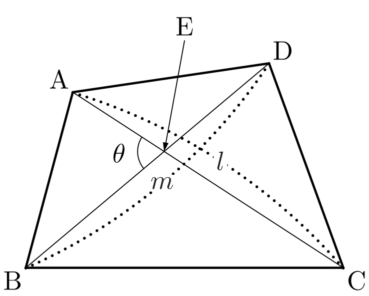
よって，$S = \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)}$

$$= \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3}$$
$$= 10\sqrt{3}$$

ここで，前問の $S = \dfrac{abc}{4R}$ より，$R = \dfrac{abc}{4S}$ であるから

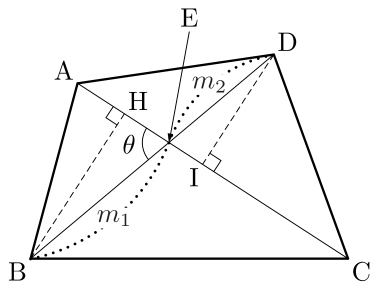
$$R = \frac{8 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 10\sqrt{3}}$$
$$= \frac{7}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

279　下の図のように，対角線の交点を E とし，$\mathrm{AC} = l$，$\mathrm{BD} = m$，$\angle\mathrm{AEB} = \theta$ とする．



頂点 B，D から対角線 AC に，それぞれ垂線 BH，DI を引く．ま

た，$\mathrm{BE} = m_1$，$\mathrm{ED} = m_2$　$(m_1 + m_2 = m)$ とする．



$\triangle$BEH において，$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{BH}}{m_1}$ より，$\mathrm{BH} = m_1 \sin\theta$ であるから

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BH} = \frac{1}{2}lm_1\sin\theta$$

同様に，$\triangle$DEI において，$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{DI}}{m_2}$ より，$\mathrm{DI} = m_2\sin\theta$ であるから

$$\triangle\mathrm{ADC} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DI} = \frac{1}{2}lm_2\sin\theta$$

よって

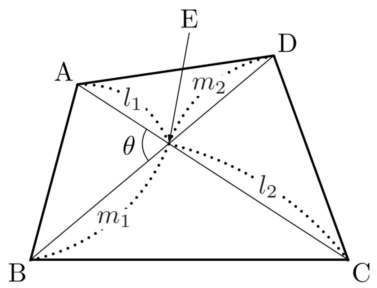
$$\begin{aligned} S = \triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{ADC} &= \frac{1}{2}lm_1\sin\theta + \frac{1}{2}lm_2\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}l(m_1+m_2)\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}lm\sin\theta \end{aligned}$$

したがって，$S = \dfrac{1}{2}lm\sin\theta$

〔別解〕

$\mathrm{AE} = l_1$，$\mathrm{EC} = l_2$　$(l_1 + l_2 = l)$

$\mathrm{BE} = m_1$，$\mathrm{ED} = m_2$　$(m_1 + m_2 = m)$ とする．



$$\triangle\mathrm{AEB} = \frac{1}{2}l_1m_1\sin\theta$$

$$\triangle\mathrm{BEC} = \frac{1}{2}l_2m_1\sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}l_2m_1\sin\theta$$

$$\triangle\mathrm{CED} = \frac{1}{2}l_2m_2\sin\theta$$

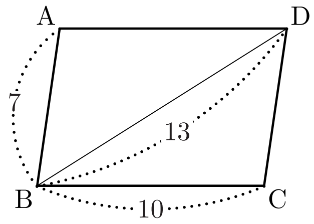
$$\triangle\mathrm{DEA} = \frac{1}{2}l_1m_2\sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}l_1m_2\sin\theta$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{AEB} + \triangle\mathrm{BEC} + \triangle\mathrm{CED} + \triangle\mathrm{DEA} \\ &= \frac{1}{2}l_1m_1\sin\theta + \frac{1}{2}l_2m_1\sin\theta \\ &\qquad + \frac{1}{2}l_2m_2\sin\theta + \frac{1}{2}l_1m_2\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}(l_1m_1 + l_2m_1 + l_2m_2 + l_1m_2)\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\{l_1(m_1+m_2) + l_2(m_1+m_2)\}\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}(l_1+l_2)(m_1+m_2)\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}lm\sin\theta \end{aligned}$$

したがって，$S = \dfrac{1}{2}lm\sin\theta$

280（1）　四角形 ABCD の面積は，$\triangle$ABD の 2 倍である．

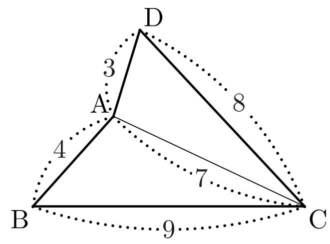


$\triangle$ABD において，$\dfrac{7+13+10}{2} = 15$ であるから，ヘロンの公式より

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABD} &= \sqrt{15(15-7)(15-13)(15-10)} \\ &= \sqrt{15\cdot 8\cdot 2\cdot 5} \\ &= \sqrt{2^4\cdot 5^2\cdot 3} = 20\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって，四角形 ABCD の面積は，$20\sqrt{3}\times 2 = \boldsymbol{40\sqrt{3}}$

（2）



$\triangle$ABC において，$\dfrac{4+9+7}{2} = 10$ であるから，ヘロンの公式より

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \sqrt{10(10-4)(10-9)(10-7)} \\ &= \sqrt{10\cdot 6\cdot 1\cdot 3} \\ &= \sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5} = 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

$\triangle$ACD において，$\dfrac{3+7+8}{2} = 9$ であるから，ヘロンの公式より

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \sqrt{9(9-3)(9-7)(9-8)} \\ &= \sqrt{9\cdot 6\cdot 2\cdot 1} \\ &= \sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 3} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって，四角形 ABCD の面積は，$\boldsymbol{6\sqrt{5} + 6\sqrt{3}}$

（3）　※ 前問の $S = \dfrac{1}{2}lm\sin\theta$ を利用する．

四角形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\cdot\sin 60^\circ \\ &= 60\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{30\sqrt{3}} \end{aligned}$$

281（1）余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

よって

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 2ca\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ &\qquad + 2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ &= (b^2+c^2-a^2) + (c^2+a^2-b^2) + (a^2+b^2-c^2) \\ &= a^2+b^2+c^2 = \text{右辺} \end{aligned}$$

（2）正弦定理より

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$

$\sin B = \dfrac{b}{2R}$

よって

$$\text{左辺} = \dfrac{\dfrac{a}{2R} - \dfrac{b}{2R}}{\dfrac{a}{2R} + \dfrac{b}{2R}}$$

$$= \dfrac{\dfrac{a-b}{2R} \cdot 2R}{\dfrac{a+b}{2R} \cdot 2R} = \dfrac{a-b}{a+b} = \text{右辺}$$

（3）正弦定理より

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$

$\sin B = \dfrac{b}{2R}$

余弦定理より

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

よって

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \dfrac{a}{2R}\left(a - c \cdot \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right) \\ &= \dfrac{a}{2R}\left(a - \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right) \\ &= \dfrac{a}{2R}\left\{\dfrac{2a^2-(c^2+a^2-b^2)}{2a}\right\} \\ &= \dfrac{a}{2R} \cdot \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a} \\ &= \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= \dfrac{b}{2R}\left(b - c \cdot \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\ &= \dfrac{b}{2R}\left(b - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right) \\ &= \dfrac{b}{2R}\left\{\dfrac{2b^2-(b^2+c^2-a^2)}{2b}\right\} \\ &= \dfrac{b}{2R} \cdot \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b} \\ &= \dfrac{a^2+b^2-c^2}{4R}\end{aligned}$$

よって，左辺 = 右辺

282（1）正弦定理より

$\sin B = \dfrac{b}{2R}$

$\sin C = \dfrac{c}{2R}$

これらを，与えられた等式に代入すると

$b \cdot \dfrac{b}{2R} = c \cdot \dfrac{c}{2R}$

$\dfrac{b^2}{2R} = \dfrac{c^2}{2R}$

$b^2 = c^2$

$b^2 - c^2 = 0$

$(b+c)(b-c) = 0$

ここで，$b + c \fallingdotseq 0$ より，$b - c = 0$，すなわち $b = c$ であるから，△ABC は，**$b = c$ の二等辺三角形**である．

（2）　余弦定理より

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

これらを，与えられた等式に代入すると

$a \cdot \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = b \cdot \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + c$

$\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c} + c$

$c^2+a^2-b^2 = (b^2+c^2-a^2) + 2c^2$

$2a^2 = 2b^2 + 2c^2$，すなわち $a^2 = b^2 + c^2$ であるから，△ABC は，**∠A = 90° の直角三角形**である．

（3）　$\tan A : \tan B = a : b$ より，$a \tan B = b \tan A$

これより，$a \cdot \dfrac{\sin B}{\cos B} = b \cdot \dfrac{\sin A}{\cos A}$

すなわち，$a \sin B \cos A = b \sin A \cos B \cdots$ ①

ここで，正弦定理より

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$，　$\sin B = \dfrac{b}{2R}$

これらを ① に代入すると

$a \cdot \dfrac{b}{2R} \cos A = b \cdot \dfrac{a}{2R} \cos B$

$\cos A = \cos B$

よって，∠A = ∠B となるから，△ABC は，**$a = b$ の二等辺三角形**である．

∎