5章　三角関数

§ 2　三角関数　(p.57〜)

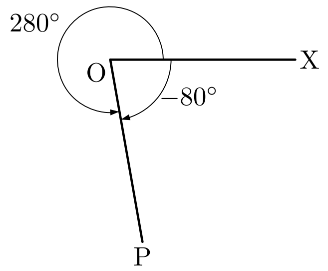
BASIC

283　OX を始線，OP を角の動径とする．

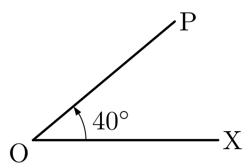
（1）　$640^\circ = 280^\circ + 360^\circ \times 1$

または

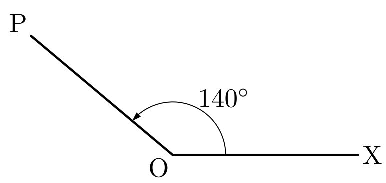
$640^\circ = -80^\circ + 360^\circ \times 2$



（2）　$-320^\circ = 40^\circ + 360^\circ \times (-1)$



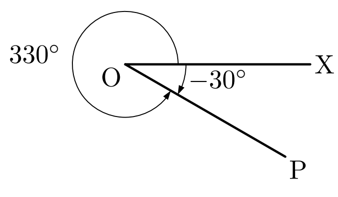
（3）　$500^\circ = 140^\circ + 360^\circ \times 1$



（4）　$-1110^\circ = 330^\circ + 360^\circ \times (-4)$

または

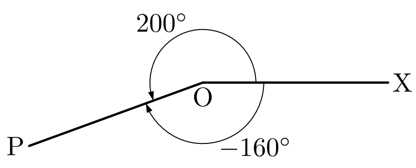
$-1110^\circ = -30^\circ + 360^\circ \times (-3)$



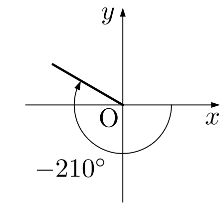
（5）　$2000^\circ = 200^\circ + 360^\circ \times 5$

または

$2000^\circ = -160^\circ + 360^\circ \times 6$

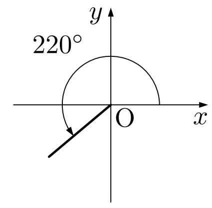


284　（1）　**第 2 象限**



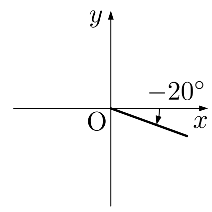
（2）　$580^\circ = 220^\circ + 360^\circ \times 1$

よって，**第 3 象限**



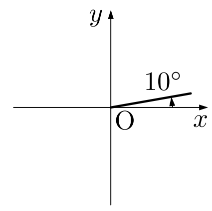
（3）　$-740^\circ = -20^\circ + 360^\circ \times (-2)$

よって，**第 4 象限**



（4）　$1450^\circ = 10^\circ + 360^\circ \times 4$

よって，**第 1 象限**

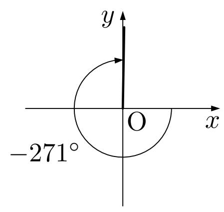


（5）　$-631^\circ = -271^\circ + 360^\circ \times (-1)$

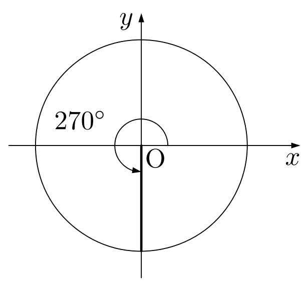
または

$-631^\circ = 89^\circ + 360^\circ \times (-2)$

よって，**第 1 象限**

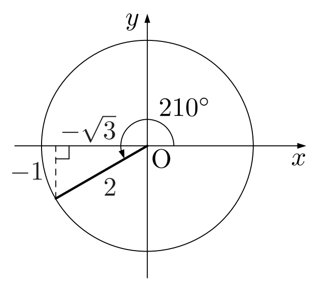


285　（1）　$630^\circ = 270^\circ + 360^\circ \times 1$



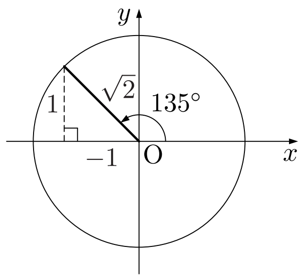
$\sin 630^\circ = \mathbf{-1}$

（2）　$570^\circ = 210^\circ + 360^\circ \times 1$



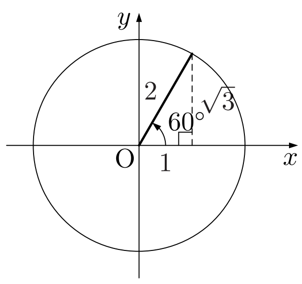
$\cos 570^\circ = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

（3）$855^\circ = 135^\circ + 360^\circ \times 2$



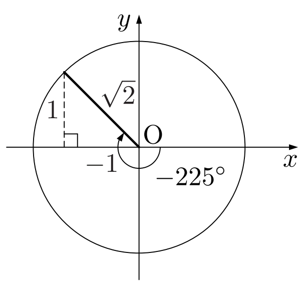
$\tan 855^\circ = \mathbf{-1}$

（4）$-660^\circ = 60^\circ + 360^\circ \times (-2)$



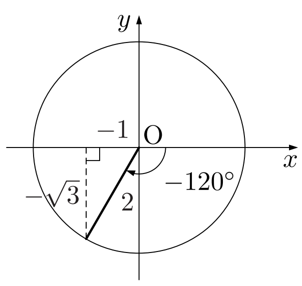
$\sin(-660^\circ) = \sin 60^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

（5）



$\cos(-225^\circ) = \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

（6）$-480^\circ = -120^\circ + 360^\circ \times (-1)$



$\tan(-480^\circ) = \tan(-120^\circ) = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

286（1）　$36^\circ = \theta$（ラジアン）とすると

$36 : 180 = \theta : \pi$

$180\theta = 36\pi$

よって，$\theta = \dfrac{36\pi}{180} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{5}}$

〔別解〕

$$36^\circ = 36^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \boldsymbol{\frac{\pi}{5}}$$

（2）　$-45^\circ = \theta$（ラジアン）とすると

$-45 : 180 = \theta : \pi$

$180\theta = -45\pi$

よって，$\theta = \dfrac{-45\pi}{180} = \boldsymbol{-\dfrac{\pi}{4}}$

〔別解〕

$$-45^\circ = -45^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \boldsymbol{-\frac{\pi}{4}}$$

（3）　$10^\circ = \theta$（ラジアン）とすると

$10 : 180 = \theta : \pi$

$180\theta = 10\pi$

よって，$\theta = \dfrac{10\pi}{180} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{18}}$

〔別解〕

$$10^\circ = 10^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \boldsymbol{\frac{\pi}{18}}$$

（4）　$-150^\circ = \theta$（ラジアン）とすると

$-150 : 180 = \theta : \pi$

$180\theta = -150\pi$

よって，$\theta = \dfrac{-150\pi}{180} = \boldsymbol{-\dfrac{5}{6}\pi}$

〔別解〕

$$-150^\circ = -150^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \boldsymbol{-\frac{5}{6}\pi}$$

（5）　$250^\circ = \theta$（ラジアン）とすると

$250 : 180 = \theta : \pi$

$180\theta = 250\pi$

よって，$\theta = \dfrac{250\pi}{180} = \boldsymbol{\dfrac{25}{18}\pi}$

〔別解〕

$$250^\circ = 250^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \boldsymbol{\frac{25}{18}\pi}$$

287（1）

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \mathbf{60^\circ}$$

（2）

$$-\frac{3}{4}\pi = -\frac{3}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = \mathbf{-135^\circ}$$

（3）

$$\frac{2}{5}\pi = \frac{2}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = \mathbf{72^\circ}$$

（4）

$$-\frac{\pi}{9} = -\frac{\pi}{9} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \mathbf{-20^\circ}$$

（5）

$$\frac{7}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = \mathbf{420^\circ}$$

288　扇形の中心角を θ，弧の長さを l，面積を S とする．

（1）

$$l = r\theta = 6 \cdot \frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\pi}$$

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \pi = \boldsymbol{3\pi}$$

（2）$l = r\theta$ より，$\theta = \dfrac{l}{r}$ であるから

$$\theta = \frac{l}{r} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{3}$$

289（1）　$\sin\dfrac{4}{3}\pi=\sin 240^\circ$

$$=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

（2）　$\cos\dfrac{7}{4}\pi=\cos 315^\circ$

$$=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$$

（3）　$\tan\dfrac{\pi}{6}=\tan 30^\circ$

$$=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

290（1）　左辺 $=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\text{右辺}$$

（2）　左辺 $=\dfrac{1+\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$$+\frac{1-\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$
$$=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}+\frac{1-\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{2}{\cos^2\theta}=\text{右辺}$$

291　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$$=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$=1-\frac{1}{9}$$
$$=\frac{8}{9}$$

θ は第 4 象限の角なので，$\sin\theta<0$

よって，$\sin\theta=-\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$=\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{-2\sqrt{2}}$$

292　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$

$$=1+3^2$$
$$=10$$

したがって，$\cos^2=\dfrac{1}{10}$

θ は第 3 象限の角なので，$\cos\theta<0$

よって，$\cos\theta=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$

また，$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta$

$$=3\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}}$$

293（1）与式 $=\tan\theta\cdot\cos\theta+(-\cos\theta)\cdot(-\tan\theta)$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta+(-\cos\theta)\cdot\left(-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$
$$=\sin\theta+\sin\theta$$
$$=\boldsymbol{2\sin\theta}$$

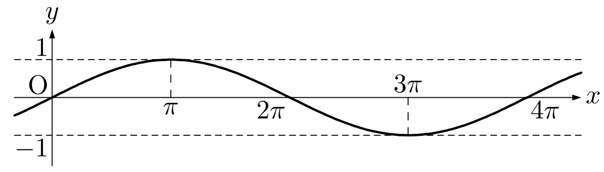
（2）与式 $=\sin\theta\sin\theta+\cos\theta\cos\theta$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta$$
$$=\mathbf{1}$$

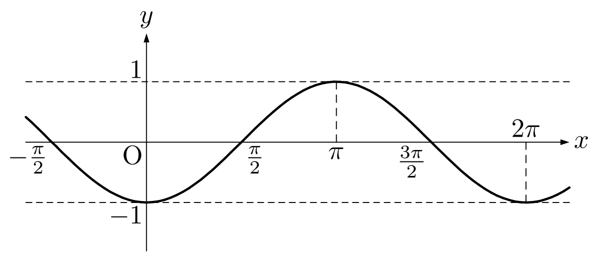
（3）与式 $=\cos\theta-(-\sin\theta)+(-\sin\theta)+(-\cos\theta)$

$$=\cos\theta+\sin\theta-\sin\theta-\cos\theta$$
$$=\mathbf{0}$$

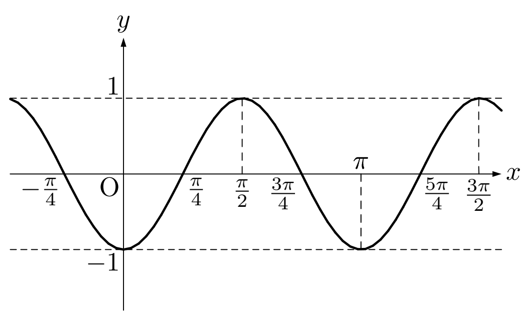
294（1）　この関数のグラフは，$y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に 2 倍に拡大したものだから，周期は $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{4\pi}$ であり，グラフは次のようになる．



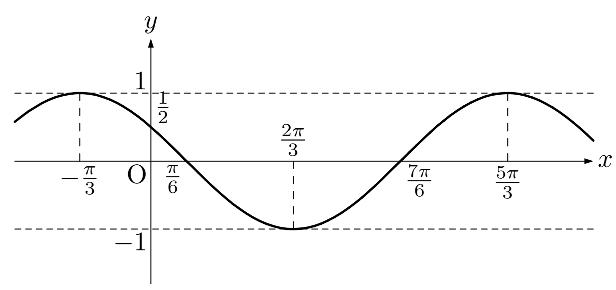
（2）　この関数のグラフは，$y=\cos x$ のグラフを y 軸方向に -1 倍したものだから，周期は $\boldsymbol{2\pi}$ であり，グラフは次のようになる．



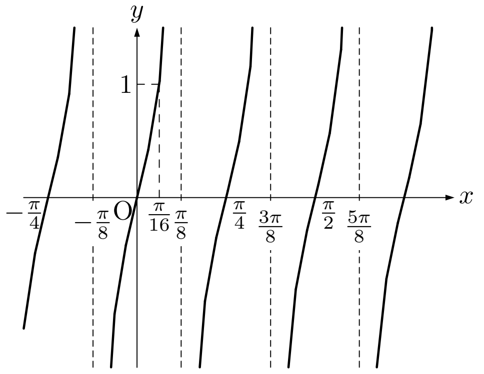
（3）　$y=\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから，この関数のグラフは，$y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小し，$\dfrac{\pi}{4}$ 平行移動したものだから，周期は $\dfrac{2\pi}{2}=\boldsymbol{\pi}$ であり，グラフは次のようになる．



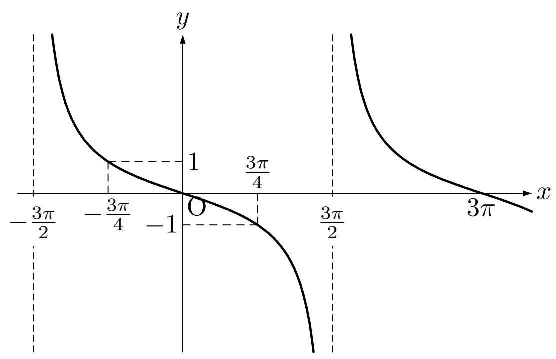
（4）　この関数のグラフは，$y=\cos x$ のグラフを y 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ 平行移動したものだから，周期は $\boldsymbol{2\pi}$ であり，$x=0$ のとき，$y=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ となるので，グラフは次のようになる．



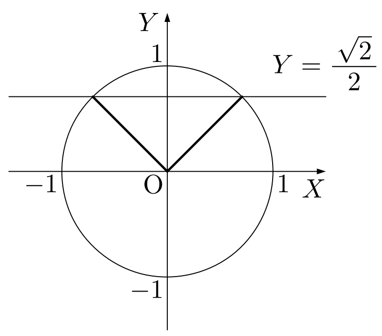
295（1）　この関数のグラフは，$y=\tan x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{4}$ 倍したものだから，周期は $\dfrac{\pi}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\pi}$ であり，グラフは次のようになる．



（2）　この関数のグラフは，$y = \tan x$ のグラフを x 軸方向に 3 倍し，y 軸方向に -1 倍（y 軸に関して対称移動）したものだから，周期は $\dfrac{\pi}{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{3\pi}$ であり，グラフは次のようになる．

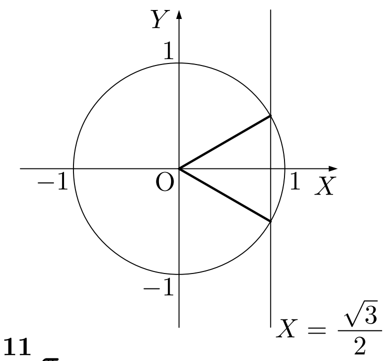


296（1）



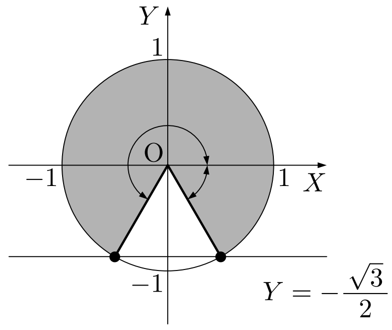
$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi}$

（2）



$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi}$

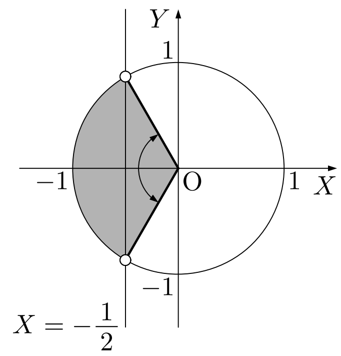
（3）



$0 \leqq x < 2\pi$ において，角 x の動経が影をつけた部分にあるのは

$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi \leqq x < 2\pi}$

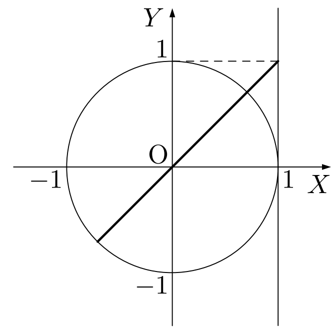
（4）



$0 \leqq x < 2\pi$ において，角 x の動経が影をつけた部分にあるのは

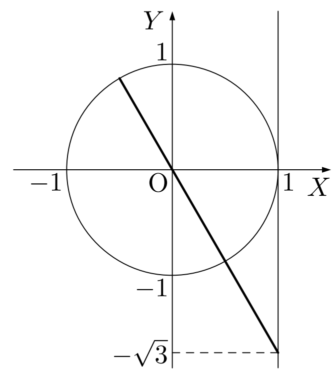
$\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi}$

297（1）



$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi}$

（2）



$\boldsymbol{x = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi}$

298　$a = \sin\frac{5}{4}\pi = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\sin b = \frac{1}{2},\quad \frac{\pi}{2} < b < \pi$ であるから，$b = \boldsymbol{\frac{5}{6}\pi}$

CHECK

299（1）　$40^\circ = \theta$（ラジアン）とすると

$40 : 180 = \theta : \pi$

$180\theta = 40\pi$

よって，$\theta = \frac{40\pi}{180} = \boldsymbol{\frac{2}{9}\pi}$

〔別解〕

$$40^\circ = 40^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{9}\pi}$$

（2）　$-50^\circ = \theta$（ラジアン）とすると

$-50 : 180 = \theta : \pi$

$180\theta = -50\pi$

よって，$\theta = -\dfrac{50\pi}{180} = \boldsymbol{-\dfrac{5}{18}\pi}$

〔別解〕

$$-50^\circ = -50^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{5}{18}\pi}$$

（3）　$210^\circ = \theta$（ラジアン）とすると

$210 : 180 = \theta : \pi$

$180\theta = 210\pi$

よって，$\theta = \dfrac{210\pi}{180} = \boldsymbol{\dfrac{7}{6}\pi}$

〔別解〕

$$210^\circ = 210^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$
$$= \boldsymbol{\frac{7}{6}\pi}$$

300　（1）　$\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{2}{3}\pi \times \dfrac{180^\circ}{\pi}$

$= \mathbf{120^\circ}$

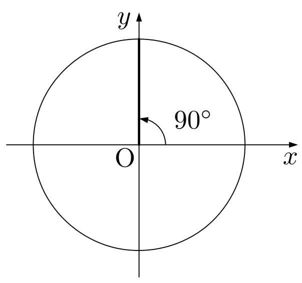
（2）　$-\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} \times \dfrac{180^\circ}{\pi}$

$= \mathbf{-45^\circ}$

（3）　$\dfrac{7}{5}\pi = \dfrac{7}{5}\pi \times \dfrac{180^\circ}{\pi}$

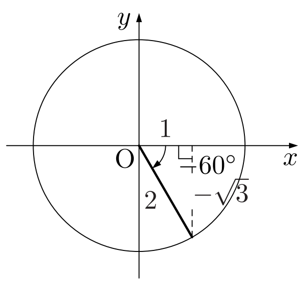
$= \mathbf{252^\circ}$

301　（1）　$450^\circ = 90^\circ + 360^\circ \times 1$



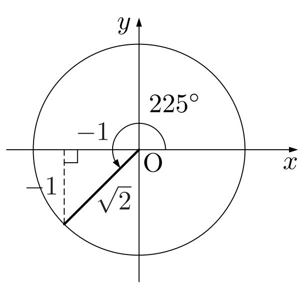
$\sin 450^\circ = \sin 90^\circ = \mathbf{1}$

（2）　$-780^\circ = -60^\circ + 360^\circ \times (-2)$



$\cos(-780^\circ) = \cos(-60^\circ) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

（3）

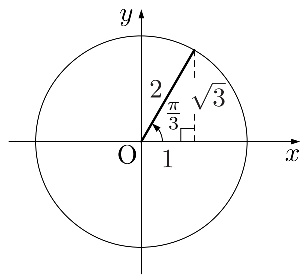


$\tan 225^\circ = \mathbf{1}$

（4）　$-\dfrac{17}{3}\pi = \dfrac{\pi}{3} + \left(-\dfrac{18}{3}\pi\right)$

$= \dfrac{\pi}{3} + (-6\pi)$

$= \dfrac{\pi}{3} + 2\pi \times (-3)$

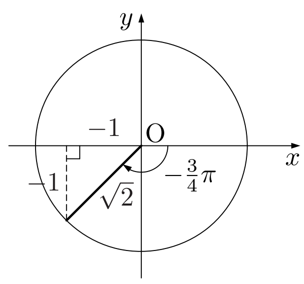


$\sin\left(-\dfrac{17}{3}\pi\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

（5）　$\dfrac{21}{4}\pi = -\dfrac{3}{4}\pi + \dfrac{24}{4}\pi$

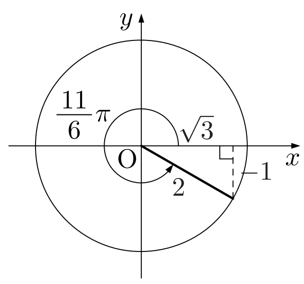
$= -\dfrac{3}{4}\pi + 6\pi$

$= -\dfrac{3}{4}\pi + 2\pi \times 3$



$\cos\dfrac{21}{4}\pi = \cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right) = \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

（6）



$\tan\dfrac{11}{6}\pi = \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

302　扇形の中心角を θ，弧の長さを l，面積を S とする．

（1）　$l = r\theta$

$= 5 \cdot \dfrac{\pi}{10} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

$S = \dfrac{1}{2}rl$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot \dfrac{\pi}{2} = \boldsymbol{\dfrac{5}{4}\pi}$

（2）$l = r\theta$ より，$\theta = \dfrac{l}{r}$ であるから

$\theta = \dfrac{l}{r} = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

$S = \dfrac{1}{2}rl$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \mathbf{6}$

303　（1）　左辺 $= \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta} - \frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin\theta + \sin^2\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \text{右辺}$$

（2）　左辺 $= \dfrac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$$- \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta\{(1+\cos\theta)-(1-\cos\theta)\}}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{2}{\tan\theta} = \text{右辺}$$

304　$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

$$= 1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 1-\frac{1}{16}$$

$$= \frac{15}{16}$$

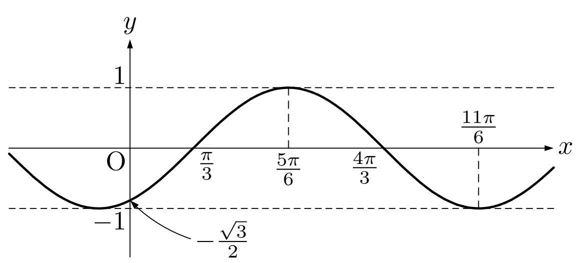
θ は第 3 象限の角なので，$\cos\theta < 0$

よって，$\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{15}{16}} = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$

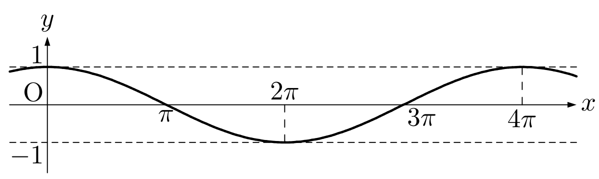
また，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{-\dfrac{1}{4}}{-\dfrac{\sqrt{15}}{4}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{15}}}$$

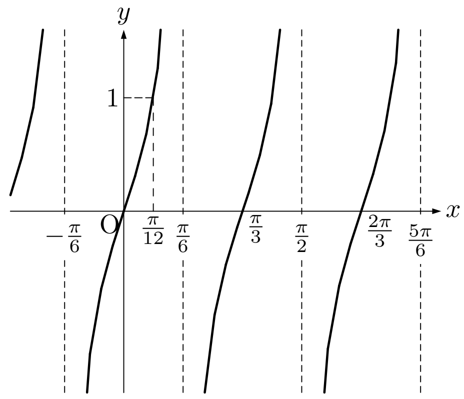
305　（1）　この関数のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ 平行移動したものだから，周期は $\boldsymbol{2\pi}$ であり，$x=0$ のとき，$y = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるので，グラフは次のようになる．



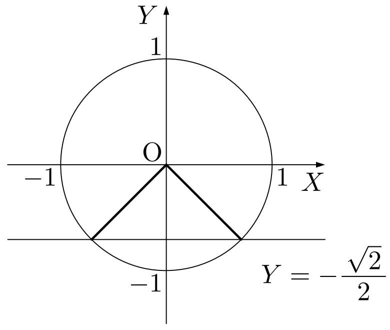
（2）　この関数のグラフは，$y = \cos x$ のグラフを x 軸方向に 2 倍に拡大したものだから，周期は $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{4\pi}$ であり，グラフは次のようになる．



（3）　この関数のグラフは，$y = \tan x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ 倍したものだから，周期は $\dfrac{\pi}{3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}\pi}$ であり，グラフは次のようになる．

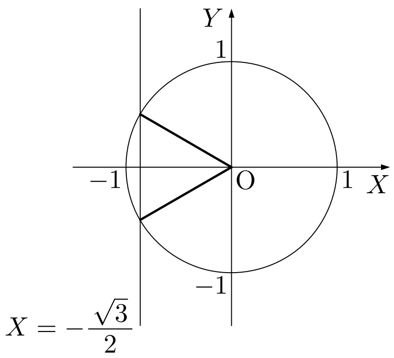


306　（1）



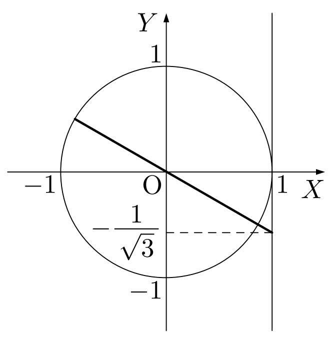
$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi}$

（2）　$2\cos x + \sqrt{3} = 0$ より，$\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



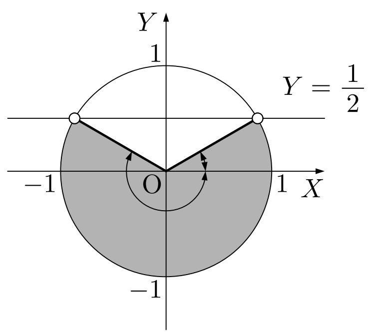
$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi}$

（3）　$3\tan x + \sqrt{3} = 0$ より，$\tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$

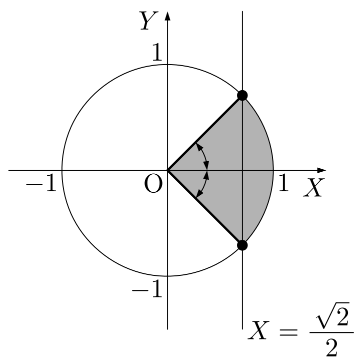
（4）　$2\sin x - 1 < 0$ より，$\sin x < \dfrac{1}{2}$



$0 \leqq x < 2\pi$ において，角 x の動経が影をつけた部分にあるのは

$$\mathbf{0 \leqq x < \frac{\pi}{6},\quad \frac{5}{6}\pi < x < 2\pi}$$

（5）

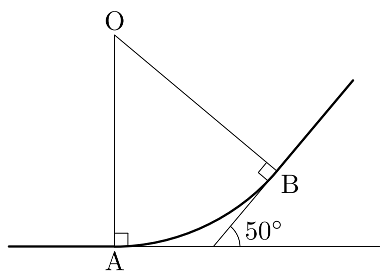


$0 \leqq x < 2\pi$ において，角 x の動経が影をつけた部分にあるのは

$$\mathbf{0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4},\quad \frac{7}{4}\pi \leqq x < 2\pi}$$

STEP UP

307　下の図で，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 100$，$\angle\mathrm{AOB} = 50^\circ = \dfrac{5}{18}\pi$

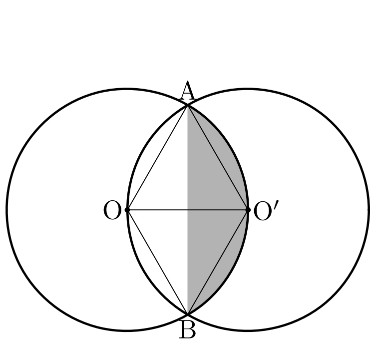


$\mathrm{OA} = r$ とすると，$r \cdot \dfrac{5}{18}\pi = 100$ より

$$\begin{aligned} r &= 100 \cdot \frac{18}{5\pi} \\ &= \frac{360}{\pi} \\ &= \frac{360}{3.14} = 114.64\cdots \end{aligned}$$

よって，円弧の半径は，約 **115 m**

308　図のように，2 つの円の中心を O，O′，2 つの円の交点を A，B とする．



$\mathrm{OA} = \mathrm{OO'} = \mathrm{O'A}$ であるから，$\triangle\mathrm{AOO'}$ は正三角形である．

よって，$\angle\mathrm{AOO'} = \dfrac{\pi}{3}$，したがって，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{2}{3}\pi$

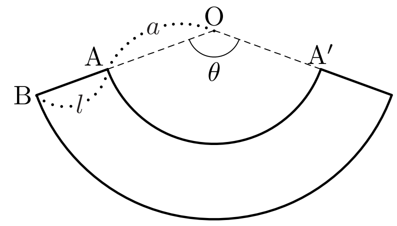
影をつけた弓形 ABO′ の面積は，求める面積の $\dfrac{1}{2}$ であり

$$\begin{aligned} \text{弓形 ABO'} &= \text{扇形 OAO'B} - \triangle\mathrm{OAB} \\ &= \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}a^2 \sin\frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{1}{3}\pi a^2 - \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{3}\pi a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}a^2 \end{aligned}$$

よって，求める面積は

$$\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}a^2 \times 2 = \mathbf{\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}a^2}$$

309　この直円錐台の側面の展開図において，下の図のように頂点を定め，$\mathrm{OA} = a$，$\angle\mathrm{AOA'} = \theta$ とする．



$\overset{\frown}{\mathrm{AA'}} = a\theta = 2\pi r_1 \quad \cdots①$ より

$$\begin{aligned} \text{扇形 OAA'} &= \frac{1}{2}a^2\theta \\ &= \frac{1}{2}a \cdot a\theta \\ &= \frac{1}{2}a \cdot 2\pi r_1 = \pi a r_1 \end{aligned}$$

$\overset{\frown}{\mathrm{BB'}} = (a+l)\theta = 2\pi r_2 \quad \cdots②$ より

$$\begin{aligned} \text{扇形 OBB'} &= \frac{1}{2}(a+l)^2\theta \\ &= \frac{1}{2}(a+l) \cdot (a+l)\theta \\ &= \frac{1}{2}(a+l) \cdot 2\pi r_2 = \pi(a+l)r_2 \end{aligned}$$

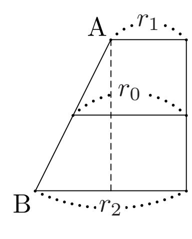
また，$a \fallingdotseq 0$ であるから，① より，$\theta = \dfrac{2\pi r_1}{a}$

$a + l \fallingdotseq 0$ であるから，② より，$\theta = \dfrac{2\pi r_2}{a+l}$

よって，$\dfrac{2\pi r_1}{a} = \dfrac{2\pi r_2}{a+l}$

$$\begin{aligned} (a+l)r_1 &= ar_2 \\ a(r_2 - r_1) &= lr_1 \\ a &= \frac{r_1}{r_2 - r_1}l \quad \cdots③ \end{aligned}$$

また，見取り図より，r_1，r_2，r_0 の関係は，$(r_0 - r_1) : (r_2 - r_1) = 1 : 2$ となるので



$$2(r_0 - r_1) = r_2 - r_1$$

すなわち，$2r_0 = r_1 + r_2 \cdots④$

以上より

$$\begin{aligned} S &= \text{扇形 OBB'} - \text{扇形 OAA'} \\ &= \pi(a+l)r_2 - \pi a r_1 \\ &= \pi\{(a+l)r_2 - ar_1\} \\ &= \pi\{a(r_2 - r_1) + lr_2\} \end{aligned}$$

③ を代入して

$$\begin{aligned} S &= \pi\left\{\frac{r_1}{r_2 - r_1}l \cdot (r_2 - r_1) + lr_2\right\} \\ &= \pi(lr_1 + lr_2) \\ &= \pi l(r_1 + r_2) \\ &= \pi l \cdot 2r_0 \quad (④より) \\ &= 2\pi r_0 l \end{aligned}$$

310　この扇形の半径を r，面積を S とすれば，弧の長さは $12-2r$ であるから，$S=\dfrac{1}{2}r(12-2r)=-r^2+6r$，ただし，$0<r<6$

ここで

$$S=-(r^2-6r)$$
$$=-(r-3)^2+9$$

よって，$r=3$，すなわち**半径が 3 のとき**，S は最大値をとる．

311（1）　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺を 2 乗すると

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{2}$$
$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$
$$2\sin\theta\cos\theta+1=\frac{1}{2}$$
$$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$$
$$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

（2）　与式 $=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{4\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{8}}$$

（3）　与式 $=\dfrac{\cos^4\theta+\sin^4\theta}{\sin^4\theta\cos^4\theta}$

$$=\frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^4}$$
$$=\frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2(\sin\theta\cos\theta)^2}{(\sin\theta\cos\theta)^4}$$
$$=\frac{1^2-2(\sin\theta\cos\theta)^2}{(\sin\theta\cos\theta)^4}$$
$$=\frac{1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(-\frac{1}{4}\right)^4}$$
$$=\frac{1-\frac{1}{8}}{\frac{1}{256}}=\frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{256}}=\mathbf{224}$$

312　2 次方程式の解と係数の関係より

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{-2}{3}=\dfrac{2}{3} & \cdots① \\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{3} & \cdots②\end{cases}$$

① の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$$
$$2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}-1=-\frac{5}{9}$$

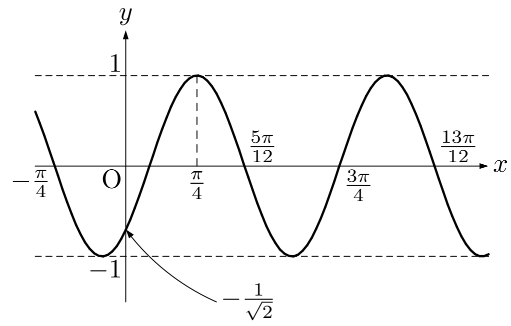
よって，$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{5}{18}$

これを ② に代入して

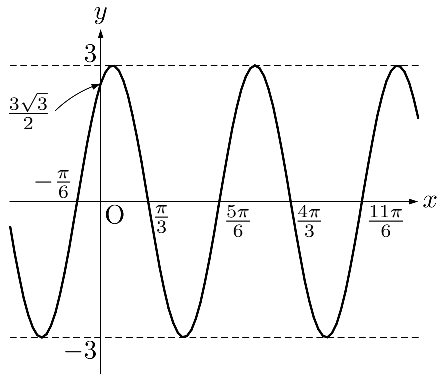
$$-\frac{5}{18}=\frac{k}{3}$$

したがって，$k=-\dfrac{5}{18}\cdot3=\boldsymbol{-\frac{5}{6}}$

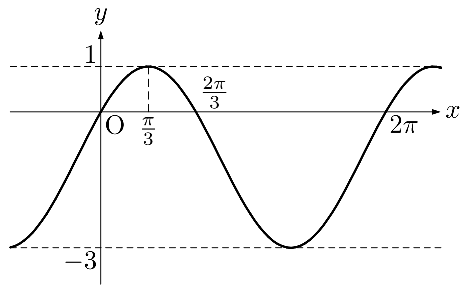
313（1）　$y=\cos\left\{3\left(x-\dfrac{1}{4}\pi\right)\right\}$ であるから，この関数のグラフは，$y=\cos3x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{4}$ 平行移動したものである．周期は $2\pi\cdot\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$ であり，$x=0$ のとき，$y=\cos\left(-\dfrac{3}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるので，グラフは次のようになる．



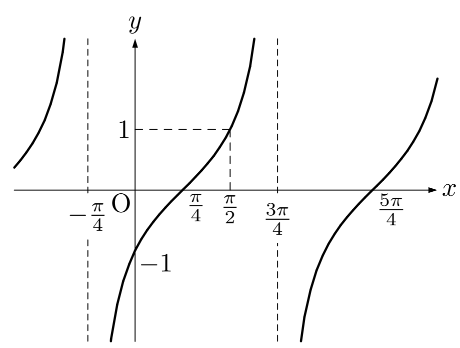
（2）　$y=3\sin\left\{2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ であるから，この関数のグラフは，$y=3\sin2x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ 平行移動したものである．周期は $2\pi\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\pi}$ であり，$x=0$ のとき，$y=3\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ となるので，グラフは次のようになる．



（3）　この関数のグラフは，$y=2\cos x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$，y 軸方向に -1 平行移動したものである．周期は $\boldsymbol{2\pi}$ であり，$x=0$ のとき，$y=2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)-1=2\cdot\dfrac{1}{2}-1=0$ となるので，グラフは次のようになる．



（4）　この関数のグラフは，$y=\tan x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{4}$ 平行移動したものだから，周期は $\boldsymbol{\pi}$ であり，$x=0$ のとき，$y=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ となるので，グラフは次のようになる．



314（1）　$x+\dfrac{\pi}{3}=X$ とおくと，$2\cos X=\sqrt{3}$

すなわち，$\cos X=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<2\pi+\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\frac{\pi}{3}\leqq X<\frac{7}{3}\pi$$

よって，$X=\dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$

$x=X-\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$X=\dfrac{11}{6}\pi$ のとき，$x=\dfrac{11}{6}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi$

$X = \dfrac{13}{6}\pi$ のとき，$x = \dfrac{13}{6}\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{11}{6}\pi$

したがって，$\boldsymbol{x = \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$

（2）　$2x = X$ とおくと，$\sin X = \dfrac{1}{2}$

$-\pi < x \leqq \pi$ より，$-2\pi < 2x \leqq 2\pi$ であるから

$-2\pi < X \leqq 2\pi$

よって，$X = -\dfrac{11}{6}\pi,\ -\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$x = \dfrac{1}{2}X$ であるから

$X = -\dfrac{11}{6}\pi$ のとき，$x = -\dfrac{11}{12}\pi$

$X = -\dfrac{7}{6}\pi$ のとき，$x = -\dfrac{7}{12}\pi$

$X = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$x = \dfrac{\pi}{12}$

$X = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき，$x = \dfrac{5}{12}\pi$

したがって，$\boldsymbol{x = -\dfrac{11}{12}\pi,\ -\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{5}{12}\pi}$

（3）　$2x - \dfrac{\pi}{6} = X$ とおくと，$2\sin X = 1$

すなわち，$\sin X = \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{6} \leqq 2x - \dfrac{\pi}{6} < 4\pi - \dfrac{\pi}{6}$ であるから

$-\dfrac{\pi}{6} \leqq X < \dfrac{23}{6}\pi$

よって，$X = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi,\ \dfrac{17}{6}\pi$

$x = \dfrac{1}{2}X + \dfrac{\pi}{12}$ であるから

$X = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$

$X = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき，$x = \dfrac{5}{12}\pi + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2}$

$X = \dfrac{13}{6}\pi$ のとき，$x = \dfrac{13}{12}\pi + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{7}{6}\pi$

$X = \dfrac{17}{6}\pi$ のとき，$x = \dfrac{17}{12}\pi + \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{3}{2}\pi$

したがって，$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$

315　（1）　$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ であるから，方程式は

$2(1 - t^2) + 3t + 3 = 0$

$2 - 2t^2 + 3t + 3 = 0$

$\boldsymbol{2t^2 - 3t - 5 = 0}$

（2）　$0 \leqq x < 2\pi$ より，$-1 \leqq \sin x \leqq 1$

すなわち，$-1 \leqq t \leqq 1 \cdots$①

$2t^2 - 3t - 5 = 0$ を解くと

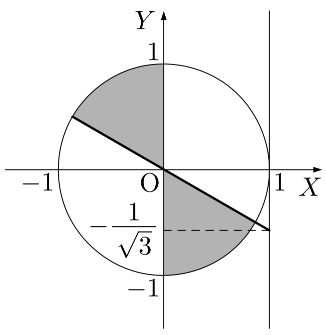
$(2t - 5)(t + 1) = 0$　　　$t = \dfrac{5}{2},\ -1$

① より，$t = -1$

よって，$\sin x = -1$ であるから，$\boldsymbol{x = \dfrac{3}{2}\pi}$

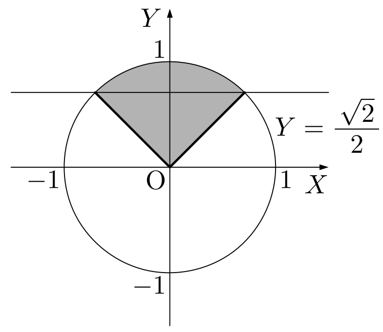
316　2 式を上から ①，② とする．

（1）　① より，$\tan x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから



$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5}{6}\pi,\quad \dfrac{3}{2}\pi < x < \dfrac{11}{6}\pi \quad \cdots$③

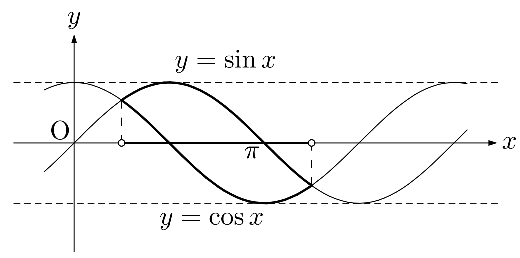
② より，$\sin x \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから



$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}\pi \quad \cdots$④

求める解は ③，④ の共通部分だから，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2} < x \leqq \dfrac{3}{4}\pi}$

（2）　下のグラフを利用して ① を解くために，$\sin x = \cos x$ となる x を求める．



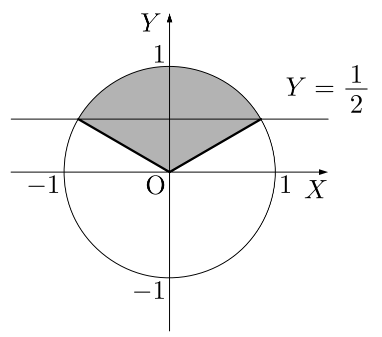
$\sin x = \cos x$ のとき，$\cos x \neq 0$ であるから

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$，すなわち，$\tan x = 1$

よって，$0 \leqq x < 2\pi$ において，$x = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

したがって，① の解は，$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{5}{4}\pi\ \cdots$③

② より，$\sin x \geqq \dfrac{1}{2}$ であるから



$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi \quad \cdots$④

求める解は ③，④ の共通部分だから，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} < x \leqq \dfrac{5}{6}\pi}$

① の〔別解〕

i) $\cos x > 0$，すなわち $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi < x < 2\pi \cdots$⑤ のとき

$\dfrac{\sin x}{\cos x} > 1$ であるから，$\tan x > 1$

これを解いて，$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi$

これと ⑤ より，$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2} \cdots$⑥

ii) $\cos x < 0$，すなわち $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi \cdots$⑦ のとき

$\dfrac{\sin x}{\cos x} < 1$ であるから，$\tan x < 1$

これを解いて，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

これと ⑦ より，$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5}{4}\pi \cdots$⑧

iii) $\cos x = 0$，すなわち $x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$\sin x > 0$ より, $0 < x < \pi$ であるから, $x = \dfrac{\pi}{2} \cdots ⑨$

⑥, ⑧, ⑨ より, $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{5}{4}\pi$

① の〔**別解**〕　三角関数の合成を利用

① より, $\sin x - \cos x > 0$

左辺 $= \sqrt{1^2 + (-1)^2}\sin(x + \alpha) = \sqrt{2}\sin(x + \alpha)$

ここで, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より, $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$

よって, $\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$, すなわち, $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) > 0$ となる.

ここで, $x - \dfrac{\pi}{4} = X$ とおくと, $\sin X > 0 \quad \cdots ①'$

$0 \leqq x < 2\pi$ より, $-\dfrac{\pi}{4} \leqq x - \dfrac{\pi}{4} < 2\pi - \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq X < \dfrac{7}{4}\pi$

よって, ①′ の解は, $0 < X < \pi$ となるので

$0 < x - \dfrac{\pi}{4} < \pi$

$\dfrac{\pi}{4} < x < \pi + \dfrac{\pi}{4}$

したがって, $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{5}{4}\pi$

317 (1)　$\sin x = \tan x \cos x$ であるから

$\tan x \cos x \leqq \tan x$

$\tan x \cos x - \tan x \leqq 0$

$\tan x(\cos x - 1) \leqq 0$

ここで, $\cos x \leqq 1$ より, $\cos x - 1 \leqq 0$

よって, $\tan x \geqq 0$ であるから

$\boldsymbol{0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2},\ \pi \leqq x < \dfrac{3}{2}\pi}$

(2)　$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ であるから

$2(1 - \sin^2 x) - \sin x \leqq 1$

$2 - 2\sin^2 x - \sin x \leqq 1$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 \geqq 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) \geqq 0$

$\sin x \leqq -1,\ \dfrac{1}{2} \leqq \sin x$

ここで, $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから, $\sin x = -1$ または, $\sin x \geqq \dfrac{1}{2}$

よって, $\boldsymbol{x = \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{\pi}{6} \leqq x < \dfrac{5}{6}\pi}$

(3)　$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ であるから

$4(1 - \cos^2 x) + 4\cos x < 1$

$4 - 4\cos^2 x + 4\cos x < 1$

$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 > 0$

$(2\cos x + 1)(2\cos x - 3) > 0$

$\cos x < -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2} < \cos x$

ここで, 常に $2\cos x - 3 < 0$ であるから, $2\cos x + 1 < 0$

よって, $\cos x < -\dfrac{1}{2}$ より, $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi < x < \dfrac{4}{3}\pi}$

318 (1)　$\boldsymbol{y = t^2 - t - 1}$

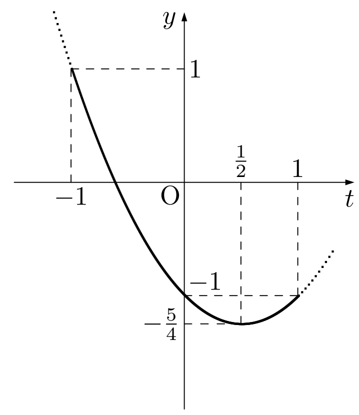
ただし, $0 \leqq x < 2\pi$ より, $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから, $\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 1}$

この式を標準形に変形すると

$y = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - 1$

$= \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}$

よって, グラフは図のようになる.



(2)　$t = -1$ のとき, y は最大値 1 をとる.

このとき, $\sin x = -1\ (0 \leqq x < 2\pi)$ であるから, $x = \dfrac{3}{2}\pi$

$t = \dfrac{1}{2}$ のとき, y は最小値 $-\dfrac{5}{4}$ をとる.

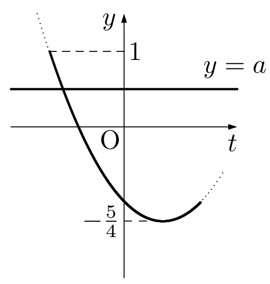
このとき, $\sin x = \dfrac{1}{2}\ (0 \leqq x < 2\pi)$ であるから, $x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

以上より

最大値　**1**　$\boldsymbol{\left(x = \dfrac{3}{2}\pi\right)}$

最小値　$\boldsymbol{-\dfrac{5}{4}}$　$\boldsymbol{\left(x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi\right)}$

(3)



$y = t^2 - t - 1\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ のグラフと, 直線 $y = a$ のグラフが共有点をもてばよいので, $\boldsymbol{-\dfrac{5}{4} \leqq a \leqq 1}$