5章　三角関数

§3　加法定理とその応用　(p.63〜p.67)

BASIC

319

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$$
$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ)$$
$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ)$$
$$= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$$
$$= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{(1-3}$$
$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = \boldsymbol{-2-\sqrt{3}}$$

〔別解〕

$$\tan 105^\circ = \frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ}$$
$$= \frac{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$
$$= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$$
$$= \frac{2+2\sqrt{12}+6}{2-6}$$
$$= \frac{8+4\sqrt{3}}{-4} = \boldsymbol{-2-\sqrt{3}}$$

320

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\theta\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}$$

321　α は第 3 象限の角なので，$\cos\alpha < 0$ であるから

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

β は第 4 象限の角なので，$\sin\beta < 0$ であるから

$$\sin\beta = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

（1）与式 $= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{14}}{12}$$
$$= \boldsymbol{\frac{-3+2\sqrt{14}}{12}}$$

（2）与式 $= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= -\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{1}{3} - \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{7}}{12} - \frac{6\sqrt{2}}{12}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}}$$

322

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{-2+\dfrac{1}{5}}{1-(-2)\cdot\dfrac{1}{5}}$$
$$= \frac{-\dfrac{9}{5}}{1+\dfrac{2}{5}} = \frac{-\dfrac{9}{5}}{\dfrac{7}{5}} = \boldsymbol{-\frac{9}{7}}$$

323　α は第 2 象限の角なので，$\cos\alpha < 0$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

よって，

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= 2\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$$
$$= \boldsymbol{-\frac{4\sqrt{21}}{25}}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$= 1 - 2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{8}{25} = \boldsymbol{\frac{17}{25}}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\dfrac{4\sqrt{21}}{25}}{\dfrac{17}{25}}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{4\sqrt{21}}{17}}$$

324

$$\tan^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{1+\cos\dfrac{\pi}{6}} = \frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$
$$= \frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3} = (2-\sqrt{3})^2$$

$\tan\dfrac{\pi}{12} > 0$ であるから，

$$\tan\frac{\pi}{12} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$$
$$= \left|2-\sqrt{3}\right|$$
$$= \boldsymbol{2-\sqrt{3}}$$

325　$\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ より，$\dfrac{3\pi}{4} < \dfrac{\alpha}{2} < \pi \cdots$①

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\dfrac{1}{4}}{2}$$
$$= \frac{\dfrac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}$$

① より，$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$ であるから

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3}{8}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+\frac{1}{4}}{2}$$
$$=\frac{\frac{5}{4}}{2}=\frac{5}{8}$$

① より，$\cos\dfrac{\alpha}{2}<0$ であるから，

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{5}{8}}$$
$$=-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{10}}{4}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{-\frac{\sqrt{10}}{4}}$$
$$=-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{15}}{5}}$$

326　（1）与式 $=\dfrac{1}{2}\{\sin(4\theta+\theta)-\sin(4\theta-\theta)\}$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(\sin 5\theta-\sin 3\theta)}$$

（2）与式 $=-\dfrac{1}{2}\{\cos(3\theta+7\theta)-\cos(3\theta-7\theta)\}$

$$=-\frac{1}{2}\{\cos 10\theta-\cos(-4\theta)\}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}(\cos 10\theta-\cos 4\theta)}$$

（3）与式 $=\dfrac{1}{2}\{\cos(5\theta+2\theta)+\cos(5\theta-2\theta)\}$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(\cos 7\theta+\cos 3\theta)}$$

（4）与式 $=\dfrac{1}{2}\{\sin(3\theta+2\theta)+\sin(3\theta-2\theta)\}$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(\sin 5\theta+\sin\theta)}$$

327　（1）与式 $=2\cos\dfrac{5\theta+3\theta}{2}\sin\dfrac{5\theta-3\theta}{2}$

$$=\boldsymbol{2\cos 4\theta\sin\theta}$$

（2）与式 $=-2\sin\dfrac{2\theta+4\theta}{2}\sin\dfrac{2\theta-4\theta}{2}$

$$=-2\sin 3\theta\sin(-\theta)$$
$$=\boldsymbol{2\sin 3\theta\sin\theta}$$

（3）与式 $=2\cos\dfrac{\theta+5\theta}{2}\cos\dfrac{\theta-5\theta}{2}$

$$=2\cos 3\theta\cos(-2\theta)$$
$$=\boldsymbol{2\cos 3\theta\cos 2\theta}$$

（4）与式 $=2\sin\dfrac{\theta+3\theta}{2}\cos\dfrac{\theta-3\theta}{2}$

$$=2\sin 2\theta\cos(-\theta)$$
$$=\boldsymbol{2\sin 2\theta\cos\theta}$$

328　（1）$y=\sqrt{1^2+(-1)^2}\sin(x+\alpha)$

$$=\sqrt{2}\sin(x+\alpha)$$

ここで，

$\sin\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$

よって，

$$\boldsymbol{y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

（2）$y=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}\sin(x+\alpha)$

$$=\sqrt{12}\sin(x+\alpha)$$
$$=2\sqrt{3}\sin(x+\alpha)$$

ここで，

$\sin\alpha=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$ より，$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

よって，

$$\boldsymbol{y=2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

329　$y=\sqrt{5^2+(-2)^2}\sin(x+\alpha)$

$$=\sqrt{29}\sin(x+\alpha)$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$，$\sin\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{29}}$

ここで，$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$ であるから，

$$-\sqrt{29}\leqq\sqrt{29}\sin(x+\alpha)\leqq\sqrt{29}$$

すなわち，$-\sqrt{29}\leqq y\leqq\sqrt{29}$ であるから

最大値　$\boldsymbol{\sqrt{29}}$，　**最小値**　$\boldsymbol{-\sqrt{29}}$

CHECK

330　α は第 2 象限の角なので，$\cos\alpha<0$ であるから

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$$

β は第 2 象限の角なので，$\sin\beta>0$ であるから

$$\sin\beta=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

（1）与式 $=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}$$
$$=-\frac{2\sqrt{2}}{15}-\frac{\sqrt{7\cdot(7\cdot 3)}}{15}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{15}}$$

（2）与式 $=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)+\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}$$
$$=\frac{2\sqrt{7}}{15}+\frac{\sqrt{42}}{15}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{42}}{15}}$$

331　与式 $=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{1}{4}+(-3)}{1-\frac{1}{4}\cdot(-3)}$$
$$=\frac{-\frac{11}{4}}{\frac{7}{4}}=\boldsymbol{-\frac{11}{7}}$$

332　$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

（1）　与式 $= 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$= 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \boldsymbol{\frac{24}{25}}$$

（2）　与式 $= 2\cos^2\alpha - 1$

$$= 2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{32}{25} - 1 = \boldsymbol{\frac{7}{25}}$$

（3）　与式 $= \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$= \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \boldsymbol{\frac{24}{7}}$$

（4）　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

$$= \frac{1-\frac{4}{5}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{2} = \frac{1}{10}$$

ここで，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ であるから，$\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$

よって，与式 $= \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$

（5）　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

$$= \frac{1+\frac{4}{5}}{2}$$

$$= \frac{\frac{9}{5}}{2} = \frac{9}{10}$$

ここで，$0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ であるから，$\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$

よって，与式 $= \boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$

（6）　与式 $= \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

333　α は第 2 象限の角なので，$\cos\alpha < 0$ であるから

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

β は第 3 象限の角なので，$\sin\beta < 0$ であるから

$$\sin\beta = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

（1）与式 $= \sin 2\alpha\cos\beta + \cos 2\alpha\sin\beta$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\beta$$

$$= 2\cdot\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{5}{9}-\frac{4}{9}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{16\sqrt{5}}{45} + \frac{-3}{45} = \boldsymbol{\frac{16\sqrt{5}-3}{45}}$$

（2）与式 $= \cos 2\alpha\cos\beta - \sin 2\alpha\sin\beta$

$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta$$

$$= \left(\frac{5}{9}-\frac{4}{9}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) - 2\cdot\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= -\frac{4}{45} - \frac{12\sqrt{5}}{45} = \boldsymbol{-\frac{4+12\sqrt{5}}{45}}$$

334　左辺 $= \dfrac{1+2\sin x\cos x - (1-2\sin^2 x)}{1+2\sin x\cos x + (2\cos^2 x - 1)}$

$$= \frac{2\sin x\cos x + 2\sin^2 x}{2\sin x\cos x + 2\cos^2 x}$$

$$= \frac{2\sin x(\cos x + \sin x)}{2\cos x(\sin x + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \text{右辺}$$

335　（1）与式 $= 2\cdot\dfrac{1}{2}[\sin\{(\theta+120^\circ)+(30^\circ-\theta)\}$

$$+\sin\{(\theta+120^\circ)-(30^\circ-\theta)\}]$$

$$= \sin 150^\circ + \sin(2\theta+90^\circ)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2} + \cos 2\theta}$$

（2）与式 $= \dfrac{1}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{2\theta+3\pi}{4}+\dfrac{2\theta-3\pi}{4}\right)\right.$

$$\left. + \cos\left(\frac{2\theta+3\pi}{4}-\frac{2\theta-3\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{4\theta}{4} + \cos\frac{6\pi}{4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\cos\theta + \cos\frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos\theta + 0\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\cos\theta}$$

336　（1）与式 $= 2\sin\dfrac{100^\circ+40^\circ}{2}\cos\dfrac{100^\circ-40^\circ}{2}$

$$= 2\sin 70^\circ\cos 30^\circ$$

$$= 2\sin 70^\circ\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}\sin 70^\circ}$$

（2）与式 $= -2\sin\dfrac{100^\circ+20^\circ}{2}\sin\dfrac{100^\circ-20^\circ}{2}$

$$= -2\sin 60^\circ\sin 40^\circ$$

$$= -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}^{\circ}\sin 40^\circ = \boldsymbol{-\sqrt{3}\sin 40^\circ}$$

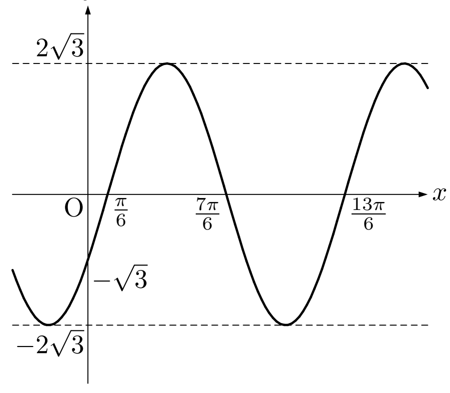
337　（1）$y = \sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}\sin(x+\alpha)$

$$= 2\sqrt{3}\sin(x+\alpha)$$

ここで，$\cos\alpha = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2}$ より，$\alpha = -\dfrac{\pi}{6}$

よって，$\boldsymbol{y = 2\sqrt{3}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)}$

この関数のグラフは，$y = 2\sqrt{3}\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ 平行移動したもので，$x = 0$ のとき，$y = 2\sqrt{3}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$ であるから，グラフは次のようになる．



（2）$y = \sqrt{1^2+(-1)^2}\sin(x+\alpha)$

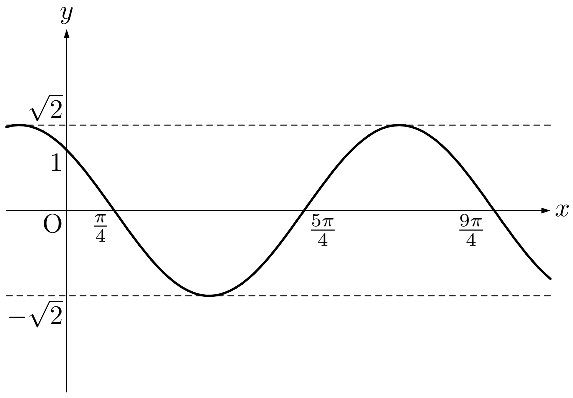
$$= \sqrt{2}\sin(x+\alpha)$$

ここで，$\cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，

$\alpha = \dfrac{3}{4}\pi$

よって，$\boldsymbol{y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{3}{4}\pi\right)}$

この関数のグラフは，$y = \sqrt{2}\sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{3}{4}\pi$ 平行移動したもので，$x = 0$ のとき，$y = \sqrt{2}\sin\dfrac{3}{4}\pi = 1$ であるから，グラフは次のようになる．



STEP UP

338 （1）左辺 $= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= 1\cdot\cos 2\theta = \cos 2\theta =$ 右辺

（2）左辺 $= \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$

$= \dfrac{\dfrac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}}{\dfrac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}}$

$= \dfrac{\dfrac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}}{\dfrac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}} = \dfrac{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}} =$ 右辺

339 （1）与式 $= (\sin 10^\circ \sin 50^\circ)\sin 70^\circ$

$= -\dfrac{1}{2}\{\cos(10^\circ + 50^\circ) - \cos(10^\circ - 50^\circ)\}\sin 70^\circ$

$= -\dfrac{1}{2}\{\cos 60^\circ - \cos(-40^\circ)\}\sin 70^\circ$

$= -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \cos 40^\circ\right)\sin 70^\circ$

$= -\dfrac{1}{4}\sin 70^\circ + \dfrac{1}{2}\cos 40^\circ \sin 70^\circ$

$= -\dfrac{1}{4}\sin 70^\circ$

$\quad + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\{\sin(40^\circ + 70^\circ) - \sin(40^\circ - 70^\circ)\}$

$= -\dfrac{1}{4}\sin 70^\circ + \dfrac{1}{4}\{\sin 110^\circ - \sin(-30^\circ)\}$

$= -\dfrac{1}{4}\sin 70^\circ + \dfrac{1}{4}\{\sin 110^\circ + \sin 30^\circ\}$

$= -\dfrac{1}{4}\sin 70^\circ + \dfrac{1}{4}\sin 110^\circ + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}$

$= -\dfrac{1}{4}\sin 70^\circ + \dfrac{1}{4}\sin 70^\circ + \dfrac{1}{8} = \boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

（2）与式 $= (\sin 80^\circ - \sin 20^\circ) - \sin 40^\circ$

$= 2\cos\dfrac{80^\circ + 20^\circ}{2}\sin\dfrac{80^\circ - 20^\circ}{2} - \sin 40^\circ$

$= 2\cos 50^\circ \sin 30^\circ - \sin 40^\circ$

$= 2\cos 50^\circ \cdot \dfrac{1}{2} - \sin 40^\circ$

$= \cos 50^\circ - \sin 40^\circ$

$= \sin 40^\circ - \sin 40^\circ = \boldsymbol{0}$

340 （1）　左辺 $= 1 - 2\sin^2 x$ であるから

$1 - 2\sin^2 x = \sin x$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

よって，$\sin x = \dfrac{1}{2}$，-1

$0 \leqq x, 2\pi$ より，$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{3}{2}\pi}$

（2）　左辺 $= 2\sin x\cos x$ であるから

$2\sin x\cos x \geqq \sqrt{3}\cos x$

$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x \geqq 0$

$\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) \geqq 0$

よって

$\begin{cases}\cos x \geqq 0\\ 2\sin x - \sqrt{3} \geqq 0\end{cases}$ または，$\begin{cases}\cos x \leqq 0\\ 2\sin x - \sqrt{3} \leqq 0\end{cases}$

i）$\begin{cases}\cos x \geqq 0 & \cdots ①\\ 2\sin x - \sqrt{3} \geqq 0 & \cdots ②\end{cases}$ のとき

① より，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi \leqq x < 2\pi \cdots ③$

② より，$\sin x \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi \cdots ④$

③，④ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$

ii）$\begin{cases}\cos x \leqq 0 & \cdots ⑤\\ 2\sin x - \sqrt{3} \leqq 0 & \cdots ⑥\end{cases}$ のとき

⑤ より，$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi \cdots ⑦$

⑥ より，$\sin x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq x < 2\pi \cdots ⑧$

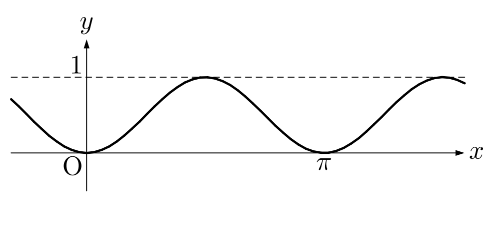
⑦，⑧ より，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$

i），ii）より，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2}{3}\pi \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi}$

341 （1）　$y = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$= -\dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}$

この関数のグラフは，$y = \cos x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍，y 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$ 倍したものを，y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 平行移動したもので，$x = 0$ のとき，$y = -\dfrac{1}{2}\cos 0 + \dfrac{1}{2} = 0$ であるから，グラフは次のようになる．



（2）　$y = 2\cos\dfrac{x + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2}\cos\dfrac{x - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2}$

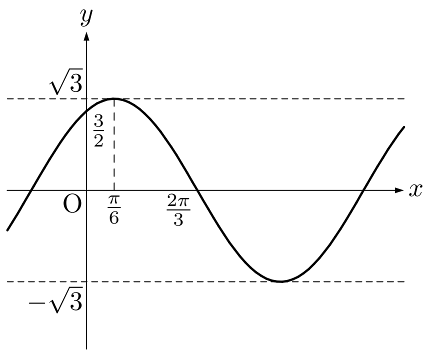
$= 2\cos\dfrac{2x - \frac{\pi}{3}}{2}\cos\dfrac{\frac{\pi}{3}}{2}$

$= 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\dfrac{\pi}{6}$

$= 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{3}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

この関数のグラフは，$y = \cos x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ 平行移動し，y 軸方向に $\sqrt{3}$ 倍したもので，$x = 0$ のとき，$y = \sqrt{3}\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}$ であるから，グラフは次のようになる．



〔別解〕

$y = \cos x + \cos x\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin x\sin\dfrac{\pi}{3}$

$= \cos x + \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$= \dfrac{3}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$= \dfrac{1}{2}(3\cos x + \sqrt{3}\sin x)$

$= \dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}\sin(x + \alpha)\right\}$

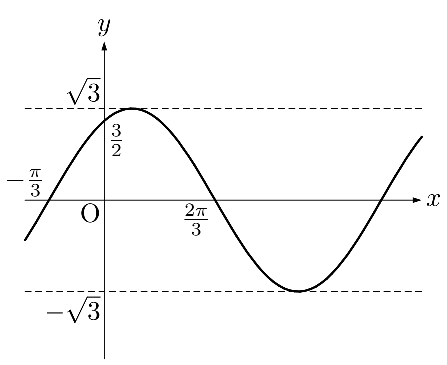
$= \dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{12}\sin(x + \alpha)\right\}$

$= \sqrt{3}\sin(x + \alpha)$

ここで，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$，　$\sin\alpha = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$y = \sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

この関数のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{3}$ 平行移動し，y 軸方向に $\sqrt{3}$ 倍したもので，$x = 0$ のとき，$y = \sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}$ であるから，グラフは次のようになる．

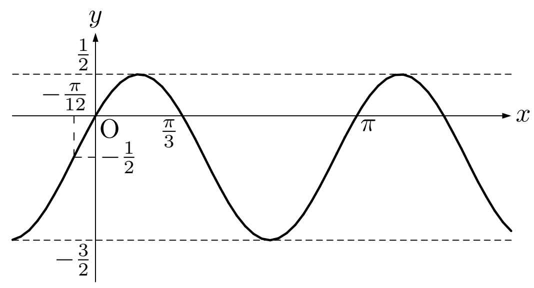


（3）　$y = 2\cdot\dfrac{1}{2}\left\{\sin\left(x + x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$= \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\left\{2\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right)\right\} - \dfrac{1}{2}$

この関数のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍し，x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{12}$，y 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$ 平行移動したもので，$x = 0$ のとき，$y = \sin\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{2} = 0$ であるから，グラフは次のようになる．



（4）　$y = 2\sin x + \cos x\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{6}$

$= 2\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x$

$= \dfrac{3}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$= \dfrac{1}{2}(3\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

$= \dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}\sin(x + \alpha)\right\}$

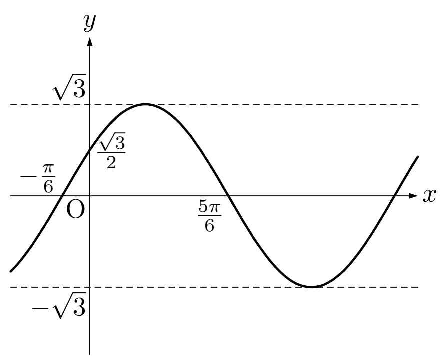
$= \dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{12}\sin(x + \alpha)\right\}$

$= \sqrt{3}\sin(x + \alpha)$

ここで，$\cos\alpha = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ であるから

$y = \sqrt{3}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

この関数のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ 平行移動し，y 軸方向に $\sqrt{3}$ 倍したもので，$x = 0$ のとき，$y = \sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，グラフは次のようになる．



342　左辺 $= 2\sin\dfrac{2A + 2B}{2}\cos\dfrac{2A - 2B}{2}$

$= 2\sin(A + B)\cos(A - B)$

ここで，$A + B + C = \pi$ より，$A + B = \pi - C$ であるから

左辺 $= 2\sin(\pi - C)\cos(A - B) = 2\sin C\cos(A - B)$

よって，与えられた等式は，$2\sin C\cos(A - B) = 2\sin C$ となるから

$\sin C\cos(A - B) - \sin C = 0$

$\sin C\{\cos(A - B) - 1\} = 0$

$0 < C < \pi$ より，$\sin C \fallingdotseq 0$ であるから，$\cos(A - B) = 1$

$-\pi < A - B < \pi$ より，$A - B = 0$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は，$\boldsymbol{A = B}$（$\mathrm{AC} = \mathrm{BC}$）**の二等辺三角形**である．

343　（1）　$\sin 3x - \sin x = 0$

$2\cos\dfrac{3x+x}{2}\sin\dfrac{3x-x}{2}=0$

$\cos 2x\sin x=0$

よって，$\cos 2x=0$，または $\sin x=0$

i) $\cos 2x=0$ のとき

$0\leqq x<2\pi$ より，$0\leqq 2x<4\pi$

よって，$2x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$

これより，$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

ii) $\sin x=0$ のとき

$0\leqq x<2\pi$ より

$x=0,\ \pi$

i), ii) より，$\boldsymbol{x=0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi}$

（2）左辺 $=2\sin\dfrac{x+3x}{2}\cos\dfrac{x-3x}{2}$

$=2\sin 2x\cos(-x)=2\sin 2x\cos x$

右辺 $=2\sin\dfrac{2x+4x}{2}\cos\dfrac{2x-4x}{2}$

$=2\sin 3x\cos(-x)=2\sin 3x\cos x$

よって，$2\sin 2x\cos x=2\sin 3x\cos x$

$\cos x(\sin 3x-\sin 2x)=0$

$\cos x\cdot 2\cos\dfrac{3x+2x}{2}\sin\dfrac{3x-2x}{2}=0$

$\cos x\ \cos\dfrac{5}{2}x\ \sin\dfrac{x}{2}=0$

よって，$\cos x=0$，または $\cos\dfrac{5}{2}x=0$，または $\sin\dfrac{x}{2}=0$

i) $\cos x=0$ のとき

$0\leqq x<2\pi$ より，$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

ii) $\cos\dfrac{5}{2}x=0$ のとき

$0\leqq x<2\pi$ より，$0\leqq\dfrac{5}{2}x<5\pi$

よって，$\dfrac{5}{2}x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi$

これより，$x=\dfrac{\pi}{5},\ \dfrac{3}{5}\pi,\ \pi,\ \dfrac{7}{5}\pi,\ \dfrac{9}{5}\pi$

iii) $\sin\dfrac{x}{2}=0$ のとき

$0\leqq x<2\pi$ より，$0\leqq\dfrac{x}{2}<\pi$

よって，$\dfrac{x}{2}=0$，これより，$x=0$

i), ii), iii) より

$\boldsymbol{x=0,\ \dfrac{\pi}{5},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{5}\pi,\ \pi,\ \dfrac{7}{5}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{9}{5}\pi}$

（3）左辺 $=(\cos x+\cos 3x)+\cos 2x$

$=2\cos\dfrac{x+3x}{2}\cos\dfrac{x-3x}{2}+\cos 2x$

$=2\cos 2x\ \cos(-x)+\cos 2x$

$=2\cos 2x\ \cos x+\cos 2x$

$=\cos 2x(2\cos x+1)$

よって，$\cos 2x(2\cos x+1)=0$ であるから

$\cos 2x=0$，または $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

i) $\cos 2x=0$ のとき

$0\leqq x<2\pi$ より，$0\leqq 2x<4\pi$

よって，$2x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$

これより，$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

ii) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ のとき

$0\leqq x<2\pi$ より，$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

i), ii) より，$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi}$

344　左辺 $=(\sin\alpha+\sin\beta)+\sin\gamma$

$=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma$

ここで，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ より，$\alpha+\beta=\pi-\gamma$

また，$\sin\gamma=2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$ であるから

左辺 $=2\sin\dfrac{\pi-\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$

$=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2}\right)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$

$=2\cos\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$

$=2\cos\dfrac{\gamma}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin\dfrac{\gamma}{2}\right)$

ここで，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ より，$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$

左辺 $=2\cos\dfrac{\gamma}{2}\left\{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin\dfrac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}\right\}$

$=2\cos\dfrac{\gamma}{2}\left\{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right\}$

$=2\cos\dfrac{\gamma}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$=2\cos\dfrac{\gamma}{2}\cdot 2\cos\dfrac{\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{2}\cos\dfrac{\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{2}$

$=4\cos\dfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{-\beta}{2}$

$=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}=$ 右辺

345（1）　$y=\sqrt{5^2+(-5)^2}\sin(x+\alpha)$

$=5\sqrt{2}\sin(x+\alpha)$

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{-5}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$\sin\alpha=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

より，$\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$ であるから

$y=5\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$0\leqq x<2\pi$ より，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq x+\dfrac{3}{4}\pi<2\pi+\dfrac{3}{4}\pi$ であるから

$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)\leqq 1$

これより

$-5\sqrt{2}\leqq 5\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)\leqq 5\sqrt{2}$

すなわち，$-5\sqrt{2}\leqq y\leqq 5\sqrt{2}$

$y=5\sqrt{2}$ となるのは，$\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)=1$ のときであり，

このとき，$x+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{5}{2}\pi$，すなわち，$x=\dfrac{5}{2}\pi-\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{7}{4}\pi$

$y=-1$ となるのは，$\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)=-1$ のときであり，

このとき，$x+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$，すなわち，$x=\dfrac{3}{2}\pi-\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{4}\pi$

以上より

最大値　$\boldsymbol{5\sqrt{2}}$　$\left(x=\dfrac{7}{4}\pi\right)$

最小値　$\boldsymbol{-5\sqrt{2}}$　$\left(x=\dfrac{3}{4}\pi\right)$

（2）　$y=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}\sin(x+\alpha)$

$=2\sqrt{2}\sin(x+\alpha)$

ここで，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$，　$\sin\alpha = \dfrac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

より，$\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$y = 2\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x - \dfrac{\pi}{3} \leqq \pi - \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 1$

これより

$-\sqrt{6} \leqq 2\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 2\sqrt{2}$

すなわち，$-\sqrt{6} \leqq y \leqq 2\sqrt{2}$

$y = 2\sqrt{2}$ となるのは，$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$ のときであり，このとき，$x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{6}\pi$

$y = -\sqrt{6}$ となるのは, $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のときであり，このとき, $x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3}$, すなわち, $x = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = 0$

以上より

最大値　$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$　$\left(x = \dfrac{5}{6}\pi\right)$

最小値　$\boldsymbol{-\sqrt{6}}$　$(x = 0)$

346　半角の公式より

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$

$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$

倍角の公式より

$\sin x\,\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

よって

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + 5\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \sin 2x + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\cos 2x \\ &= \sin 2x + 2\cos 2x + 3 \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2}\sin(2x + \alpha) + 3 \\ &= \sqrt{5}\sin(2x + \alpha) + 3 \end{aligned}$$

ただし，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$．$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

ここで，$-1 \leqq \sin(2x + \alpha) \leqq 1$ であるから

$-\sqrt{5} \leqq \sqrt{5}\sin(2x + \alpha) \leqq \sqrt{5}$

$-\sqrt{5} + 3 \leqq \sqrt{5}\sin(2x + \alpha) + 3 \leqq \sqrt{5} + 3$

すなわち，$-\sqrt{5} + 3 \leqq y \leqq \sqrt{5} + 3$ であるから，この関数の最小値は，$\boldsymbol{3 - \sqrt{5}}$ である．

347　$f(x) = r\sin(x + \alpha)$ と合成したとする．

$-2 \leqq f(x) \leqq 2$ より，$r = 2$

また，$f(x)$ が最大となるのは，$\sin(x + \alpha) = 1$ のときであり，このとき，$x + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ （厳密には, $x + \alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi : n$ は整数）であり，$x = \dfrac{\pi}{3}$ で最大値をとることから

$\dfrac{\pi}{3} + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$

よって，$f(x) = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ である．

これより

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) \\ &= \sqrt{3}\sin x + \cos x \end{aligned}$$

これが，$f(x) = a\cos x + b\sin x$ と一致するので

$\boldsymbol{a = 1,\ b = \sqrt{3}}$

348　（1）左辺 $= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}\sin(x + \alpha)$

$= 2\sin(x + \alpha)$

ここで，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

よって，方程式は，$2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$，すなわち，$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ となる．

$0 \leqq x < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < 2\pi + \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$

$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき，$x = \dfrac{5}{6}\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7}{12}\pi$

$x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{13}{6}\pi$ のとき，$x = \dfrac{13}{6}\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{23}{12}\pi$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi}$

（2）$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}\sin(x + \alpha)$

$= 2\sin(x + \alpha)$

ここで，$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ より，$\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$

よって，方程式は，$2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2} = 0$，すなわち，$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となる．

$0 \leqq x < 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x - \dfrac{\pi}{3} < 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

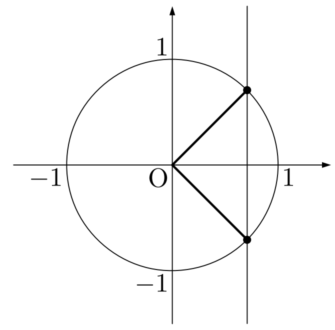
$x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}$

$x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{4}\pi$ のとき，$x = \dfrac{5}{4}\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{19}{12}\pi$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{19}{12}\pi}$

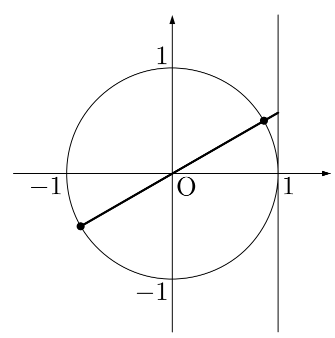
PLUS

349　（1）　$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，$-\pi < x \leqq \pi$ における方程式の解は，$x = \pm\dfrac{\pi}{4}$



よって，一般解は，$\boldsymbol{x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi}$　（n は整数）

（2）　$\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，$0 \leqq x < 2\pi$ における方程式の解は，$x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$



よって，一般解は，$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + n\pi}$　（n は整数）

（3）　$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ より，$2(1 - \sin^2 x) = \sin x + 1$

これを解くと

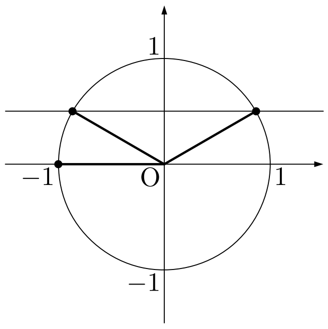
$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$，または，$\sin x = -1$

したがって，$0 \leqq x < 2\pi$ における方程式の解は

$x = \frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$



よって，一般解は

$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2n\pi,\ \frac{3}{2}\pi + 2n\pi}$

（n は整数）

（4）　$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ であるから，$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{2}\cos x$

これより，$\sin x = \sqrt{2}\cos^2 x$

さらに，$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ であるから

$\sin x = \sqrt{2}(1 - \sin^2 x)$

これを解くと

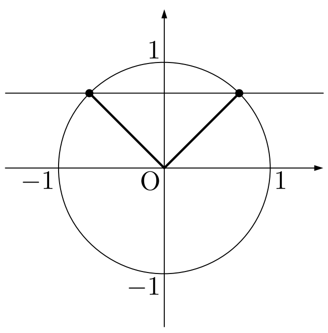
$\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$

$(\sqrt{2}\sin x - 1)(\sin x + \sqrt{2}) = 0$

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より，$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，$0 \leqq x < 2\pi$ における方程式の解は

$x = \frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$



よって，一般解は

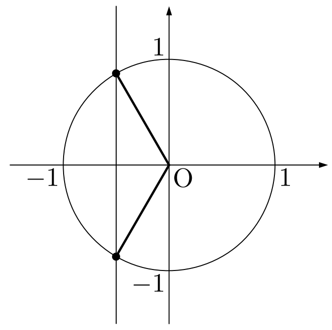
$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ \frac{3}{4}\pi + 2n\pi}$　（n は整数）

（5）　$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ であるから，　$0 \leqq x < 2\pi$，すなわち，$-\frac{\pi}{3} \leqq x - \frac{\pi}{3} < 2\pi - \frac{\pi}{3}$ において

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ のとき，$x = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{3} = \pi$

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$ のとき，$x = \frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

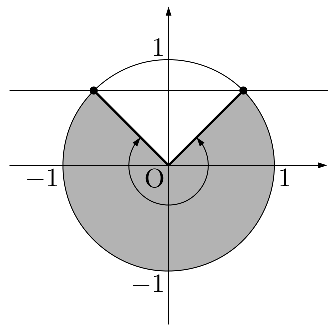


よって，一般解は

$\boldsymbol{x = \pi + 2n\pi,\ \frac{5}{3}\pi + 2n\pi}$　（n は整数）

350　（1）　$\sin x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，不等式の解は，図の影をつけた部分に動径があるときなので

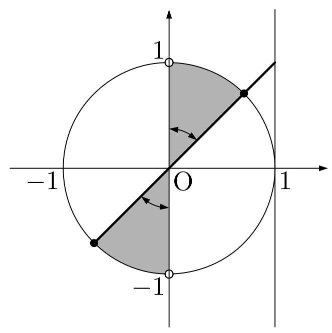
$\frac{3}{4}\pi \leqq x \leqq 2\pi + \frac{\pi}{4}$



よって，一般解は，$\frac{3}{4}\pi + 2n\pi \leqq x \leqq 2\pi + \frac{\pi}{4} + 2n\pi$，すなわち，$\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi + 2n\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{4} + 2(n+1)\pi}$　（n は整数）

（2）　$\tan x \geqq 1$ となるのは，図の影をつけた部分に動径があるときなので

，$\frac{\pi}{4} \leqq x < \frac{\pi}{2}$，　$\frac{5}{4}\pi \leqq x < \frac{3}{2}\pi$



よって，一般解は

$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} + n\pi \leqq x < \frac{\pi}{2} + n\pi}$　（n は整数）

（3）　左辺 $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}\sin(x + \alpha)$

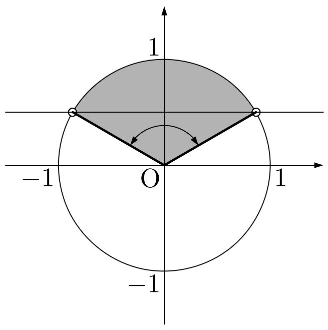
$= 2\sin(x + \alpha)$

ここで，$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ より，$\alpha = -\frac{\pi}{6}$

よって，不等式は，$2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > 1$，すなわち，$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$ となる．

$x - \frac{\pi}{6}$ の範囲は，図の影をつけた部分に動径があるときなので

$\frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi$



よって，一般解は，$\dfrac{\pi}{6}+2n\pi < x-\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{5}{6}\pi+2n\pi$ より，$\dfrac{\pi}{6}+2n\pi+\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5}{6}\pi+2n\pi+\dfrac{\pi}{6}$，すなわち

$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}+2n\pi < x < \pi+2n\pi}$　（n は整数）