6章　図形と式

§1　点と直線 (p.69〜p.72)

BASIC

351 OA $= \sqrt{(3-0)^2+(0-0)^2}$

$= \sqrt{9} = \mathbf{3}$

OB $= \sqrt{(0-0)^2+(-4-0)^2}$

$= \sqrt{16} = \mathbf{4}$

AB $= \sqrt{(0-3)^2+(-4-0)^2}$

$= \sqrt{25} = \mathbf{5}$

352 (1) 求める x 軸上の点を $\mathrm{P}(p,\ 0)$ とすると，

$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$ であるから，

$$(p-3)^2+(0-1)^2 = (p-2)^2+(0-5)^2$$
$$p^2-6p+9+1 = p^2-4p+4+25$$
$$-2p = 19$$
$$p = -\frac{19}{2}$$

よって，求める座標は，$\left(\boldsymbol{-\frac{19}{2},\ 0}\right)$

(2) 求める y 軸上の点を $\mathrm{Q}(0,\ q)$ とすると，

$\mathrm{AQ}^2 = \mathrm{BQ}^2$ であるから，

$$(0-3)^2+(q-1)^2 = (0-2)^2+(q-5)^2$$
$$9+q^2-2q+1 = 4+q^2-10q+25$$
$$8q = 19$$
$$q = -\frac{19}{8}$$

よって，求める座標は，$\left(\boldsymbol{0,\ \frac{19}{8}}\right)$

(3) 求める $y=x$ 上の点を $\mathrm{R}(r,\ r)$ とすると，

$\mathrm{AR}^2 = \mathrm{BR}^2$ であるから，

$$(r-3)^2+(r-1)^2 = (r-2)^2+(r-5)^2$$
$$2r^2-8r+10 = 2r^2-14+29$$
$$6r = 19$$
$$r = \frac{19}{6}$$

よって，求める座標は，$\left(\boldsymbol{\frac{19}{6},\ \frac{19}{6}}\right)$

353 $\sqrt{3}\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$ より，$3\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$

求める y 軸上の点 P の座標を $(0,\ p)$ とすると，

$$3\{(0-1)^2+(p-2)^2\} = (0-4)^2+(p-4)^2$$
$$3(1+p^2-4p+4) = 16+p^2-8p+16$$
$$3p^2-12p+15 = p^2-8p+32$$
$$2p^2-4p-17 = 0$$
$$p = \frac{2\pm\sqrt{2^2+34}}{2}$$
$$= \frac{2\pm\sqrt{38}}{2}$$

よって，求める座標は，$\left(\boldsymbol{0,\ \frac{2\pm\sqrt{38}}{2}}\right)$

354 (1) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$x = \frac{2\cdot 5+3\cdot(-5)}{3+2}$$
$$= \frac{-5}{5} = -1$$
$$y = \frac{2\cdot 7+3\cdot(-3)}{3+2}$$
$$= \frac{5}{5} = 1$$

よって，求める座標は，$\boldsymbol{(-1,\ 1)}$

(2) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$x = \frac{3\cdot 5+2\cdot(-5)}{2+3}$$
$$= \frac{5}{5} = 1$$
$$y = \frac{3\cdot 7+2\cdot(-3)}{2+3}$$
$$= \frac{15}{5} = 3$$

よって，求める座標は，$\boldsymbol{(1,\ 3)}$

355 (1) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$x = \frac{0+2+0}{3}$$
$$= \frac{2}{3}$$
$$y = \frac{0+0+3}{3}$$
$$= \frac{3}{3} = 1$$

よって，求める座標は，$\left(\boldsymbol{\frac{2}{3},\ 1}\right)$

(2) 求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$x = \frac{2+0+4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$
$$y = \frac{0+3+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

よって，求める座標は，$\boldsymbol{(2,\ 2)}$

356 点 C の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$\dfrac{2+5+x}{3} = 1$ であるから，$x = -4$

$\dfrac{-2+4+y}{3} = 3$ であるから，$y = 7$

よって，点 C の座標は，$\boldsymbol{(-4,\ 7)}$

357 (1) $y-2 = 4\{x-(-1)\}$

$$y = 4x+4+2$$
$$\boldsymbol{y = 4x+6}$$

(2) $\boldsymbol{y = 3}$

(3) $\boldsymbol{x = 4}$

358 (1) $y-2 = \dfrac{3-2}{-2-1}(x-1)$

$$y = -\frac{1}{3}(x-1)+2$$
$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}}$$

または，$\boldsymbol{x+3y = 7}$

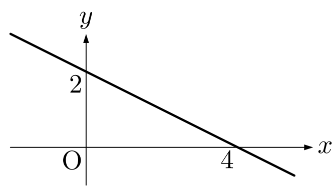
(2) 2 点の x 座標はいずれも $-\sqrt{2}$ なので

$\boldsymbol{x = -\sqrt{2}}$

359　（1）$x + 2y - 4 = 0$

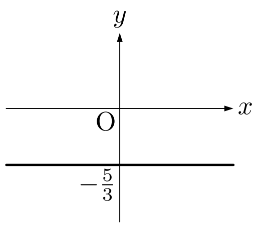
$2y = -x + 4$

$y = \dfrac{1}{2}x + 2$



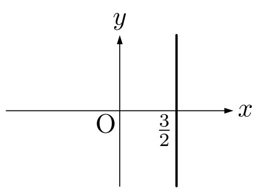
（2）$3y + 5 = 0$

$y = -\dfrac{5}{3}$



（3）$-2x + 3 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$



360　（1）　$x + 2y + 3 = 0$ より，$y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

よって，求める直線の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ であるから

$y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x - 1)$

$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} + 3$

$\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}}$

または,

$\boldsymbol{x + 2y - 7 = 0}$

（2）　$2x + 3y + 7 = 0$ より，$y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{7}{3}$

よって，求める直線の傾きは $\dfrac{3}{2}$ であるから

$y - 0 = \dfrac{3}{2}\{x - (-3)\}$

$\boldsymbol{y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2}}$

または,

$\boldsymbol{3x - 2y + 9 = 0}$

361　2 点を A(5, 1)，B(1, 3) とする．

直線 AB の傾きは

$\dfrac{3-1}{1-5} = -\dfrac{1}{2}$

よって，線分 AB の垂直二等分線の傾きは，2 である．

また，線分 AB の中点の座標は,

$\left(\dfrac{5+1}{2},\ \dfrac{1+3}{2}\right) = (3,\ 2)$

したがって，求める直線の方程式は

$y - 2 = 2(x - 3)$

$y = 2x - 6 + 2$

$\boldsymbol{y = 2x - 4}$

または,

$\boldsymbol{2x - y - 4 = 0}$

CHECK

362　（1）$\mathrm{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (5-0)^2}$

$= \sqrt{9 + 25} = \boldsymbol{\sqrt{34}}$

$\mathrm{AC} = \sqrt{(7-2)^2 + (3-0)^2}$

$= \sqrt{25 + 9} = \boldsymbol{\sqrt{34}}$

$\mathrm{BC} = \sqrt{(7-5)^2 + (3-5)^2}$

$= \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \boldsymbol{2\sqrt{2}}$

よって，この三角形は，$\mathbf{AB = AC}$ **の二等辺三角形**である．

（2）$\mathrm{AB} = \sqrt{(2+2)^2 + (-1-1)^2}$

$= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$

$\mathrm{AC} = \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2 + (2\sqrt{3}-1)^2}$

$= \sqrt{(3 + 4\sqrt{3} + 4) + (12 - 4\sqrt{3} + 1)}$

$= \sqrt{20} = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$

$\mathrm{BC} = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2 + (2\sqrt{3}+1)^2}$

$= \sqrt{(3 - 4\sqrt{3} + 4) + (12 + 4\sqrt{3} + 1)}$

$= \sqrt{20} = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$

よって，この三角形は，**正三角形**である．

（3）$\mathrm{AB} = \sqrt{(-3-0)^2 + (2-1)^2}$

$= \sqrt{9 + 1} = \boldsymbol{\sqrt{10}}$

$\mathrm{AC} = \sqrt{(-4-0)^2 + (-1-1)^2}$

$= \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$

$\mathrm{BC} = \sqrt{(-4+3)^2 + (-1-2)^2}$

$= \sqrt{1 + 9} = \boldsymbol{\sqrt{10}}$

$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2$ であるから，この三角形は，

$\boldsymbol{\angle \mathrm{B} = 90^\circ}$ **の直角二等辺三角形**である．

363　求める点の座標を $\mathrm{P}\,(x,\ y)$ とする．

$\mathrm{OP} = \mathrm{AP} = \mathrm{BP}$ であるから

$\mathrm{OP} = \mathrm{AP}$ より，$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{AP}^2$

すなわち，$x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$

整理すると

$2x + 4y = 5 \cdots ①$

$\mathrm{OP} = \mathrm{BP}$ より，$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{BP}^2$

すなわち，$x^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$

整理すると

$x - y = -1 \cdots ②$

①, ② を連立させて解くと，$x = \dfrac{1}{6}$，$y = \dfrac{7}{6}$

よって，求める座標は，$\left(\mathbf{\frac{1}{6}},\ \mathbf{\frac{7}{6}}\right)$

364　求める点の座標を $\mathrm{P}\,(p,\ 0)$ とする．

$\mathrm{AP}=\sqrt{2}\mathrm{BP}$ より，$\mathrm{AP}^2=2\mathrm{BP}^2$ であるから

$(p-3)^2+(0-4)^2=2\{(p-1)^2+(0-2)^2\}$

$p^2-6p+9+16=2(p^2-2p+1+4)$

$p^2-6p+25=2(p^2-2p+5)$

さらに整理すると

$p^2+2p-15=0$

$(p+5)(p-3)=0$

よって，$p=-5,\ 3$

したがって，求める座標は，$\mathbf{(-5,\ 0)}$，または　$\mathbf{(3,\ 0)}$

365　AB を $1:2$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{2\cdot1+1\cdot3}{1+2},\ \frac{2\cdot1+1\cdot4}{1+2}\right)=\left(\frac{2+3}{3},\ \frac{2+4}{3}\right)$$
$$=\left(\mathbf{\frac{5}{3}},\ \mathbf{2}\right)$$

BA を $1:2$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{2\cdot3+1\cdot1}{1+2},\ \frac{2\cdot4+1\cdot1}{1+2}\right)=\left(\frac{6+1}{3},\ \frac{8+1}{3}\right)$$
$$=\left(\mathbf{\frac{7}{3}},\ \mathbf{3}\right)$$

366　$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心は，線分 AM を $2:1$ に内分する点であるから

$$\left(\frac{1\cdot4+2\cdot1}{2+1},\ \frac{1\cdot2+2\cdot2}{2+1}\right)=\left(\frac{4+2}{3},\ \frac{2+4}{3}\right)$$
$$=\mathbf{(2,\ 2)}$$

367　求める直線と x 軸とのなす角が 30° であることから，この直線の傾きは，$\tan30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．

よって，直線の方程式は

$y-0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

368　求める直線の方程式は

$y-1=\dfrac{3-1}{2-6}(x-6)$

$y-1=\dfrac{2}{-4}(x-6)$

$y=-\dfrac{1}{2}(x-6)+1$

$y=-\dfrac{1}{2}x+3+1$

$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x+4}$

369　2 直線 $2x-y+3=0,\ x+y=0$ の交点を求める．

2 式の辺々を加えて，$3x+3=0$，すなわち，$x=-1$ であるから，これを $x+y=0$ に代入して，$y=1$

よって，交点は $(-1,\ 1)$ である．

また，$x-y+3=0$ より，$y=x+3$ であるから，この直線の傾きは 1 である．

以上より，直線 $x-y+3=0$ に平行な直線の方程式は

$y-1=1(x+1)$，すなわち，$\boldsymbol{y=x+2}$

または，$\boldsymbol{x-y+2=0}$

直線 $x-y+3=0$ に垂直な直線の方程式は

$y-1=-\dfrac{1}{1}(x+1)$，すなわち，$\boldsymbol{y=-x}$

または，$\boldsymbol{x+y=0}$

370　$3x+4y-2=0$ より

$4y=-3y+2$

$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}\cdots①$

$ax+3y+c=0$ より

$3y=-ay-c$

$y=-\dfrac{a}{3}x-\dfrac{c}{3}\cdots②$

①，② が一致するための条件は

$$\begin{cases}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{a}{3}\cdots③\\[2mm] \dfrac{1}{2}=-\dfrac{c}{3}\cdots④\end{cases}$$

③ より，$\boldsymbol{a=\dfrac{9}{4}}$

④ より，$\boldsymbol{c=-\dfrac{3}{2}}$

371　$\triangle\mathrm{OAB}$ が正三角形のとき，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{AB}$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ より，$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OB}^2$ であるから

$(2-0)^2+(2\sqrt{3}-0)^2=(x-0)^2+(y-0)^2$

整理すると

$x^2+y^2=16\cdots①$

$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}$ より，$\mathrm{OB}^2=\mathrm{AB}^2$

すなわち，$(x-0)^2+(y-0)^2=(x-2)^2+(y-2\sqrt{3})^2$

整理すると

$x^2+y^2=x^2-4x+4+y^2-4\sqrt{3}y+12$

$4x+4\sqrt{3}y=16$

これより，$x=4-\sqrt{3}y$

これを ① に代入して

$(4-\sqrt{3}y)^2+y^2=16$

$16-8\sqrt{3}y+3y^2+y^2=16$

$y^2-2\sqrt{3}y=0$

$y(y-2\sqrt{3})=0$

よって，$y=0,\ 2\sqrt{3}$

$y=0$ のとき，$x=4-0=4$

$y=2\sqrt{3}$ のとき，$x=4-\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}=4-6=-2$

以上より，B の座標は，$\mathbf{(4,\ 0)}$，または，$\boldsymbol{(-2,\ 2\sqrt{3})}$

STEP UP

372　3 つの頂点を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ とすると

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)=(3,\ 2)$$
$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)=(6,\ 1)$$
$$\left(\frac{x_3+x_1}{2},\ \frac{y_3+y_1}{2}\right)=(5,\ 0)$$

よって

$$\begin{cases}x_1+x_2=6 & \cdots①\\ x_2+x_3=12 & \cdots②\\ x_3+x_1=10 & \cdots③\end{cases}\qquad \begin{cases}y_1+y_2=4 & \cdots④\\ y_2+y_3=2 & \cdots⑤\\ y_3+y_1=0 & \cdots⑥\end{cases}$$

①＋②＋③ より，$2(x_1+x_2+x_3)=28$ であるから

$x_1+x_2+x_3=14\cdots⑦$

⑦ − ① より，$x_3=8$

⑦ − ② より，$x_1=2$

⑦ − ③ より，$x_2=4$

④＋⑤＋⑥ より，$2(y_1+y_2+y_3)=6$ であるから

$y_1+y_2+y_3=3\cdots⑧$

⑧ − ④ より，$y_3=-1$

⑧ − ⑤ より，$y_1=1$

⑧ − ⑥ より，$y_2 = 3$

以上より，3 頂点は，**(2, 1)，(4, 3)，(8, −1)**

373　3 点 A，B，C が一直線上にあれば，直線 CA と直線 CB の傾きが一致する．

直線 CA の傾きは，$\dfrac{5-4}{(5-2k)-1} = \dfrac{1}{4-2k}$

直線 CB の傾きは，$\dfrac{k-4}{3-1} = \dfrac{k-4}{2}$

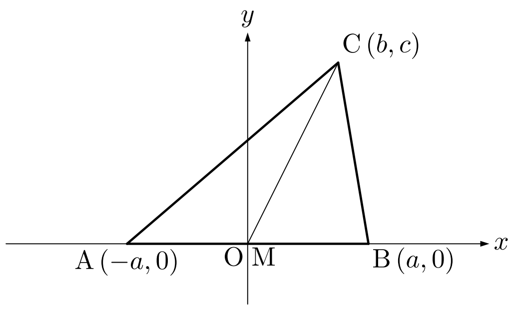
よって，$\dfrac{1}{4-2k} = \dfrac{k-4}{2}$

これを解くと

$$(4-2k)(k-4) = 1 \cdot 2$$
$$2(2-k)(k-4) = 2$$
$$(2-k)(k-4) = 1$$
$$-k^2 + 6k - 8 - 1 = 0$$
$$k^2 - 6k + 9 = 0$$
$$(k-3)^2 = 0$$

よって，$\boldsymbol{k = 3}$

374　図のように頂点を定めると，辺 AB の中点 M は原点 O となる．



$$\mathrm{AC}^2 = \{b-(-a)\}^2 + (c-0)^2 = (b+a)^2 + c^2$$
$$\mathrm{BC}^2 = (b-a)^2 + (c-0)^2 = (b-a)^2 + c^2$$
$$\mathrm{AM}^2 = a^2$$
$$\mathrm{CM}^2 = (b-0)^2 + (c-0)^2 = b^2 + c^2$$

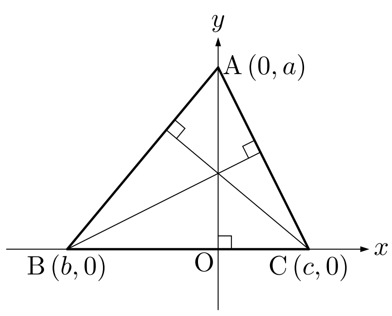
よって

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \{(b+a)^2 + c^2\} + \{(b-a)^2 + c^2\} \\ &= b^2 + 2bc + a^2 + c^2 + b^2 - 2ba + a^2 + c^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= 2\{a^2 + (b^2 + c^2)\} \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2\end{aligned}$$

よって，右辺 = 左辺

375　図のように頂点を定めると，y 軸は頂点 A から辺 BC へ引いた垂線となる．



i）　$b = 0$　または　$c = 0$ のとき

三角形は直角三角形となり，3 つの垂線は原点で交わる．

ii）　$b \neq 0$　かつ　$c \neq 0$ のとき

直線 AC の傾きは，$\dfrac{0-a}{c-0} = -\dfrac{a}{c}$ であるから，頂点 B から辺 AC へ引いた垂線の方程式は

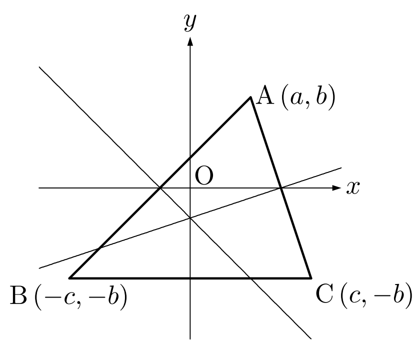
$$y - 0 = \frac{c}{a}(x-b)$$
$$y = \frac{c}{a}x - \frac{bc}{a}$$

また，直線 AB の傾きは，$\dfrac{0-a}{b-0} = -\dfrac{a}{b}$ であるから，頂点 C から辺 AB へ引いた垂線の方程式は

$$y - 0 = \frac{b}{a}(x-c)$$
$$y = \frac{b}{a}x - \frac{bc}{a}$$

よって，これら 2 つの直線の交点の座標は，$\left(0,\ -\dfrac{bc}{a}\right)$ であり，この点は y 軸上にあるから，3 つの垂線は 1 点で交わる．

376　図のように頂点を定めると，y 軸は辺 BC の垂直二等分線となる．



辺 AB の中点は，$\left(\dfrac{a-c}{2},\ \dfrac{b-b}{2}\right) = \left(\dfrac{a-c}{2},\ 0\right)$ であり，直線 AB の傾きは，$\dfrac{b-(-b)}{a-(-c)} = \dfrac{2b}{a+c}$ であるから，辺 AB の垂直二等分線の方程式は

$$y - 0 = -\frac{a+c}{2b}\left(x - \frac{a-c}{2}\right)$$
$$y = -\frac{a+c}{2b}x + \frac{(a+c)(a-c)}{4b} = -\frac{a+c}{2b}x + \frac{a^2-c^2}{4b}$$

また，辺 AC の中点は，$\left(\dfrac{a+c}{2},\ \dfrac{b-b}{2}\right) = \left(\dfrac{a+c}{2},\ 0\right)$ であり，直線 AC の傾きは，$\dfrac{b-(-b)}{a-c} = \dfrac{2b}{a-c}$ であるから，辺 AC の垂直二等分線の方程式は

$$y - 0 = -\frac{a-c}{2b}\left(x - \frac{a+c}{2}\right)$$
$$y = -\frac{a-c}{2b}x + \frac{(a-c)(a+c)}{4b} = -\frac{a-c}{2b}x + \frac{a^2-c^2}{4b}$$

よって，これら 2 つの直線の交点の座標は，$\left(0,\ \dfrac{a^2-c^2}{4b}\right)$ であり，この点は y 軸上にあるから，3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる．

377　重心の座標は

$$\left(\frac{0+(-3)+3}{3},\ \frac{4+0+0}{3}\right) = \left(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\frac{4}{3}}\right)$$

垂心は，y 軸上にあるので，頂点 B から辺 AC にひいた垂線と y 軸との交点を求める．

直線 AC の傾きは，$\dfrac{0-4}{3-0} = -\dfrac{4}{3}$ であるから，頂点 B から辺 AC に引いた直線の式は

$$y - 0 = \frac{3}{4}\{x - (-3)\}$$
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

よって，垂心は，$\left(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\frac{9}{4}}\right)$

外心は，3 つの頂点から等距離にある点であるが，y 軸上の任意の点は，点 B と点 C から等距離であるから，外心は y 軸上にある．

求める点の座標を，P $(0,\ p)$ とすれば，AP = BP となることか

ら，$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$

すなわち，$(0)^2 + (p-4)^2 = \{0-(-3)\}^2 + (p-0)^2$

$(p-4)^2 = 9 + p^2$

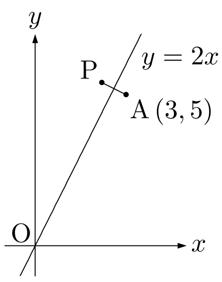
$p^2 - 8p + 16 = 9 + p^2$

$-8p = -7$

$p = \dfrac{7}{8}$

よって，外心は，$\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\right)$

378（1）　直線 $y = 2x$ を ℓ，点 $(3,\ 5)$ を A，求める点を $\mathrm{P}\,(p,\ q)$ とする．



直線 AP の傾きは，$\dfrac{q-5}{p-3}$ であり，$\mathrm{AP} \perp \ell$ であるから

$\dfrac{q-5}{p-3} \cdot 2 = -1$

これより

$2(q-5) = -(p-3)$

$2q - 10 = -p + 3$

$p + 2q = 13 \cdots ①$

また，線分 AP の中点は，$\left(\dfrac{p+3}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ であり，この点が直線 ℓ 上にあるから

$\dfrac{q+5}{2} = 2 \cdot \dfrac{p+3}{2}$

これより

$q + 5 = 2(p+3)$

$q + 5 = 2p + 6$

$2p - q = -1 \cdots ②$

①, ② を連立させて解くと

$$\begin{array}{lrl} ① & p + 2q & = 13 \\ ② \times 2 & +)\ \ 4p - 2q & = -2 \\ \hline & 5p & = 11 \\ & p & = \dfrac{11}{5} \end{array}$$

これを ① に代入して

$\dfrac{11}{5} + 2q = 13$

$2q = 13 - \dfrac{11}{5} = \dfrac{54}{5}$

$q = \dfrac{27}{5}$

よって，求める点は，$\left(\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{27}}{\mathbf{5}}\right)$

（2）　点 $(3,\ 5)$ を A，求める点の座標を $\mathrm{P}\,(p,\ q)$ とする．

線分 AP の中点は，$\left(\dfrac{p+3}{2},\ \dfrac{q+5}{2}\right)$ であり，この点が $(-2,\ 1)$ となるので

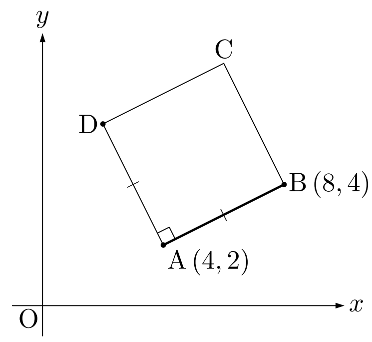
$$\begin{cases} \dfrac{p+3}{2} = -2 & \cdots ① \\ \dfrac{q+5}{2} = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$p + 3 = -4$，すなわち，$p = -7$

② より，$q + 5 = 2$，すなわち，$p = -3$

よって，求める点は，$(\mathbf{-7},\ \mathbf{-3})$

379



（1）　点 D の座標を $(x,\ y)$ とおく．

$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}$ より，$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}^2$ であるから

$(x-4)^2 + (y-2)^2 = (8-4)^2 + (4-2)^2$

これより，$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 16 + 4 = 20 \cdots ①$

また，$\mathrm{AD} \perp \mathrm{AB}$ であり，直線 AD の傾きは，$\dfrac{y-2}{x-4}$，直線 AB の傾きは，$\dfrac{4-2}{8-4} = \dfrac{1}{2}$ であるから

$\dfrac{y-2}{x-4} \cdot \dfrac{1}{2} = -1$

すなわち，$y - 2 = -2(x-4)$

これより，$y = -2x + 10 \cdots ②$

② を ① に代入して

$(x-4)^2 + (-2x+10-2)^2 = 20$

$(x-4)^2 + (-2x+8)^2 = 20$

$(x-4)^2 + 4(x-4)^2 = 20$

$5(x-4)^2 = 20$

$(x-4)^2 = 4$

$x - 4 = \pm 2$

$x = 6,\ 2$

$x = 6$ のとき，$y = -12 + 10 = -2$

$x = 2$ のとき，$y = -4 + 10 = 6$

点 D は第 1 象限の点なので，求める座標は $(\mathbf{2},\ \mathbf{6})$

（2）　正方形の対角線は，それぞれの中点で交わるので，線分 BD の中点が対角線の交点となる．

よって，求める点は，$\left(\dfrac{8+2}{2},\ \dfrac{4+6}{2}\right) = (\mathbf{5},\ \mathbf{5})$

（3）　点 C の座標を $(x,\ y)$ とおく．

線分 AC の中点が，$(5,\ 5)$ であるから

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{2} = 5 & \cdots ① \\ \dfrac{y+2}{2} = 5 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$x + 4 = 10$，すなわち，$x = 6$

② より，$y + 2 = 10$，すなわち，$y = 8$

よって，点 C の座標は，$(\mathbf{6},\ \mathbf{8})$

380（1）　点 H の座標を $(p,\ q)$ とする．

$3x - 2y + 4 = 0$ を変形して

$2y = 3x + 4$

$y = \dfrac{3}{2}x + 2$

よって，直線 ℓ の傾きは，$\dfrac{3}{2}$ である．

また，直線 AH の傾きは，$\dfrac{q-2}{p-1}$ であり，$\mathrm{AH} \perp \ell$ であることから

$\dfrac{q-2}{p-1} \cdot \dfrac{3}{2} = -1$

これより，$3(q-2) = -2(p-1)$

$3q - 6 = -2p + 2$

$2p+3q=8\cdots$①

また，点 H は直線 ℓ 上の点であるから

$3p-2q+4=0\cdots$②

①, ② を連立させて解くと

$$\begin{array}{llrl} ①\times 2 & & 4p+6q & =16 \\ ②\times 3 & +) & 9p-6q & =-12 \\ \hline & & 13p & =4 \\ & & p & =\dfrac{4}{13} \end{array}$$

これを ① に代入して

$2\cdot\dfrac{4}{13}+3q=8$

$3q=8-\dfrac{8}{13}=\dfrac{96}{13}$

$q=\dfrac{32}{13}$

よって，点 H の座標は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{4}{13},\ \dfrac{32}{13}\right)}$

（2）

$$\begin{aligned} \mathrm{AH}&=\sqrt{\left(1-\frac{4}{13}\right)^2+\left(2-\frac{32}{13}\right)^2} \\ &=\sqrt{\left(\frac{9}{13}\right)^2+\left(-\frac{6}{13}\right)^2} \\ &=\sqrt{\frac{81+36}{13^2}} \\ &=\frac{\sqrt{117}}{13}=\frac{\sqrt{9\cdot 13}}{13}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{13}}{13}} \end{aligned}$$

381　与式を a について整理すると

$3x-2ax+ay-2y+5a+1=0$

$3x-2y+1+(-2x+y+5)a=0$

a がどのような値であっても，この式が成り立つならば

$$\begin{cases} 3x-2y+1=0 & \cdots① \\ -2x+y+5=0 & \cdots② \end{cases}$$

② より，$y=2x-5\cdots$②$'$

これを ① に代入して

$3x-2(2x-5)+1=0$

$3x-4x=-11$

$x=11$

これを，②$'$ に代入して，$y=2\cdot 11-5=17$

すなわち，この直線は a がどのような値であっても，定点 $(11,\ 17)$ を通る．

382（1）　与えられた方程式より

$y-3x-1+kx-2ky-4k=0$

$(k-3)x+(-2k+1)y-1-4k=0\cdots$①

ここで，$k-3=0$ かつ $-2k+1=0$ となることはないので，この式は直線を表す．

また，交点 A の座標を，$(p,\ q)$ とすると，点 A は 2 直線上の点であるから

$q=3p+1$，すなわち $q-3p-1=0$

$p-2q-4=0$

よって，$q-3p-1+k(p-2q-4)=0+k\cdot 0=0$

これは，点 $(p,\ q)$ が $y-3x-1+k(x-2y-4)=0$ 上にあることを示している．

以上より，与えられた方程式は，点 A を通る直線を表す．

（2）　$y-3x-1+k(x-2y-4)=0$ に，$x=5,\ y=1$ を代入すると

$1-3\cdot 5-1+k(5-2\cdot 1-4)=0$

$-15-k=0$

$k=-15$

よって，求める直線の方程式は

$y-3x-1-15(x-2y-4)=0$

$y-3x-1-15x+30y+60=0$

すなわち，$\boldsymbol{18x-31y-59=0}$

（3）　① より，$(2k-1)y=(k-3)x-1-4k$

ここで，$2k-1=0$ とすると，この直線は y 軸と平行な直線となるので $3x+4y=5$ と垂直にはならない．よって，$2k-1\fallingdotseq 0$

これより，$y=\dfrac{k-3}{2k-1}x-\dfrac{4k+1}{2k-1}$ であるから，この直線の傾きは，$\dfrac{k-3}{2k-1}$

一方，直線 $3x+4y=5$ の傾きは，$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$ より，$-\dfrac{3}{4}$ であるから

$\dfrac{k-3}{2k-1}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-1$

これより，$3(k-3)=4(2k-1)$

$3k-9=8k-4$

$-5k=5$

$k=-1$

よって，求める直線の方程式は

$y-3x-1-1\cdot(x-2y-4)=0$

$y-3x-1-x+2y+4=0$

すなわち，$\boldsymbol{4x-3y-3=0}$

383（1）　$x+ky=1$ を k について整理すると，$yk+(x-1)=0$

これが k の値に関係なく成り立つための条件は

$$\begin{cases} y=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

よって，$x=1,\ y=0$ であるから，直線 ℓ_1 は定点 $\boldsymbol{(1,\ 0)}$ を通る．

$(k+1)x+2y=2$ を k について整理すると

$xk+(x+2y-2)=0$

これが k の値に関係なく成り立つための条件は

$$\begin{cases} x=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$$

$x=0$ を $x+2y-2=0$ に代入して

$2y-2=0$，すなわち，$y=1$ であるから，直線 ℓ_2 は定点 $\boldsymbol{(0,\ 1)}$ を通る．

（2）　$k=0$ とすると，$\ell_1:x=1$，$\ell_2:x+2y=2$ であるから，2 直線は平行とはならない．よって，$k\fallingdotseq 0$

$x+ky=1$ において，$k\fallingdotseq 0$ であるから，$y=-\dfrac{1}{k}x+\dfrac{1}{k}$

また，$(k+1)x+2y=2$ より，$y=-\dfrac{k+1}{2}x+1$

2 直線が平行となるための条件は

$-\dfrac{1}{k}=-\dfrac{k+1}{2}$

これを解くと

$k(k+1)=2$

$k^2+k-2=0$

$(k+2)(k-1)=0$

よって，$k=-2,\ 1$

ここで，$k=1$ のとき，$\ell_1:x+y=1$，$\ell_2:2x+2y=2$ となり，2 直線が一致するので，$\boldsymbol{k=-2}$

（3）　$k=0$ のとき，2 直線は垂直とはならない．よって，$k \fallingdotseq 0$

2 直線が垂直となるための条件は

$$\left(-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(-\frac{k+1}{2}\right)=-1$$

これを解くと

$$\frac{k+1}{2k}=-1$$

$$k+1=-2k$$

$$-3k=1$$

よって，$\boldsymbol{k=-\frac{1}{3}}$

（4）　$\begin{cases} x+ky=1 & \cdots ① \\ (k+1)x+2y=2 & \cdots ② \end{cases}$ とする．

$$\begin{array}{llrl} ②\times k & & k(k+1)x+2ky & =2k \\ ①\times 2 & -) & 2x+2ky & =2 \\ \hline & & \{k(k+1)-2\}x & =2k-2 \\ & & (k^2+k-2)x & =2(k-1) \\ & & (k+2)(k-1)x & =2(k-1) \end{array}$$

$k \fallingdotseq 1,\ -2$ であるから

$$x=\frac{2(k-1)}{(k+2)(k-1)}=\frac{2}{k+2}$$

これを ② に代入して

$$\frac{2(k+1)}{k+2}+2y=2$$

$$\frac{k+1}{k+2}+y=1$$

$$y=1-\frac{k+1}{k+2}$$

$$=\frac{k+2-(k+1)}{k+2}=\frac{1}{k+2}$$

これと，$x=\dfrac{2}{k+2}$ より

$$y=\frac{1}{k+2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{k+2}=\frac{1}{2}x$$

よって，$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x}$

■