6章　図形と式

§2　2次曲線（p.73〜p.79）

BASIC

384（1）$(x-0)^2+\{y-(-2)\}^2=(\sqrt{5})^2$

$\boldsymbol{x^2+(y+2)^2=5}$

（2）　半径は，$\sqrt{(1-4)^2+(4-3)^2}=\sqrt{10}$

よって

$\{x-(-2)\}^2+(y-3)^2=(\sqrt{10})^2$

$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-3)^2=10}$

（3）　円の中心の座標は，与えられた2点の中点だから

$\left(\dfrac{0+4\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3+7}{2}\right)=(2\sqrt{3},\ 5)$

半径は，この中心と点 $(0,\ 3)$ との距離だから

$\sqrt{(2\sqrt{3}-0)^2+(5-3)^2}=\sqrt{16}=4$

よって，求める円の方程式は，

$(x-2\sqrt{3})^2+(y-5)^2=4^2$

$\boldsymbol{(x-2\sqrt{3})^2+(y-5)^2=16}$

385（1）$(x^2+2x)+(y^2-8y)+8=0$

$(x+1)^2-1+(y-4)^2-16+8=0$

$(x+1)^2+(y-4)^2=9$

$(x+1)^2+(y-4)^2=3^2$

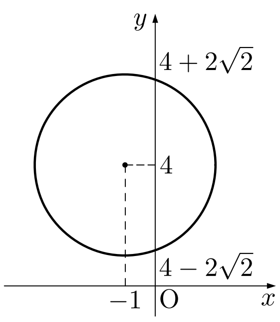
よって，中心　$\boldsymbol{(-1,\ 4)}$，半径　$\boldsymbol{3}$

また，$x=0$ のとき，$1^2+(y-4)^2=9$ より

$(y-4)^2=8$

$y-4=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$

$y=4\pm2\sqrt{2}$



（2）$x^2+y^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{8}{3}y=0$

$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{16}{9}+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{16}{9}=0$

$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{32}{9}$

$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2$

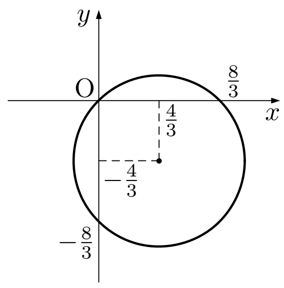
よって，中心　$\boldsymbol{\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)}$，半径　$\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{2}}{3}}$

また，$x=0$ のとき，$y^2+\dfrac{8}{3}y=0$ より

$y=0,\ -\dfrac{8}{3}$

$y=0$ のとき，$x^2-\dfrac{8}{3}x=0$ より

$x=0,\ \dfrac{8}{3}$



386（1）　求める円の方程式を，

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

とおくと，この円が，与えられた3点を通ることより

$$\begin{cases}1+1+a-b+c=0\\1+9-a-3b+c=0\\4+0-2a+c=0\end{cases}$$

整理すると，

$$\begin{cases}a-b+c=-2\\-a-3b+c=-10\\-2a+c=-4\end{cases}$$

これを解いて，$(a,b,c)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},-1\right)$

よって，求める方程式は，

$\boldsymbol{x^2+y^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}y-1=0}$

（2）　中心の座標を $(t,\ -t)$，半径を r とおくと，求める方程式は

$(x-t)^2+(y+t)^2=r^2$

と表すことができる．この円が，与えられた2点を通ることより

$$\begin{cases}(4-t)+(6+t)^2=r^2\\(-2-t)^2+(4+t)^2=r^2\end{cases}$$

r^2 を消去すると，

$(4-t)^2+(6+t)^2=(-2-t)^2+(4+t)^2$

これを解いて，$t=4$

$(4-t)^2+(6+t)^2=r^2$ に代入して，$r^2=100$

よって，求める方程式は，

$\boldsymbol{(x-4)^2+(y+4)^2=100}$

387 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$\mathrm{PO}:\mathrm{PA}=3:2$

よって，$2\mathrm{PO}=3\mathrm{PA}$ であるから

$4\mathrm{PO}^2=9\mathrm{PA}^2\cdots$①

ここで

$\mathrm{PO}^2=(x-0)^2+(y-0)^2=x^2+y^2$

$\mathrm{PA}^2=(x-1)^2+(y-0)^2=(x-1)^2+y^2$

これらを①に代入して

$4(x^2+y^2)=9\{(x-1)^2+y^2\}$

$4x^2+4y^2=9x^2-18x+9+9y^2$

$5x^2-18x+5y^2+9=0$

$x^2-\dfrac{18}{5}x+y^2+\dfrac{9}{5}=0$

$\left(x-\dfrac{9}{5}\right)^2-\dfrac{81}{25}+y^2+\dfrac{9}{5}=0$

$\left(x-\dfrac{9}{5}\right)^2+y^2=\dfrac{36}{25}$

$\left(x-\dfrac{9}{5}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{6}{5}\right)^2$

逆に，この図形上の任意の点は条件を満たす．

よって，求める軌跡は

中心 $\left(\boldsymbol{\frac{9}{5}},\ \mathbf{0}\right)$ **, 半径** $\boldsymbol{\frac{6}{5}}$ **の円** である.

388　点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$\mathrm{AP}^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2$

$\mathrm{BP}^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$

これらを $\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 = 6$ に代入して

$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 6$

$(x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1)$

$+ (x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1) = 6$

$2x^2 + 2y^2 + 4 = 6$

$x^2 + y^2 = 1$

逆に，この図形上の任意の点は条件を満たす.

よって，求める軌跡は

中心が原点で, 半径 1 の円 である.

389　楕円の方程式は

$\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{7^2} = 1$

$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{49} = 1}$

焦点の座標は

$(0,\ \pm\sqrt{7^2 - 4^2}) = \boldsymbol{(0,\ \pm\sqrt{33})}$

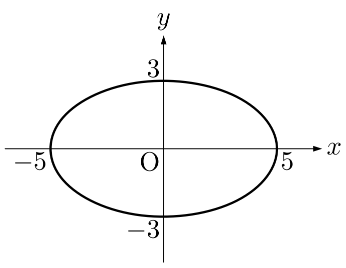
390　短軸の長さを $2b$ とすると

$\sqrt{5^2 - b^2} = 4$ より，$b^2 = 25 - 16 = 9$

よって，楕円の方程式は

$\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1}$



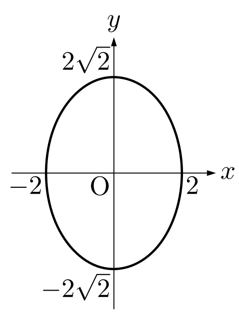
391　長軸の長さを $2a$ とすると

$\sqrt{a^2 - 2^2} = 2$ より，$a^2 = 4 + 4 = 8$

よって，楕円の方程式は

$\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{8} = 1}$

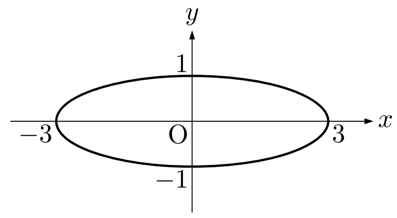


392（1）　方程式は，$\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1$ と表せるから，焦点の座標は

$(\pm\sqrt{3^2 - 1^2},\ 0) = \boldsymbol{(\pm 2\sqrt{2},\ 0)}$

長軸の長さは，$2 \cdot 3 = \mathbf{6}$

短軸の長さは，$2 \cdot 1 = \mathbf{2}$



（2）　方程式の両辺を 12 で割ると

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6} = 1$

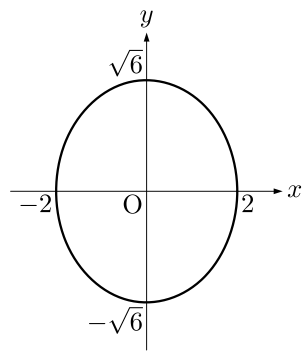
$\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$

よって，焦点の座標は

$\left(0,\ \pm\sqrt{(\sqrt{6})^2 - 2^2}\right) = \boldsymbol{(0,\ \pm\sqrt{2})}$

長軸の長さは，$2 \cdot \sqrt{6} = \boldsymbol{2\sqrt{6}}$

短軸の長さは，$2 \cdot 2 = \mathbf{4}$



393　方程式は，$\dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{12})^2} = 1$ と表せるから，焦点の座標は

$\left(\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{12})^2},\ 0\right) = \boldsymbol{(\pm\sqrt{15},\ 0)}$

漸近線の方程式は

$y = \pm\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}x$

$y = \pm\sqrt{4}x$

$\boldsymbol{y = \pm 2x}$

394　焦点が x 軸上にあるので，求める双曲線の方程式は

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

とおくことができる.

主軸の長さは 2 であるから

$2a = 2$，すなわち $a = 1$

また，$\sqrt{a^2 + b^2} = 5$ であるから

$1^2 + b^2 = 25$

$b^2 = 24$

したがって，求める双曲線の方程式は

$\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{24} = 1$

$\boldsymbol{x^2 - \dfrac{y^2}{24} = 1}$

漸近線の方程式は

$y = \pm\dfrac{\sqrt{24}}{1}x$

$\boldsymbol{y = \pm 2\sqrt{6}x}$

395　与えられた方程式を変形すると

$8x^2 - 5y^2 = 40$

$\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{8} = 1$

$\dfrac{x^2}{(\sqrt{5})^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{8})^2} = 1$

焦点の座標は

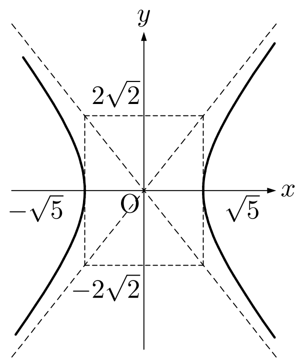
$\left(\pm\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{8})^2},\ 0\right) = \boldsymbol{(\pm\sqrt{13},\ 0)}$

漸近線の方程式は

$y = \pm\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}x$

$y = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x$

$\boldsymbol{y = \pm\dfrac{2\sqrt{10}}{5}x}$



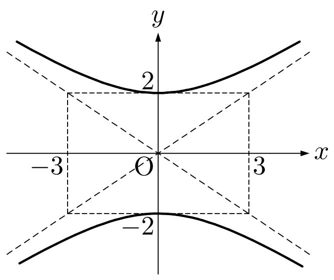
396　$\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{2^2} = -1$

焦点の座標は

$\left(0,\ \pm\sqrt{3^2+2^2}\right) = \boldsymbol{(0,\ \pm\sqrt{13})}$

漸近線の方程式は

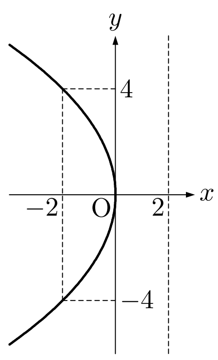
$y = \pm\dfrac{2}{3}x$



397　焦点が x 軸上にあるので，求める放物線の方程式を $y^2 = 4px$ とおくと，$p = -2$ であるから

$y^2 = 4\cdot(-2)x$

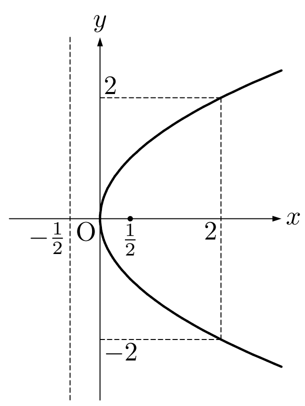
$\boldsymbol{y^2 = -8x}$



398（1）　$y^2 = 4\cdot\dfrac{1}{2}x$

焦点の座標は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)}$

準線の方程式は，$\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{2}}$

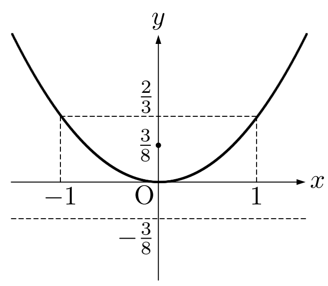


（2）　$x^2 = \dfrac{3}{2}y$

$x^2 = 4\cdot\dfrac{3}{8}y$

焦点の座標は，$\boldsymbol{\left(0,\ \dfrac{3}{8}\right)}$

準線の方程式は，$\boldsymbol{y = -\dfrac{3}{8}}$



399　$y = x + k$ を，$x^2 = y$ に代入すると

$x^2 = x + k$

$x^2 - x - k = 0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，直線と放物線が接するための条件は，$D = 0$ である．

よって

$D = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-k)$

$\quad = 1 + 4k = 0$

したがって，$\boldsymbol{k = -\dfrac{1}{4}}$

400　求める接線の方程式を，$y = -x + q$ とおく．

これを $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6} = 1$ に代入すると

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(-x+q)2}{6} = 1$

$3x^2 + 2(-x+q)^2 = 12$

$3x^2 + 2(x^2 - 2qx + q^2) = 12$

$5x^2 - 4qx + 2q^2 - 12 = 0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，直線と楕円が接するための条件は，$D = 0$ である．

よって

$\dfrac{D}{4} = (-2q)^2 - 5\cdot(2q^2 - 12)$

$\quad = 4q^2 - 10q^2 + 60$

$\quad = -6q^2 + 60$

$\quad = -6(q^2 - 10) = 0$

したがって，$q = \pm\sqrt{10}$ であるから，求める接線の方程式は

$\boldsymbol{y = -x \pm \sqrt{10}}$

401　$y = 2x + k$ を $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$ に代入すると

$x^2 - \dfrac{(2x+k)^2}{3} = 1$

$3x^2 - (2x+k)^2 = 3$

$3x^2 - (4x^2 + 4kx + k^2) = 3$

$x^2 + 4kx + k^2 + 3 = 0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4} = (2k)^2 - 1(k^2 + 3)$

$\quad = 4k^2 - k^2 - 3$

$\quad = 3k^2 - 3$

$\quad = 3(k^2 - 1)$

$\quad = 3(k+1)(k-1)$

i) $D > 0$ のとき

$3(k+1)(k-1)>0$

すなわち，$k<-1$，$1<k$ のとき

共有点の個数は 2 個

ii）$D=0$ のとき

すなわち，$k=\pm1$ のとき

共有点の個数は 1 個

iii）$D<0$ のとき

すなわち，$-1<k<1$ のとき

共有点の個数は 0 個

以上より

$$\begin{cases} k<-1,\ 1<k \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ k=\pm1 \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ -1<k<1 \text{ のとき} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

402（1）$-1\cdot x+2\cdot y=5$

$\boldsymbol{-x+2y=5}$

（2）$0\cdot x+(-\sqrt{5})\cdot y=5$

$-\sqrt{5}y=5$

$y=-\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

$\boldsymbol{y=-\sqrt{5}}$

（3）$\sqrt{5}\cdot x+0\cdot y=5$

$\sqrt{5}x=5$

$x=\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

$\boldsymbol{x=\sqrt{5}}$

403　※ 教科書 P.186 参照

この三角形の面積を S とする．

$\dfrac{5+7+8}{2}=10$ であるから，ヘロンの公式より

$S=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}$

$=\sqrt{(2\cdot5)\cdot5\cdot3\cdot2}$

$=10\sqrt{3}$

内接円の半径を r とすると

$\dfrac{1}{2}(5+7+8)r=10\sqrt{3}$

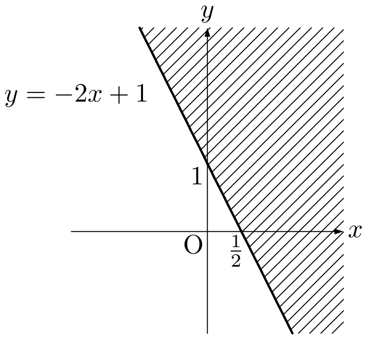
$20r=20\sqrt{3}$

$r=\sqrt{3}$

よって，内接円の半径は $\boldsymbol{\sqrt{3}}$

404（1）　求める領域は，直線 $y=-2x+1$ の上側の部分である．

ただし，境界線を含まない．



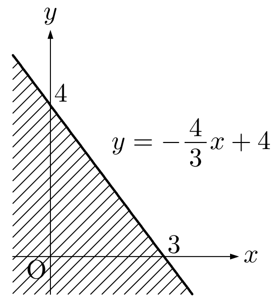
（2）　$4x+3y\leqq 12$

$3y\leqq -4x+12$

$y\leqq -\dfrac{4}{3}x+4$

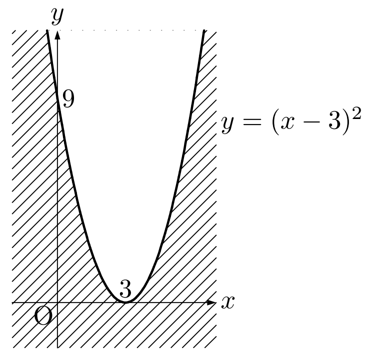
求める領域は，直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+4$ の下側の部分である．

ただし，境界線を含む．



（3）　求める領域は，放物線 $y=(x-3)^2$ の下側の部分である．

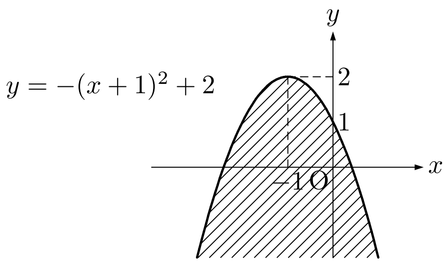
ただし，境界線を含まない．



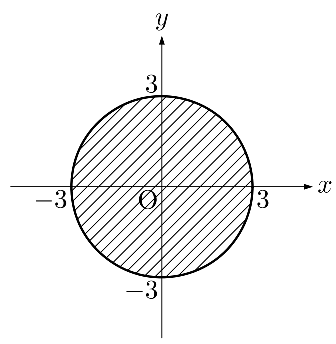
（4）　$y\leqq -x^2-2x+1$

$y\leqq -(x+1)^2+2$

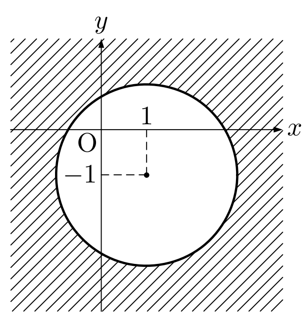
求める領域は，放物線 $y=-(x+1)^2+2$ の下側の部分である．ただし，境界線を含む．



405（1）　求める領域は，円 $x^2+y^2=9$ の内側の部分である．ただし，境界線を含む．

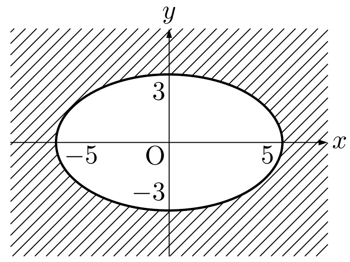


（2）　求める領域は，円 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ の外側の部分である．ただし，境界線を含まない．



（3）　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}>1$

求める領域は，楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の外側の部分である．ただし，境界線を含まない．

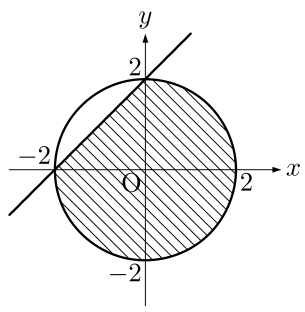


406（1）　$x-y+2>0$ より，$y<x+2$

これは，直線 $y=x+2$ の下側である．ただし，境界線を含まない．

$x^2+y^2<4$ は，円 $x^2+y^2=4$ の内側である．ただし，境界線を含まない．

以上より，求める領域は図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



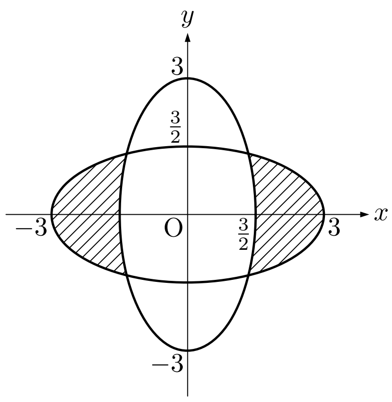
（2）　$x^2+4y^2 \leqq 9$ より，$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4y^2}{9} \leqq 1$

これは，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4y^2}{9}=1$ の内側である．ただし，境界線を含む．

$4x^2+y^2 \geqq 9$ より，$\dfrac{4x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9} \geqq 1$

これは，楕円 $\dfrac{4x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の外側である．ただし，境界線を含む．

以上より，求める領域は図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

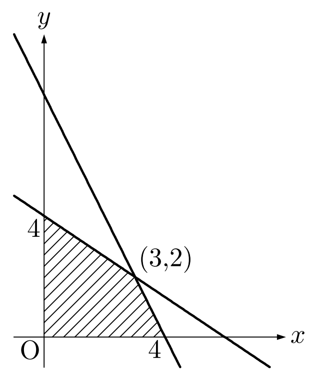


407　$2x+y-8 \leqq 0$ より，$y \leqq -2x+8$

$2x+3y-12 \leqq 0$ より，$y \leqq -\dfrac{2}{3}x+4$

また，2 直線 $y=-2x+8$，$y=-\dfrac{2}{3}x+4$ の交点の座標は，(3, 2)

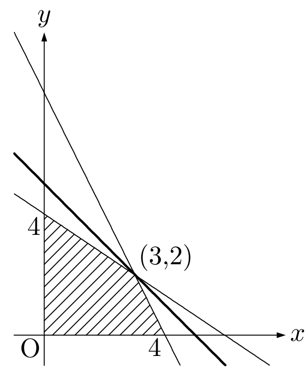
以上より，連立不等式の領域を図示すると



（1）　$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k$

この直線が図の領域と共有点をもち，切片 k の値が最大となるのは，この直線が点 (3, 2) を通るときである．

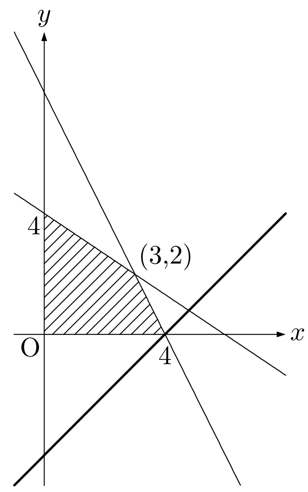
よって，$x=3$，$y=2$ のとき，$x+y$ の値は最大となり，最大値は，$3+2=\mathbf{5}$



（2）　$x-y=k$ とおくと，$y=x-k$

この直線が図の領域と共有点をもち，k の値が最大となるのは，切片 $-k$ が最小となるときで，この直線が点 (4, 0) を通るときである．

よって，$x=4$，$y=0$ のとき，$x-y$ の値は最大となり，最大値は，$4-0=\mathbf{4}$



CHECK

408　求める円の方程式は

$$(x-2)^2+\{y-(-2)\}^2=3^2$$

すなわち，$\boldsymbol{(x-2)^2+(y+2)^2=9}$

409　求める円の方程式を，

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

とおくと，この円が，与えられた 3 点を通ることより

$$\begin{cases} 4+1+2a+b+c=0 \\ 9+1+3a+b+c=0 \\ 4+4+2a+2b+c=0 \end{cases}$$

整理すると，

$$\begin{cases} 2a+b+c=-5 & \cdots ① \\ 3a+b+c=-10 & \cdots ② \\ 2a+2b+c=-8 & \cdots ③ \end{cases}$$

② − ① より，$a=-5$

③ − ① より，$b=-3$

① に $a=-5$，$b=-3$ を代入して

$-10-3+c=-5$，すなわち，$c=8$ よって，求める方程式は，

$\boldsymbol{x^2+y^2-5x-3y+8=0}$

410　A$(-3,\ 2)$，B$(5,\ -6)$，条件を満たす点を P$(x,\ y)$ とすると

$\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = 1 : 3$

これより，$3\mathrm{PA} = \mathrm{PB}$ であるから，$9\mathrm{PA}^2 = \mathrm{PB}^2 \cdots$①

ここで

$\mathrm{PA}^2 = (x+3)^2 + (y-2)^2 = x^2 + 6x + y^2 - 4y + 13$

$\mathrm{PB}^2 = (x-5)^2 + (y+6)^2 = x^2 - 10x + y^2 + 12y + 61$

これらを ① に代入して

$9(x^2 + 6x + y^2 - 4y + 13) = x^2 - 10x + y^2 + 12y + 61$

$9x^2 + 54x + 9y^2 - 36y + 117 = x^2 - 10x + y^2 + 12y + 61$

$8x^2 + 64x + 8y^2 - 48y + 56 = 0$

$x^2 + 8x + y^2 - 6y + 7 = 0$

$(x+4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 + 7 = 0$

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 18$

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = (3\sqrt{2})^2$

逆に，この図形上の任意の点は条件を満たす.

よって，求める軌跡は

中心 $(-4,\ 3)$，半径 $3\sqrt{2}$ の円 である.

411　短軸の長さを $2b$ とすると

$\sqrt{3^2 - b^2} = \sqrt{2}$ より，$b^2 = 9 - 2 = 7$

よって，楕円の方程式は

$\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{7} = 1}$

412　求める楕円の方程式を，$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ とおくと，この楕円が与えられた 2 点を通ることより

$$\begin{cases} \dfrac{4^2}{a^2} + \dfrac{2^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{(-6)^2}{a^2} + \dfrac{1^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} 4a^2 + 16b^2 = a^2b^2 & \cdots① \\ a^2 + 36b^2 = a^2b^2 & \cdots② \end{cases}$$

① − ② より，$3a^2 - 20b^2 = 0$

すなわち，$b^2 = \dfrac{3}{20}a^2 \cdots$③

これを ① に代入して

$4a^2 + 16 \cdot \dfrac{3}{20}a^2 = a^2 \cdot \dfrac{3}{20}a^2$

$4a^2 + \dfrac{12}{5}a^2 = \dfrac{3}{20}a^4$

$3a^4 - 128a^2 = 0$

$a^2(3a^2 - 128) = 0$

$a^2 \fallingdotseq 0$ より，$a^2 = \dfrac{128}{3}$

これを ③ に代入して，$b^2 = \dfrac{3}{20} \cdot \dfrac{128}{3} = \dfrac{32}{5}$

よって，楕円の方程式は，$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{\frac{128}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{32}{5}} = 1}$

または，両辺に 128 をかけて，$\boldsymbol{3x^2 + 20y^2 = 128}$

また，$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\dfrac{128}{3} - \dfrac{32}{5}}$

$= \sqrt{\dfrac{640 - 96}{15}} = \sqrt{\dfrac{544}{15}}$

$= \sqrt{\dfrac{16 \cdot 34}{15}} = 4\sqrt{\dfrac{34}{15}}$

であるから，焦点の座標は，$\boldsymbol{\left(\pm 4\sqrt{\dfrac{34}{15}},\ 0\right)}$

413　方程式は，$\dfrac{x^2}{(\sqrt{7})^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ と表せるから，焦点の座標は

$\left(0,\ \pm\sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2}\right) = \boldsymbol{(0,\ \pm 3)}$

長軸の長さは，$2 \cdot 4 = \boldsymbol{8}$

短軸の長さは，$2 \cdot \sqrt{7} = \boldsymbol{2\sqrt{7}}$

414　焦点が y 軸上にあるので，求める双曲線の方程式は

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

とおくことができる.

主軸の長さは 2 であるから

$2b = 2$，すなわち $b = 1$

また，$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$ であるから

$a^2 + 1^2 = 5$

$a^2 = 4$

したがって，求める双曲線の方程式は

$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = -1$

$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4} - y^2 = -1}$

415　双曲線が点 $(0,\ 1)$ を通るので，方程式は $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ とおくことができ，$x = 0$ のとき，$y = 1$ であるから，$-\dfrac{1}{b^2} = -1$，すなわち，$b^2 = 1$

漸近線の方程式が $y = \pm 2x$ であるから，$\dfrac{b}{a} = 2$

これより，$b = 2a$ となるので，$b^2 = 4a^2$

よって，$a^2 = \dfrac{1}{4}b^2 = \dfrac{1}{4}$

したがって，双曲線の方程式は，$\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} - \dfrac{y^2}{1} = -1$，すなわち，

$\boldsymbol{4x^2 - y^2 = -1}$

また，$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ であるから，焦点の座標は

$\boldsymbol{\left(0,\ \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)}$

416　方程式は，$\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{12})^2} = 1$ と表せるから，焦点の座標は

$\left(\pm\sqrt{2^2 + (\sqrt{12})^2},\ 0\right) = \boldsymbol{(\pm 4,\ 0)}$

漸近線の方程式は

$y = \pm\dfrac{\sqrt{12}}{2}x$

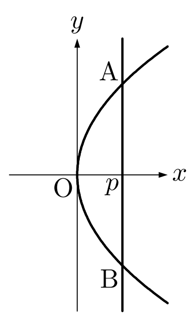
$y = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{2}x$

$\boldsymbol{y = \pm\sqrt{3}x}$

417 求める放物線の方程式は，$x^2 = 4 \cdot 2 \cdot y$ であるから，$\boldsymbol{x^2 = 8y}$

418 $y^2 = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) \cdot y$ より，焦点の座標は，$\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{4},\ 0\right)}$，準線の方程式は，$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{4}}$

419　直線の方程式は，$x = p$ であるから，これを $y^2 = 4px$ に代入して



$y^2 = 4p \cdot p$

$y^2 = 4p^2$

$y = \pm 2p$

よって，$\mathrm{AB} = 2p - (-2p) = \boldsymbol{4p}$

420　求める直線の方程式を $y = mx + n$ とおく.

これを $y^2 = 4px$ に代入して

$$(mx+n)^2=4px$$
$$m^2x^2+2mnx+n^2=4px$$
$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$$

放物線と直線が接するのは，この方程式が 2 重解をもつとき，すなわち $D=0$ のときであるから

$$\frac{D}{4}=(mn-2p)^2-m^2n^2$$
$$=m^2n^2-4mnp+4p^2-m^2n^2$$
$$=-4mnp+4p^2=0$$

$m\fallingdotseq 0$，$p\fallingdotseq 0$ であるから，$n=\dfrac{p}{m}$

よって，$\boldsymbol{y=mx+\dfrac{p}{m}}$

421　接線の方程式は，$1\cdot x+3\cdot y=10$，すなわち，$x+3y=10$ であるから，これを y について解いて

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$$

よって，傾きは $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$，切片は $\boldsymbol{\dfrac{10}{3}}$

422（1）　y 軸の左側　$\cdots$ $x<0$

x 軸の上側　$\cdots$ $y>0$

直線 $y=x+1$ の下側　$\cdots$ $y<x+1$

よって，$\begin{cases}\boldsymbol{x<0}\\ \boldsymbol{y>0}\\ \boldsymbol{y<x+1}\end{cases}$

（2）　直線 $y=-x-2$ の上側　$\cdots$ $y>-x-2$

円 $x^2+y^2=4$ の内側　$\cdots$ $x^2+y^2<4$

よって，$\begin{cases}\boldsymbol{y>-x-2}\\ \boldsymbol{x^2+y^2<4}\end{cases}$

（3）　放物線 $y^2=-4x$ の左側　$\cdots$ $y^2<-4x$

楕円 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ の内側　$\cdots$ $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}<1$

よって，$\begin{cases}\boldsymbol{y^2<-4x}\\ \boldsymbol{\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}<1}\end{cases}$

STEP UP

423（1）　$\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=4 & \cdots ①\\ y=x+3 & \cdots ②\end{cases}$ とする．

② を ① に代入して

$$(x-3)^2+\{(x+3)-4\}^2=4$$

これを解くと

$$(x-3)^2+(x-1)^2=4$$
$$x^2-6x+9+x^2-2x+1=4$$
$$2x^2-8x+6=0$$
$$x^2-4x+3=0$$
$$(x-1)(x-3)=0$$

よって，$x=1,\ 3$

これらを ② に代入して

$x=1$ のとき，$y=1+3=4$

$x=3$ のとき，$y=3+3=6$

したがって，交点の座標は，**(1，4)，(3，6)**

（2）　求める線分の長さは，（1）の 2 点間の距離なので

$$\sqrt{(1-3)^2+(4-6)^2}=\sqrt{8}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

（3）　円の中心の座標は

$$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{4+6}{2}\right)=(2,\ 5)$$

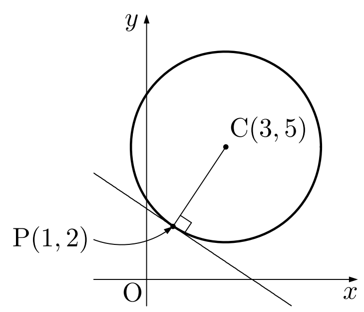
また，円の半径は，（2）の線分の長さの $\dfrac{1}{2}$ だから

$$2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\sqrt{2}$$

よって，求める円の方程式は，$(x-2)^2+(y-5)^2=(\sqrt{2})^2$

すなわち，$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-5)^2=2}$

424



円の中心を C (3, 5)，接点を P (1, 2) とすると，接線は直線 PC と垂直に交わる．

直線 PC の傾きは

$$\frac{5-2}{3-1}=\frac{3}{2}$$

よって，接線は，点 (1, 2) を通り，傾き $-\dfrac{2}{3}$ の直線である．

したがって，求める接線の方程式は

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-1)$$
$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}+2$$
$$\boldsymbol{y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}}$$

または

$$\boldsymbol{2x+3y-8=0}$$

〔別解〕

教科書 p.193 の **2.** の結果を利用すると，求める接線の方程式は

$$(1-3)(x-3)+(2-5)(y-5)=13$$

これを整理して

$$-2(x-3)-3(y-5)=13$$
$$-2x+6-3y+15=13$$
$$\boldsymbol{2x+3y-8=0}$$

425　円の中心は線分 AB の中点なので

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

また，円の半径は，この中心と点 A との距離であるから

$$\sqrt{\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y_1-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left\{\frac{2x_1-(x_1+x_2)}{2}\right\}^2+\left\{\frac{2y_1-(y_1+y_2)}{2}\right\}^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2}$$

よって，円の方程式は

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2$$

これを整理すると

$$x^2-(x_1+x_2)x+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+y^2-(y_1+y_2)y+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2$$

$$x^2-(x_1+x_2)x+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+y^2-(y_1+y_2)y+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2-\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2=0$$

$$x^2-(x_1+x_2)x+\frac{(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2}{4}+y^2-(y_1+y_2)y+\frac{(y_1+y_2)^2-(y_1-y_2)^2}{4}=0$$

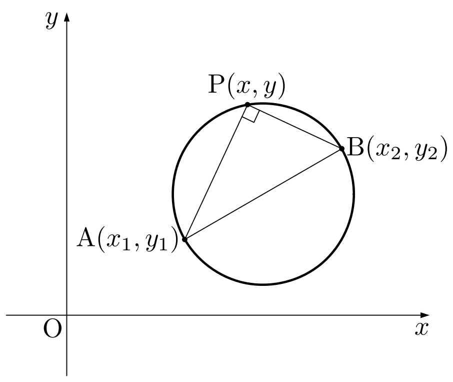
$$x^2-(x_1+x_2)x+\frac{4x_1x_2}{4}+y^2-(y_1+y_2)y+\frac{4y_1y_2}{4}=0$$

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y^2-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$$

よって，$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

〔別解〕

円周上の点を P$(x,\ y)$ とする．



$x \neq x_1$ のとき，直線 AP の傾きは，$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

$x \neq x_2$ のとき，直線 BP の傾きは，$\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$

線分 AB が直径であるから，AP⊥BP となるので，$x \neq x_1$ かつ $x \neq x_2$ のとき

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}\times\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1$$

これより

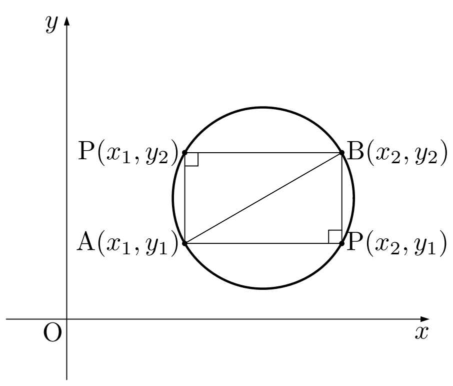
$$\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(x-x_1)(x-x_1)}=-1$$

$$(y-y_1)(y-y_2)=-(x-x_1)(x-x_2)$$

よって，$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0\cdots①$

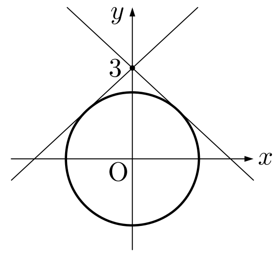
また，$x=x_1$ のとき，$\mathrm{P}(x_1,\ y_2)$ となるので，これは ① を満たす．

同様に，$x=x_2$ のとき，$\mathrm{P}(x_2,\ y_1)$ となるので，これも ① を満たす．



以上より，$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

426（1）　$(0,\ 3)$ を通るこの円の接線は，y 軸と平行にはならないので，求める接線の傾きを m とすると，求める接線の方程式は，$y-3=m(x-0)$，すなわち，$y=mx+3$ とおくことができる．



これを円の方程式に代入して整理すると

$$x^2+(mx+3)^2=5$$

$$x^2+m^2x^2+6mx+9-5=0$$

$$(m^2+1)x^2+6mx+4=0\cdots①$$

① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(3m)^2-(m^2+1)\cdot 4$$

$$=9m^2-4m^2-4$$

$$=5m^2-4$$

曲線と $y=mx+3$ が接するための条件は $D=0$ であるから，$5m^2-4=0$ を解くと

$$5m^2=4$$

$$m^2=\frac{4}{5}$$

$$m=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって，接線の方程式は，$\boldsymbol{y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}x+3}$

また，接点の座標は，m の値を ① に代入して

i）　$m=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のとき

$$\left(\frac{4}{5}+1\right)x^2+6\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+4=0$$

$$\frac{9}{5}x^2+\frac{12}{\sqrt{5}}+4=0$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x+2\right)^2=0$$

よって，$\dfrac{3}{\sqrt{5}}x+2=0$ すなわち，$x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

これより，$y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)+3=\dfrac{5}{3}$

したがって，接点の座標は，$\boldsymbol{\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)}$

ii）　$m=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のとき

$$\left(\frac{4}{5}+1\right)x^2+6\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+4=0$$

$$\frac{9}{5}x^2-\frac{12}{\sqrt{5}}+4=0$$

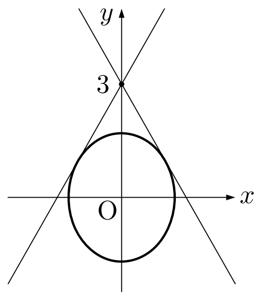
$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}x-2\right)^2=0$$

よって，$\dfrac{3}{\sqrt{5}}x-2=0$ すなわち，$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

これより，$y=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{3}+3=\dfrac{5}{3}$

したがって，接点の座標は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)}$

（2）　$(0,\ 3)$ を通るこの楕円の接線は，y 軸と平行にはならないので，求める接線の傾きを m とすると，求める接線の方程式は，$y-3=m(x-0)$，すなわち，$y=mx+3$ とおくことができる．



これを楕円の方程式に代入して整理すると

$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{(mx+3)^2}{3}=1$

$3x^2+2(m^2x^2+6mx+9)=6$

$3x^2+2m^2x^2+12mx+18-6=0$

$(2m^2+3)x^2+12mx+12=0\cdots①$

① の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(6m)^2-(2m^2+3)\cdot 12$

$=36m^2-24m^2-36$

$=12m^2-36$

曲線と $y=mx+3$ が接するための条件は $D=0$ であるから，$12m^2-36=0$ を解くと

$12m^2=36$

$m^2=3$

$m=\pm\sqrt{3}$

よって，接線の方程式は，$\boldsymbol{y=\pm\sqrt{3}x+3}$

また，接点の座標は，m の値を ① に代入して

i）　$m=\sqrt{3}$ のとき

$(2\cdot 3+3)x^2+12\cdot\sqrt{3}x+12=0$

$9x^2+12\sqrt{3}x+12=0$

$3x^2+4\sqrt{3}x+4=0$

$(\sqrt{3}x+2)^2=0$

よって，$\sqrt{3}x+2=0$ すなわち，$x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

これより，$y=\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)+3=1$

したがって，接点の座標は，$\boldsymbol{\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 1\right)}$

ii）　$m=-\sqrt{3}$ のとき

$(2\cdot 3+3)x^2+12\cdot(-\sqrt{3})x+12=0$

$9x^2-12\sqrt{3}x+12=0$

$3x^2-4\sqrt{3}x+4=0$

$(\sqrt{3}x-2)^2=0$

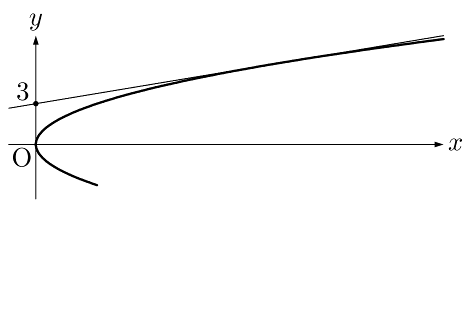
よって，$\sqrt{3}x-2=0$ すなわち，$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

これより，$y=-\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+3=1$

したがって，接点の座標は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ 1\right)}$

（3）　$(0,\ 3)$ を通るこの放物線の接線で，y 軸と平行なものは，$\boldsymbol{x=0}$ であり，接点は，$\boldsymbol{(0,\ 0)}$ である．

また，y 軸と平行にはならない接線の傾きを m とすると，求める接線の方程式は，$y-3=m(x-0)$，すなわち，$y=mx+3$ とおくことができる．



これを放物線の方程式に代入して整理すると

$(mx+3)^2=2x$

$m^2x^2+6mx+9-2x=0$

$m^2x^2+(6m-2)x+9=0$

$m^2x^2+2(3m-1)x+9=0\cdots①$

① の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(3m-1)^2-m\cdot 9$

$=9m^2-6m+1-9m$

$=-6m+1$

曲線と $y=mx+3$ が接するための条件は $D=0$ であるから，$-6m+1=0$ を解くと

$-6m=-1$

$m=\dfrac{1}{6}$

よって，接線の方程式は，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{6}x+3}$

また，接点の座標は，m の値を ① に代入して

$\dfrac{1}{36}x^2+2\left(3\cdot\dfrac{1}{6}-1\right)x+9=0$

$\dfrac{1}{36}x^2-x+9=0$

$x^2-36x+9\cdot 36=0$

$(x-18)^2=0$

よって，$x=18$

これより，$y^2=2\cdot 18=36$

$y>0$ より，$y=6$

したがって，接点の座標は，$\boldsymbol{(18,\ 6)}$

427（1）　与えられた不等式は

$\begin{cases} x+2y>0 \\ 3x-y-2<0 \end{cases}$　①

または

$\begin{cases} x+2y<0 \\ 3x-y-2>0 \end{cases}$　②

と同値である．

① の表す領域は

$x+2y>0$ より，$y>-\dfrac{1}{2}x$

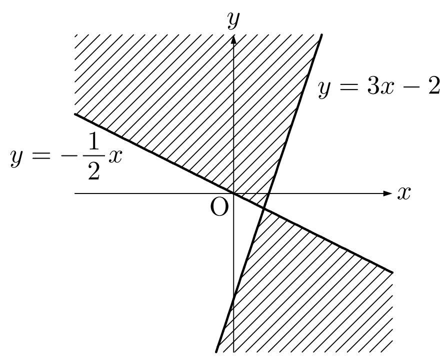
$3x-y-2<0$ より，$y>3x-2$

また，② の表す領域は

$x+2y<0$ より，$y<-\dfrac{1}{2}x$

$3x-y-2>0$ より，$y<3x-2$

以上より，求める領域は，図の斜線部分である．ただし，境界は含まない．



（2）　与えられた不等式は

$\begin{cases} x^2-y\geqq 0 \\ x-y+2\geqq 0 \end{cases}$　①

または

$\begin{cases} x^2-y\leqq 0 \\ x-y+2\leqq 0 \end{cases}$　②

と同値である．

① の表す領域は

$x^2-y \geqq 0$ より，$y \leqq x^2$

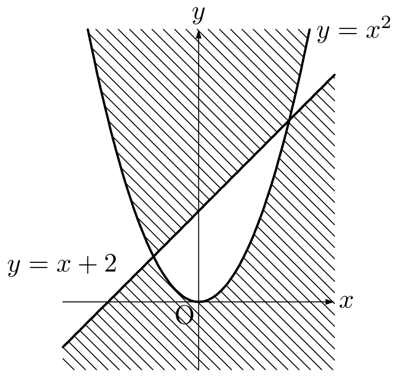
$x-y+2 \geqq 0$ より，$y \leqq x+2$

また，② の表す領域は

$x^2-y \leqq 0$ より，$y \geqq x^2$

$x-y+2 \leqq 0$ より，$y \geqq x+2$

以上より，求める領域は，図の斜線部分である．ただし，境界を含む．

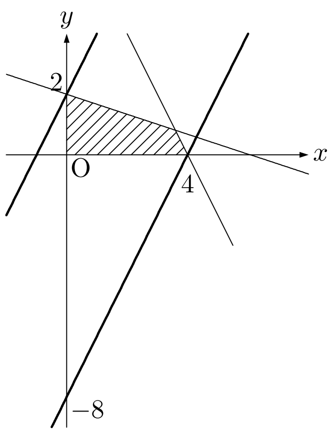


428　$y-2x=k$ とおくと，$y=2x+k\cdots$①

（1）　$2x+y \leqq 8$ より，$y \leqq -2x+8$

$x+3y \leqq 6$ より，$y \leqq -\dfrac{1}{3}x+2$

よって，連立不等式の領域は図のようになる．

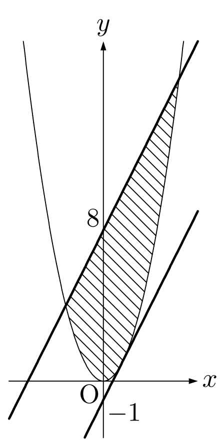


直線 ① が図の領域と共有点をもち，切片 k の値が最大となるのは，この直線が点 $(0,\ 2)$ を通るときであるから，最大値は $y-2x=2-0=2$

また，切片 k の値が最小となるのは，この直線が点 $(4,\ 0)$ を通るときであるから，最小値は $y-2x=0-2\cdot 4=-8$

以上より，$-8 \leqq k \leqq 2$ であるから，$\boldsymbol{-8 \leqq y-2x \leqq 2}$

（2）　連立不等式の領域は図のようになる．



直線 ① が図の領域と共有点をもち，切片 k の値が最大となるのは，この直線が点 $(0,\ 8)$ を通るときであるから，最大値は $y-2x=8-0=8$

また，切片 k の値が最小となるのは，この直線が放物線と接するときである．

$y=2x+k$ を $y=x^2$ に代入して

$x^2=2x+k$

$x^2-2x-k=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-k)=1+k$

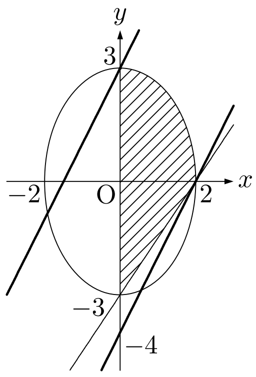
直線と放物線が接するための条件は $D=0$ であるから，$1+k=0$ より，$k=-1$

以上より，$-1 \leqq k \leqq 8$ であるから，$\boldsymbol{-1 \leqq y-2x \leqq 8}$

（3）　$9x^2+4y^2 \leqq 36$ より，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} \leqq 1$

$3x \leqq 2y+6$ より，$y \geqq \dfrac{3}{2}x-3$

よって，連立不等式の領域は図のようになる．



直線 ① が図の領域と共有点をもち，切片 k の値が最大となるのは，この直線が点 $(0,\ 3)$ を通るときであるから，最大値は $y-2x=3-0=3$

また，切片 k の値が最小となるのは，この直線が点 $(2,\ 0)$ を通るときであるから，最小値は $y-2x=0-2\cdot 2=-4$

以上より，$-4 \leqq k \leqq 3$ であるから，$\boldsymbol{-4 \leqq y-2x \leqq 3}$

429　点 P の座標を $(X,\ Y)$ とすると，点 P は双曲線上の点なので

$\dfrac{X^2}{a^2}-\dfrac{Y^2}{b^2}=1$

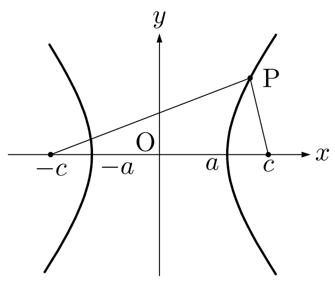
これより，$Y^2=\dfrac{b^2}{a^2}X^2-b^2$

また，$c=\sqrt{a^2+b^2}$ より，$c^2=a^2+b^2$ であるから，$c^2-b^2=a^2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{PF} &= \sqrt{(X-c)^2+Y^2} \\
&= \sqrt{X^2-2cX+c^2+Y^2} \\
&= \sqrt{X^2-2cX+c^2+\frac{b^2}{a^2}X^2-b^2} \\
&= \sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)X^2-2cX+(c^2-b^2)} \\
&= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}X^2-2cX+a^2} \\
&= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}X^2-2cX+a^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{c}{a}X-a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}X-a\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PF}' &= \sqrt{(X+c)^2+Y^2} \\
&= \sqrt{X^2+2cX+c^2+Y^2} \\
&= \sqrt{X^2+2cX+c^2+\frac{b^2}{a^2}X^2-b^2} \\
&= \sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)X^2+2cX+(c^2-b^2)} \\
&= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}X^2+2cX+a^2} \\
&= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}X^2+2cX+a^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{c}{a}X+a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}X+a\right|
\end{aligned}
$$

i）　$X>0$ のとき



$X \geqq a,\ a>0,\ c>0$ より，$\dfrac{c}{a}X \geqq c$

また，$c>a$ であるから

$\dfrac{c}{a}X \geqq c > a$，すなわち，$\dfrac{c}{a}X > a$

よって，$\dfrac{c}{a}X - a > 0$ であるから

$\mathrm{PF} = \left|\dfrac{c}{a}X-a\right| = \dfrac{c}{a}X-a$

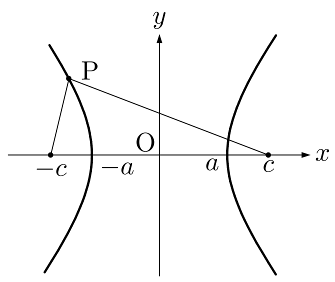
また，$\dfrac{c}{a}X \geqq c > 0,\ a>0$ より，$\dfrac{c}{a}X+a>0$

よって，$\mathrm{PF}' = \left|\dfrac{c}{a}X+a\right| = \dfrac{c}{a}X+a$

以上より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PF}-\mathrm{PF}' &= \frac{c}{a}X-a-\left(\frac{c}{a}X+a\right) \\
&= -2a
\end{aligned}
$$

ii）　$X<0$ のとき



$X \leqq -a,\ a>0,\ c>0$ より，$\dfrac{c}{a}X \leqq -c$

また，$-c<-a$ であるから

$\dfrac{c}{a}X \leqq -c < -a$，すなわち，$\dfrac{c}{a}X < -a$

よって，$\dfrac{c}{a}X+a<0$ であるから

$\mathrm{PF}' = \left|\dfrac{c}{a}X+a\right| = -\dfrac{c}{a}X-a$

また，$\dfrac{c}{a}X \leqq -c < 0,\ -a<0$ より，$\dfrac{c}{a}X-a<0$

よって，$\mathrm{PF} = \left|\dfrac{c}{a}X-a\right| = -\dfrac{c}{a}X+a$

以上より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PF}-\mathrm{PF}' &= -\frac{c}{a}X+a-\left(-\frac{c}{a}X-a\right) \\
&= 2a
\end{aligned}
$$

i），ii）より，$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'| = 2a$

PLUS

430（1）求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2\cdot5+3\cdot(-5)}{3-2} \\
&= -10-15 = -25 \\
y &= \frac{-2\cdot7+3\cdot(-3)}{3-2} \\
&= -14-9 = -23
\end{aligned}
$$

よって，求める座標は，$\boldsymbol{(-25,\ -23)}$

（2）求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-3\cdot5+2\cdot(-5)}{2-3} \\
&= \frac{-15-10}{-1} = 25 \\
y &= \frac{-3\cdot7+2\cdot(-3)}{2-3} \\
&= \frac{-21-6}{-1} = 27
\end{aligned}
$$

よって，求める座標は，$\boldsymbol{(25,\ 27)}$

（3）求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2\cdot5+5\cdot(-5)}{5-2} \\
&= \frac{-10-25}{3} = -\frac{35}{3} \\
y &= \frac{-2\cdot7+5\cdot(-3)}{5-2} \\
&= \frac{-14-15}{3} = -\frac{29}{3}
\end{aligned}
$$

よって，求める座標は，$\boldsymbol{\left(-\frac{35}{3},\ -\frac{29}{3}\right)}$

（4）求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-5\cdot5+2\cdot(-5)}{2-5} \\
&= \frac{-25-10}{-3} = \frac{35}{3} \\
y &= \frac{-5\cdot7+2\cdot(-3)}{2-5} \\
&= \frac{-35-6}{-3} = \frac{41}{3}
\end{aligned}
$$

よって，求める座標は，$\boldsymbol{\left(\frac{35}{3},\ \frac{41}{3}\right)}$

431　点 C の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-4\cdot15+7\cdot22)}{7-4} \\
&= \frac{-60+154}{3} = \frac{94}{3} \\
y &= \frac{-4\cdot37+7\cdot(-14)}{7-4} \\
&= \frac{-148-98}{3} = -\frac{246}{3}
\end{aligned}
$$

よって，点 C の座標は，$\left(\dfrac{94}{3},\ -\dfrac{246}{3}\right)$

求める点の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{4\cdot15+3\cdot\frac{94}{3}}{3+4} \\
&= \frac{60+94}{7} = \frac{154}{7} = 22 \\
Y &= \frac{4\cdot37+3\cdot\left(-\frac{246}{3}\right)}{3+4} \\
&= \frac{148-246}{7} = -\frac{98}{7} = -14
\end{aligned}
$$

よって，求める座標は，$\boldsymbol{(22,\ -14)}$