2章　方程式と不等式

§1　方程式（p.34〜p.47）

問 1

（1）$x^2+3x-18=0$

$(x+6)(x-3)=0$

$\boldsymbol{x=-6,\ 3}$

（2）$x=\pm\sqrt{64}$

$\boldsymbol{x=\pm 8}$

（3）$(3x+2)^2=0$

$\boldsymbol{x=-\dfrac{2}{3}}$

（4）$(7x+3)(x+3)=0$

$\boldsymbol{x=-\dfrac{3}{7},\ -3}$

問 2

（1）$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$

$=\boldsymbol{\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}}$

（2）両辺を 2 倍して

$2x^2-x-5=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{4}}$

（3）$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-9)}}{2\cdot1}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{45}}{2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}}$

（4）$x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}$

$=\dfrac{-6\pm\sqrt{24}}{6}$

$=\dfrac{-6\pm2\sqrt{6}}{6}$

$=\boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{6}}{3}}$

〔別解〕

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-3\cdot1}}{3}$

$=\boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{6}}{3}}$

問 3

（1）$(2x+3)^2=0$

$\boldsymbol{x=-\dfrac{3}{2}}$

（2）$\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2=0$

$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{4}}$

問 4

（1）$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{-11}}{2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3\pm\sqrt{11}\,i}{2}}$

（2）$x^2=-16$

$x=\pm\sqrt{-16}$

$=\pm\sqrt{16}\,i$

$=\boldsymbol{\pm4\,i}$

（3）$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}$

$=\dfrac{-3\pm\sqrt{-23}}{4}$

$=\boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{23}\,i}{4}}$

（4）$x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot4\cdot5}}{2\cdot4}$

$=\dfrac{4\pm\sqrt{-64}}{8}$

$=\dfrac{4\pm8\,i}{8}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1\pm2\,i}{2}}$

〔別解〕

$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot5}}{4}$

$=\dfrac{2\pm\sqrt{-16}}{4}$

$=\dfrac{2\pm4\,i}{4}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1\pm2\,i}{2}}$

問 5　それぞれの 2 次方程式の判別式を D とする．

（1）$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot4$

$=9-16=-7<0$

よって，**異なる 2 つの虚数解をもつ**.

（2） $D=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-6)$

$=1+48=49>0$

よって，**異なる 2 つの実数解をもつ**.

（3） $D=(-6)^2-4\cdot9\cdot1$

$=36-36=0$

よって，**2 重解をもつ**.

〔別解〕

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-9\cdot1$

$=9-9=0$

よって，**2 重解をもつ**.

問 6

それぞれの 2 次方程式の判別式を D とすると，2 重解をもつための条件は，$D=0$ である.

（1） $D=6^2-4\cdot1(2k+1)$

$=36-8k-4$

$=-8k+32=0$

よって，$k=4$

このとき，重解は

$x=-\dfrac{b}{2a}$

$=-\dfrac{6}{2\cdot1}$

$=-3$

したがって，$\boldsymbol{k=4}$**，重解は** $\boldsymbol{x=-3}$

（2） $D=\{-(k+2)\}^2-4\cdot1\cdot(3k+1)$

$=k^2+4k+4-12k-4$

$=k^2-8k$

$=k(k-8)=0$

よって，$k=0,\ 8$

i) $k=0$ のときの重解は

$x=-\dfrac{b}{2a}$

$=-\dfrac{-(k+2)}{2\cdot1}$

$=\dfrac{k+2}{2}$

$=\dfrac{0+2}{2}=1$

ii) $k=8$ のときの重解は

$x=\dfrac{k+2}{2}$

$=\dfrac{8+2}{2}=5$

したがって

$$\begin{cases}\boldsymbol{k=0}\ \textbf{のとき　重解は}\ \boldsymbol{x=1}\\ \boldsymbol{k=8}\ \textbf{のとき　重解は}\ \boldsymbol{x=5}\end{cases}$$

問 7

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=7,\quad \alpha\beta=\dfrac{c}{a}=9$

（1） 与式 $=\alpha\beta-2\alpha-2\beta+4$

$=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$

$=9-2\cdot7+4$

$=9-14+4=\mathbf{-1}$

（2） 与式 $=\dfrac{\beta^2}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{7^2-2\cdot9}{9}$

$=\dfrac{49-18}{9}$

$=\boldsymbol{\dfrac{31}{9}}$

（3） 与式 $=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=7^3-3\cdot9\cdot7$

$=7(7^2-3\cdot9)$

$=7(49-27)$

$=7\cdot22=\mathbf{154}$

〔別解〕

与式 $=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$

$=7(31-9)$

$=7\cdot22=\mathbf{154}$

問 8

（1）　$x^2-5x+3=0$ を解くと

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-12}}{2}$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

よって

$$与式=\left(\boldsymbol{x-\frac{5+\sqrt{13}}{2}}\right)\left(\boldsymbol{x-\frac{5-\sqrt{13}}{2}}\right)$$

（2）　$x^2-4x+1=0$ を解くと

$$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 1}$$
$$=2\pm\sqrt{3}$$

よって

$$与式=\{x-(2+\sqrt{3})\}\{x-(2-\sqrt{3})\}$$
$$=\boldsymbol{(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}$$

（3）　$3x^2+2x+4=0$ を解くと

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{3}$$
$$=\frac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{3}$$

よって

与式

$$=\boldsymbol{3\left(x-\frac{-1+\sqrt{11}\,i}{3}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{11}\,i}{3}\right)}$$

または

$$=\boldsymbol{3\left(x+\frac{1-\sqrt{11}\,i}{3}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{11}\,i}{3}\right)}$$

（4）　$4x^2+8x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+4}}{4}$$
$$=\frac{-4\pm 2\sqrt{5}}{4}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって

$$与式=\boldsymbol{4\left(x-\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

または

$$=\boldsymbol{4\left(x+\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

または

$$=\boldsymbol{(2x+2-\sqrt{5})(2x+2+\sqrt{5})}$$

問 9

（1）$x^2=X$ とおくと

$$X^2-2X-35=0$$
$$(X-7)(X+5)=0$$
$$(x^2-7)(x^2+5)=0$$

$x^2-7=0$ より，$x=\pm\sqrt{7}$

$x^2+5=0$ より，$x=\pm\sqrt{5}\,i$

よって，$\boldsymbol{x=\pm\sqrt{7},\quad \pm\sqrt{5}\,i}$

（2）$x^2=X$ とおく．

$$x(x^4-5x^2+4)=0$$
$$x(X^2-5X+4)=0$$
$$x(X-1)(X-4)=0$$
$$x(x^2-1)(x^2-4)=0$$
$$x(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$$

よって，$\boldsymbol{x=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2}$

問 10

（1）　$P(x)=2x^3-7x^2+2x+3$ とおくと

$P(1)=0$ なので，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる．

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -7 & 2 & 3 & 1 \\ & 2 & -5 & -3 & \\ \hline 2 & -5 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$P(x)=(x-1)(2x^2-5x-3)$$
$$=(x-1)(x-3)(2x+1)$$

よって，$(x-1)(x-3)(2x+1)=0$ であるから

$\boldsymbol{x=1,\ 3,\ -\frac{1}{2}}$

（2）　$P(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$ とおくと

$P(1)=0$ なので，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる．

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$P(x)=(x-1)(x^3+2x^2+x+2)$$

$Q(x)=x^3+2x^2+x+2$ とおくと

$Q(-2)=0$ なので，$Q(x)$ は $x+2$ で割り切れる．

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ & -2 & 0 & -2 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$Q(x)=(x+2)(x^2+1)$ であるから

$P(x)=(x-1)(x+2)(x^2+1)$

よって，$(x-1)(x+2)(x^2+1)=0$ であるから

$\boldsymbol{x=1,\ -2,\ \pm i}$

問 11 3 式を，上から①，②，③とする．

（1）

$$\begin{array}{lrll} ①\times 2 & & 2x+2y+2z & =6 \\ ② & +) & 2x+3y-2z & =-1 \\ \hline & & 4x+5y & =5\cdots ④ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrll} ①\times 3 & & 3x+3y+3z & =9 \\ ③ & -) & x+2y+3z & =2 \\ \hline & & 2x+y & =7\cdots ⑤ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrll} ⑤\times 5 & & 10x+5y & =35 \\ ④ & -) & 4x+5y & =5 \\ \hline & & 6x & =30 \\ & & x & =5\cdots ⑥ \end{array}$$

⑥を⑤に代入して，$y=-3\cdots ⑦$

⑥，⑦を①に代入して，$z=1$

よって， $\boldsymbol{(x,y,z)=(5,\ -3,\ 1)}$

（2）①より，$y=3x\cdots ①'$

これを，②，③に代入して

$x-3x+2z=6$

$-2x+2z=6\cdots ②'$

$2x-3\cdot 3x+z=9$

$-7x+z=9\cdots ③'$

$$\begin{array}{lrll} ②'\div 2 & & -x+z & =3 \\ ③' & -) & -7x+z & =9 \\ \hline & & 6x & =-6 \\ & & x & =-1\cdots ④ \end{array}$$

④を①' に代入して，$y=-3$

④を②' に代入して，$z=2$

よって， $\boldsymbol{(x,y,z)=(-1,\ -3,\ 2)}$

問 12 2 式を，上から①，②とする．

（1）①より，$y=-2x+3\cdots ①'$

これを，②に代入して

$2x^2-(-2x+3)^2-3(-2x+3)+2=0$

$2x^2-(4x^2-12x+9)-6x-9+2=0$

$-2x^2+18x-16=0$

$x^2-9x+8=0$

$(x-1)(x-8)=0$

$x=1,\ 8$

これらを①' に代入して

$x=1$ のとき，$y=1$

$x=8$ のとき，$y=-13$

よって， $\boldsymbol{(x,y)=(1,\ 1),\ (8,\ -13)}$

（2）①より $x=y+2 \quad \cdots ①'$

②に代入して

$(y+2)^2+(y+2)y+y^2=5$

$y^2+4y+4+y^2+2y+y^2-5=0$

$3y^2+6y-1=0$

$$y=\frac{-3\pm\sqrt{(-3)^2-3\cdot(-1)}}{3}$$

$$=\frac{-3\pm 2\sqrt{3}}{3}\cdots ③$$

③を①' に代入

$$x=\frac{-3\pm 2\sqrt{3}}{3}+2=\frac{-3\pm 2\sqrt{3}+6}{3}$$

$$=\frac{3\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

よって

$$\boldsymbol{(x,y)=\left(\frac{3\pm 2\sqrt{3}}{3},\quad \frac{-3\pm 2\sqrt{3}}{3}\right)}$$

（複号同順）

問 13

（1）$2x-1=\pm 1$

$2x=1\pm 1$

$$x=\frac{1\pm 1}{2}$$

$\boldsymbol{x=0,\ 1}$

（2）$|3x-10|=5$

$3x-10=\pm 5$

$3x=10\pm 5$

$$x=\frac{10\pm 5}{3}$$

$$\boldsymbol{x=5,\ \frac{5}{3}}$$

問 14

（1） 両辺に $(x+3)(x-2)$ をかけると，

$6(x-2)+(x+3)=4x$

$6x-12+x+3=4x$

$3x=9$

$\boldsymbol{x=3}$

（2） 両辺に (x^2-4) をかけると，

$x(x-2)-3(x+2)=2x^2$

$x^2-2x-3x-6-2x^2=0$

$-x^2-5x-6=0$

$x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x+3)=0$

$x=-2,\ -3$

ここで，$x=-2$ は元の方程式の分母を 0 にするので無縁解である．

よって，$\boldsymbol{x=-3}$

問 15

（1） 両辺を 2 乗すると

$x+1=(x-5)^2$

$x+1=x^2-10x+25$

$x^2-11x+24=0$

$(x-3)(x-8)=0$

$x=3,\ 8$

ｉ） $x=3$ のとき

左辺 $=2$，右辺 $=-2$ 　不適

ii） $x=8$ のとき

左辺 $=3$，右辺 $=3$

よって，$\boldsymbol{x=8}$

（2） 両辺を 2 乗すると

$25-x^2=(x-1)^2$

$25-x^2=x^2-2x+1$

$2x^2-2x-24=0$

$x^2-x-12=0$

$(x-4)(x+3)=0$

$x=4,\ -3$

ｉ） $x=4$ のとき

左辺 $=3$，右辺 $=3$

ii） $x=-3$ のとき

左辺 $=4$，右辺 $=-4$ 　不適

よって，$\boldsymbol{x=4}$

問 16

（1） 両辺の係数，定数項を比較して

$\boldsymbol{a=-2,\ \ b=6}$

（2） 右辺を x について整理すると

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=ax^2+bx-ax-b\\&=ax^2+(b-a)x-b\end{aligned}$$

よって，　$x^2-1=ax^2+(b-a)x-b$

この等式が，x についての恒等式になるための条件は

$$\begin{cases}a=1\\b-a=0\\-b=-1\end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=1,\ b=1}$

問 17

（1） 右辺を x について整理すると

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=a+bx-b+c(x^2-3x+2)\\&=cx^2+(b-3c)x+(a-b+2c)\end{aligned}$$

よって

$3x^2+2x+5=cx^2+(b-3c)x+(a-b+2c)$

これが x についての恒等式になるためには，

$$\begin{cases}c=3\\b-3c=2\\a-b+2c=5\end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=10,\ \ b=11,\ \ c=3}$

（2） 右辺を x について整理すると

右辺

$=(x^3+3x^2+3x+1)+a(x^2+2x+1)+bx+b+c$

$=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+3)x+(a+b+c+1)$

よって

x^3-2x^2-3x+5

$=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+3)x+(a+b+c+1)$

この等式が，x についての恒等式になるための条件は

$$\begin{cases}a+3=-2\\2a+b+3=-3\\a+b+c+1=5\end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-5,\ \ b=4,\ \ c=5}$

〔別解〕

$x+1=X$ とおくと，$x=X-1$ となる．

左辺を X について整理すると，

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(X-1)^3-2(X-1)^2-3(X-1)+5\\&=X^3-3X^2+3X-1\\&\qquad-2(X^2-2X+1)-3X-3+5\\&=X^3-5X^2+4X+5\end{aligned}$$

よって

$X^3-5X^2+4X+5=X^3+aX^2+bX+c$

両辺の係数を比較して，$\boldsymbol{a=-5,\ \ b=4,\ \ c=5}$

問 18

（1）
$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\frac{a(x-1)}{(x-3)(x-1)}+\frac{b(x-3)}{(x-1)(x-3)}\\&=\frac{ax-a+bx-3b}{(x-3)(x-1)}\\&=\frac{(a+b)x+(-a-3b)}{(x-3)(x-1)}\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{1}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{(a+b)x+(-a-3b)}{(x-3)(x-1)}$

この等式が，x についての恒等式になるための条件は

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a-3b=1 \end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b=-\frac{1}{2}}$

（2）
$$\begin{aligned} 右辺 &= \frac{a(x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)} + \frac{(bx+c)(x-1)}{(x^2+1)(x-1)} \\ &= \frac{ax^2+a+bx^2-bx+cx-c}{(x-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2+(-b+c)x+(a-c)}{(x-1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2+(-b+c)x+(a-c)}{(x-1)(x^2+1)}$$

この等式が，x についての恒等式になるための条件は

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -b+c=2 \\ a-c=0 \end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=-1}$，$\boldsymbol{c=1}$

問 19

（1）
$$\begin{aligned} 右辺 &= (x+y)^2(x-y)^2+y^2(x+y)^2 \\ &\qquad +y^2(x-y)^2+y^4 \\ &= \{(x+y)(x-y)\}^2 \\ &\qquad +y^2\{(x+y)^2+(x-y)^2\}+y^4 \\ &= (x^2-y^2)^2+y^2(2x^2+2y^2)+y^4 \\ &= x^4-2x^2y^2+y^4+2x^2y^2+2y^4+y^4 \\ &= x^4+4y^4 = 左辺 \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} 左辺 &= a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2 \\ 右辺 &= a^2c^2+2abcd+b^2d^2-(a^2d^2+2abcd+b^2c^2) \\ &= a^2c^2+b^2d^2-a^2d^2-b^2c^2 \end{aligned}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

問 20

$x+y+z=0$ より，$z=-(x+y)$ なので

$$\begin{aligned} 左辺 &= x^3+y^3+\{-(x+y)\}^3 \\ &= x^3+y^3-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \\ &= -3x^2y-3xy^2 \\ 右辺 &= 3xy\{-(x+y)\} \\ &= -3x^2y-3xy^2 \end{aligned}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

問 21

（1）$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

$$\begin{aligned} 左辺 &= \frac{2\cdot bk+3b}{b} \\ &= \frac{b(2k+3)}{b} = 2k+3 \\ 右辺 &= \frac{2\cdot dk+3d}{d} \\ &= \frac{d(2k+3)}{d} = 2k+3 \end{aligned}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

（2）$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$

$$\begin{aligned} 左辺 &= \frac{bk-b}{bk+b} \\ &= \frac{b(k-1)}{b(k+1)} = \frac{k-1}{k+1} \\ 右辺 &= \frac{dk-d}{dk+d} \\ &= \frac{d(k-1)}{d(k+1)} = \frac{k-1}{k+1} \end{aligned}$$

よって，左辺 $=$ 右辺