2章　方程式と不等式

練習問題 2-A

1. (1) $2x - 6x < 8 - 3$

$-4x < 5$

$\boldsymbol{x > -\frac{5}{4}}$

(2) 両辺を6倍して

$24 + 4x \geqq 18x + 3$

$4x - 18x \geqq 3 - 24$

$-14x \geqq -21$

$\boldsymbol{x \leqq \frac{3}{2}}$

(3) $5x - 2x^2 + 3 > 0$

$2x^2 - 5x - 3 < 0$

$(2x+1)(x-3) < 0$

よって, $\boldsymbol{-\frac{1}{2} < x < 3}$

(4) $(x-3)(x+2) \geqq 0$

よって, $\boldsymbol{x \leqq -2,\ 3 \leqq x}$

2. 横の長さを $x\,\mathrm{cm}$ とすると, 縦の長さは $(12-x)\,\mathrm{cm}$ となるので

$x(12-x) \leqq 20$　ただし, $0 < x < 12$

これを解くと,

$12x - x^2 - 20 \leqq 0$

$x^2 - 12x + 20 \geqq 0$

$(x-10)(x-2) \geqq 0$

$x \leqq 2,\ 10 \leqq 10$

$0 < x < 12$ より, 求める範囲は

$\boldsymbol{0 < x \leqq 2,\ 10 \leqq x < 12}$

3. (1) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ とおく.

$P(1) = 0$ より

$P(x) = (x-1)(x^2 - x - 2)$

$= (x-1)(x-2)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より $\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 1,\ 2 \leqq x}$

(2) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ とおく.

$P(-1) = 0$ より

$P(x) = (x+1)(2x^2 + x - 10)$

$= (x+1)(x-2)(2x+5)$

x	$\cdots$	$-\frac{5}{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$2x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

表より $\boldsymbol{x < -\frac{5}{2},\ -1 < x < 2}$

4. (1) 左辺 $-$ 右辺 $= \dfrac{a^2+b^2}{2} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$= \dfrac{2a^2 + 2b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)}{4}$

$= \dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{4}$

$= \dfrac{(a-b)^2}{4} \geqq 0$

よって, $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

等号が成り立つのは, $a-b=0$ すなわち $a=b$ のとき

(2) 左辺 $-$ 右辺 $= a^3 + b^3 - (a^2b + ab^2)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab)$

$= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a+b)(a-b)^2$

ここで, $a > 0,\ b > 0$ より, $a + b > 0$

また, $(a-b)^2 \geqq 0$ であるから,

$(a+b)(a-b)^2 \geqq 0$

よって, $a^3 + b^3 \geqq a^2b + ab^2$

等号が成り立つのは, $a-b=0$ すなわち $a=b$ のとき

5. (1)

逆　: **$xy = 0$ ならば, $x = 0$ である.　偽**

(反例　$x = 1,\ y = 0$)

対偶: **$xy \fallingdotseq 0$ ならば, $x \fallingdotseq 0$ である.　真**

（2）

逆　**$x=1$ または $x=-1$ ならば，$x^2=1$ である．　真**

対偶　**$x \neq 1$ かつ $x \neq -1$ ならば，$x^2 \neq 1$ である．　真**

6.（1）　$x=1 \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\bigcirc} \\ \xleftarrow{\times} \end{matrix} \quad (x-1)(x+3)=0$

よって

$x=1 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)(x+3)=0$

であるから，**十分**条件である．

※ $\xleftarrow{\times}$ の反例は，$x=-3$

（2）　$|a|=2 \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\bigcirc} \\ \xleftarrow{\bigcirc} \end{matrix} \quad a^2=4$

よって

$|a|=2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2=4$

であるから，**必要十分**条件である．

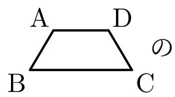
※いずれも $a=\pm 2$ という条件である．

（3）　$\mathrm{AB}=\mathrm{CD} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\times} \\ \xleftarrow{\bigcirc} \end{matrix}$ 　平行四辺形

よって

$\mathrm{AB}=\mathrm{CD} \quad \Longleftarrow$ 　平行四辺形

であるから，**必要**条件である．

※ $\xrightarrow{\times}$ の反例は，

のような場合

練習問題 2-B

1.（1）3 式を，上から①，②，③とする．

①を解くと，

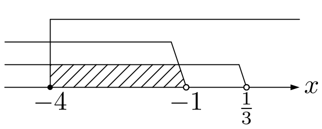
$x \geqq -4$

②を解くと，

$x < \dfrac{1}{3}$

③を解くと，

$x < -1$



よって，$\boldsymbol{-4 \leqq x < -1}$

（2）2 式を，上から①，②とする．

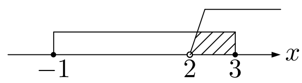
①を解くと，

$(x-3)(x+1) \leqq 0$

$-1 \leqq x \leqq 3$

②を解くと，

$x > 2$



よって，$\boldsymbol{2 < x \leqq 3}$

2.（1）　両辺に $(x-2)^2$ をかけると

$$(-x+4)(x-2) > 0$$

$$-(x-4)(x-2) > 0$$

$$(x-4)(x-2) < 0$$

よって，$\boldsymbol{2 < x < 4}$

（2）　両辺に $(x-2)^2$ をかけると

$$(x-1)(x-2) \leqq 3(x-2)^2$$

$$x^2-3x+2 \leqq 3(x^2-4x+4)$$

$$x^2-3x+2 \leqq 3x^2-12x+12$$

$$-2x^2+9x-10 \leqq 0$$

$$2x^2-9x+10 \geqq 0$$

$$(x-2)(2x-5) \geqq 0$$

よって，$x \leqq 2,\ \dfrac{5}{2} \leqq x$

$x \neq 2$ であるから，$\boldsymbol{x < 2,\ \dfrac{5}{2} \leqq x}$

3.（1）　$a>0,\ b>0,\ c>0$ より $\dfrac{1}{a}>0, \dfrac{1}{b}>0, \dfrac{1}{c}>0$ なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a+\frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$b+\frac{1}{c} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{c}}$$

$$c+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{c}{a}}$$

3 式の辺々を掛け合わせると

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq 2^3\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} = 8$$

よって

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq 8$$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{1}{b}$，$b=\dfrac{1}{c}$，$c=\dfrac{1}{a}$ のときであるから

$$\begin{cases} ab=1 & \cdots ① \\ bc=1 & \cdots ② \\ ca=1 & \cdots ③ \end{cases}$$

①，②より

$ab=1=bc$　すなわち，$ab=bc$

$b\neq 0$ であるから，$a=c$

③に代入して

$a^2=1$

$a>0$ より，$a=1$

これを①に代入して，$b=1$

よって，等号が成り立つのは $a=b=c=1$ のとき

（2）　$a>0,\ b>0$ より $\dfrac{1}{a}>0,\ \dfrac{1}{b}>0$ なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=2\sqrt{\frac{1}{ab}}=\frac{2}{\sqrt{ab}}$$

すなわち，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqq\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

両辺に $\dfrac{\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$　(>0) をかけると

$$\sqrt{ab}\geqq\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$$

等号が成り立つのは，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$ すなわち $a=b$ のとき

4.（1）
$$\begin{aligned}(2+a^2)-(2a-a^2)&=2+a^2-2a+a^2\\&=2a^2-2a+2\\&=2(a^2-a)+2\\&=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+2\\&=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}>0\end{aligned}$$

よって

$$(2+a^2)-(2a-a^2)>0$$

すなわち，$\boldsymbol{2+a^2>2a-a^2}$

（2）左辺を因数分解すると

1	$a(2+a^2)(2-a)$		$-2a-2$
1	$-a(2-a)$	$\longrightarrow$	$-2a+a^2$
1	$-(2+a^2)$	$\longrightarrow$	$-2-a^2$

よって

$$\{x-(2a-a^2)\}\{x-(2+a^2)\}>0$$

ここで，$2+a^2>2a-a^2$ であるから

$$\boldsymbol{x<2a-a^2,\ \ 2+a^2<x}$$

5.（1）**偽**　（反例　$a=1,\ b=i$）

逆：$a,\ b$ が複素数で，$a=0$ かつ $b=0$ ならば $a^2+b^2=0$ である．　**真**

対偶：$a,\ b$ が複素数で，$a\neq 0$ または $b\neq 0$ ならば $a^2+b^2\neq 0$ である．　**偽**

（反例　$a=1,\ b=i$）

（2）**真**

逆：$x-y=-2$ ならば $x=1$ かつ $y=3$ である．　**偽**（反例　$x=2,\ y=4$）

対偶：$x-y\neq -2$ ならば $x\neq 1$ または $y\neq 3$ である．　**真**

6.（1）この命題の対偶は

「$x,\ y$ が実数のとき，$x\leqq 0$ かつ $y\leqq 0$ ならば $x+y\leqq 0$ である.」

となるので，これを証明する.

$x\leqq 0$ かつ $y\leqq 0$ であるから，2 式の辺々を加えると

$x+y\leqq 0$ が成り立つ.

対偶が真であることが証明できたので，もとの命題も真である.

（2）この命題の対偶は

「n が整数で，n が 3 の倍数でないならば n^2 も 3 の倍数ではない.」

となるので，これを証明する.

n が 3 の倍数ではないので，整数 m を用いて

$n=3m+1$ または，$n=3m+2$

と表すことができる.

i）$n=3m+1$ のとき

$$\begin{aligned}n^2&=(3m+1)^2\\&=9m^2+6m+1\\&=3(3m^2+2m)+1\end{aligned}$$

よって，n^2 は 3 の倍数ではない.

ii）$n=3m+2$ のとき

$$\begin{aligned}n^2&=(3m+2)^2\\&=9m^2+12m+4\\&=3(3m^2+4m+1)+1\end{aligned}$$

よって，n^2 は 3 の倍数ではない.

i），ii）より，対偶が真であることが証明できたので，もとの命題も真である.