2章　方程式と不等式

問 1

（1） $x - 10 < 26 - 3x$

$x + 3x < 26 + 10$

$4x < 36$

$\boldsymbol{x < 9}$

（2） $-x + 1 \leqq 7$

$-x \leqq 7 - 1$

$-x \leqq 6$

$\boldsymbol{x \geqq -6}$

（3） $8 \geqq 3x + 5$

$-3x \geqq 5 - 8$

$-3x \geqq -3$

$\boldsymbol{x \leqq 1}$

（4）両辺に 3 をかけて

$3(4x + 3) > 2x - 1$

$12x + 9 > 2x - 1$

$12x - 2x > -1 - 9$

$10x > -10$

$\boldsymbol{x > -1}$

問 2

りんごの個数を x 個とすると，

$100x + 80(8 - x) \leqq 700$

両辺を 10 で割ると

$10x + 8(8 - x) \leqq 70$

$10x + 64 - 8x \leqq 70$

$10x - 8x \leqq 70 - 64$

$2x \leqq 6$

$x \leqq 3$

よって，**3 個まで買える**.

問 3　※上の式を①，下の式を②とする.

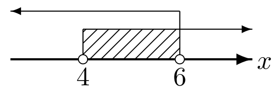
（1）①を解くと，$x > 4$

②を解くと，

$x + 8 > 2x + 2$

$-x > -6$

$x < 6$



よって，$\boldsymbol{4 < x < 6}$

（2）①を解くと

$3x < 4 + 8$

$3x < 12$

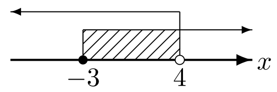
$x < 4$

②を解くと

$x - 3x \leqq 4 + 2$

$-2x \leqq 6$

$x \geqq -3$



よって，$\boldsymbol{-3 \leqq x < 4}$

（3）①を解くと

$6x - 2x > 4 + 1$

$4x > 5$

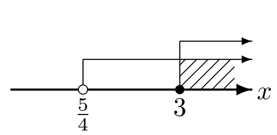
$x > \dfrac{5}{4}$

②を解くと

$3x - 6x \leqq -4 - 5$

$-3x \leqq -9$

$x \geqq 3$



よって，$\boldsymbol{x \geqq 3}$

（4）①を解くと

$3x - 3 \leqq x + 5$

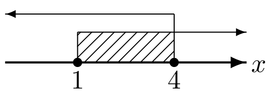
$3x - x \leqq 5 + 3$

$2x \leqq 8$

$x \leqq 4$

②の両辺を 6 倍して解くと

$$3-2x \leqq 2x-1$$
$$-2x-2x \leqq -1-3$$
$$-4x \leqq -4$$
$$x \geqq 1$$



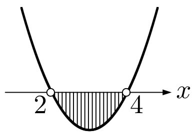
よって，$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 4}$

問 4

（1）$(x-2)(x-4)<0$

よって，

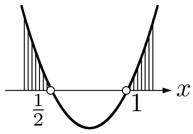
$\boldsymbol{2<x<4}$



（2）$(2x-1)(x-1)>0$

よって，

$\boldsymbol{x<\frac{1}{2},\ 1<x}$

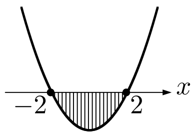


（3）$x^2-4 \leqq 0$

$(x+2)(x-2) \leqq 0$

よって，

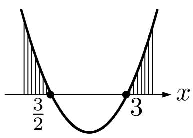
$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 2}$



（4）$(3x-2)(x-3) \geqq 0$

よって，

$\boldsymbol{x \leqq \frac{3}{2},\ 3 \leqq x}$



問 5

（1）$P(x)=(x-1)(x-2)(x-4)$ とおく．

$P(x)=0$ となるのは，$x=1,2,4$ のときであるから，各区間における因数の符号を調べると，表のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，$\boldsymbol{x<1,\ 2<x<4}$

（2）$P(-1)=x^3+2x^2-5x-6$ とおく．

$P(-1)=-1+2+5-6=0$ であるから，$P(x)$ は，$x+1$ で割りきれる．

よって

$$P(x)=(x+1)(x^2+x-6)$$
$$=(x+1)(x+3)(x-2)$$

$P(x)=0$ となるのは，$x=-3,-1,2$ のときであるから，各区間における因数の符号を調べると，表のようになる．

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

よって，$\boldsymbol{-3 \leqq x \leqq -1,\ 2 \leqq x}$

問 6

$$\text{左辺}-\text{右辺}=a+c-(b+d)$$
$$=a+c-b-d$$
$$=(a-b)+(c-d)$$

ここで

$a>b$ より，$a-b>0$

$c>d$ より，$c-d>0$

よって，$(a-b)+(c-d)>0$

したがって，$a+c>b+d$

問 7

$$\text{左辺}-\text{右辺}=a^2-1$$
$$=(a+1)(a-1)$$

ここで，$a \geqq 1$ より

$a+1 \geqq 2>0,\quad a-1 \geqq 0$

よって，$(a+1)(a-1) \geqq 0$

したがって，$a^2 \geqq 1$

等号が成り立つのは，$a-1=0$，すなわち $a=1$ のとき．

問 8

$$\text{左辺}-\text{右辺}=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$$
$$-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$$
$$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$$
$$=(ay-bx)^2 \geqq 0$$

よって，$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

等号が成り立つのは，$ay-bx=0$ すなわち $ay=bx$ のとき

問 9

（1） $a>0$, $b>0$ より，$\dfrac{1}{a}>0$, $\dfrac{1}{b}>0$ なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a+\frac{1}{b} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{b}} = 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdots①$$

$$b+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{a}} = 2\sqrt{\frac{b}{a}}\cdots②$$

①，②の辺々を掛け合わせて，

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right) \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}$$

$$= 4\sqrt{1} = 4$$

よって，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right) \geqq 4$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{1}{b}$, $b=\dfrac{1}{a}$，すなわち $ab=1$ のとき.

（2） $a>0$, $b>0$ より，$\dfrac{b}{a}>0$, $\dfrac{a}{b}>0$ なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}} = 2\sqrt{1} = 2$$

よって，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqq 2$

等号が成り立つのは，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$，すなわち $a=b$ のとき.

問 10

$a>0$, $b>0$ なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$a+b \geqq \sqrt{ab}\cdots①$$

$c>0$, $d>0$ なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$c+d \geqq \sqrt{cd}\cdots②$$

①，②の辺々を掛け合わせて，

$$(a+b)(c+d) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{cd}$$

$$= 4\sqrt{abcd}$$

よって，$(a+b)(c+d) \geqq 4\sqrt{abcd}$

等号が成り立つのは，$a=b$, $c=d$ のとき.

問 11

（1） 左辺 $=(x+4)^2 \geqq 0$

よって，$x^2+8x+16 \geqq 0$

（2） 左辺 $=(x-2)^2-4+6$

$$=(x-2)^2+2>0$$

よって，$x^2-4x+6>0$

問 12

$$左辺-右辺 = x^2+y^2-xy$$

$$= x^2-xy+y^2$$

$$= \left(x-\frac{1}{2}y\right)^2-\frac{1}{4}y^2+y^2$$

$$= \left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$$

ここで，$\left(x-\dfrac{1}{2}y\right)^2 \geqq 0$, $\dfrac{3}{4}y^2 \geqq 0$ だから

$$\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geqq 0$$

したがって，$x^2+y^2 \geqq xy$

等号が成り立つのは，$x-\dfrac{1}{2}y=0$, $y=0$，すなわち，$x=y=0$ のとき.

問 13

（1） 左辺 $=\left(x+\dfrac{1}{2}y\right)^2-\dfrac{1}{4}y^2+y^2$

$$=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$$

ここで，$\left(x+\dfrac{1}{2}y\right)^2 \geqq 0$, $\dfrac{3}{4}y^2 \geqq 0$ だから

$$\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geqq 0$$

等号が成り立つのは，$x+\dfrac{1}{2}y=0$, $y=0$，すなわち，$x=y=0$ のときであるが，$x>y$ より，x, y が同時に 0 になることはないから

$$\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \fallingdotseq 0$$

よって，$\left(x+\dfrac{1}{2}y\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2>0$

したがって，$x^2+xy+y^2>0$

（2） 左辺 − 右辺 $=x^3-y^3$

$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

ここで，$x>y$ より，$x-y>0$

また，（1）より，$x^2+xy+y^2>0$ だから

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)>0$$

したがって，$x^3>y^3$

問 14

$$B=\{x \mid x^2-16>0,\ x\text{ は自然数}\}$$
$$=\{x \mid (x+4)(x-4)>0,\ x\text{ は自然数}\}$$
$$=\{x \mid x<-4,\ \ 4<x,\ x\text{ は自然数}\}$$
$$=\{x \mid 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \cdots\}$$

であるから

$\overline{B}=\mathbf{\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}}$

問 15

（1）与式 $=\mathbf{\{1,\ 4\}}$
（2）与式 $=\mathbf{\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9\}}$
（3）　$\overline{A}=\{3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$
　　$\overline{B}=\{2,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$
　であるから
　　与式 $=\mathbf{\{7,\ 8,\ 10\}}$
（4）求める集合は,（2）の補集合だから
　　与式 $=\mathbf{\{7,\ 8,\ 10\}}$

問 16

$$\text{左辺}=(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}})\cup\overline{\overline{C}}$$
$$=(\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}})\cup C$$
$$=(A\cap B)\cup C$$
$$=\text{右辺}$$

問 17

（1）**真**
（2）**偽**　反例：$\boldsymbol{x=-2}$ など

問 18

（1）$ac=bc \quad \overset{\times}{\longrightarrow},\ \overset{\bigcirc}{\longleftarrow} \quad a=b$

よって
　$ac=bc \iff$ ではなく $ac=bc \Longleftarrow a=b$

であるから，**必要**条件である.

※ $\overset{\times}{\longrightarrow}$ の反例は，$a=1, b=2, c=0$ など

（2）$x=y \quad \overset{\bigcirc}{\longrightarrow},\ \overset{\bigcirc}{\longleftarrow} \quad x+z=y+z$

よって
　$x=y \iff x+z=y+z$

であるから，**必要十分**条件である.

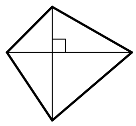
（3）n は 6 の倍数　$\overset{\bigcirc}{\longrightarrow},\ \overset{\times}{\longleftarrow}$　n は 3 の倍数

よって
　n は 6 の倍数 $\Longrightarrow$ n は 3 の倍数
であるから，**十分**条件である.

※ $\overset{\times}{\longleftarrow}$ の反例は，$n=3$ など

（4）ひし形である　$\overset{\bigcirc}{\longrightarrow},\ \overset{\times}{\longleftarrow}$　対角線が垂直に交わる

よって
　ひし形である $\Longrightarrow$ 対角線が垂直に交わる
であるから，**十分**条件である.

※ $\overset{\times}{\longleftarrow}$ の反例は， のような場合

問 19

与えられた条件の否定は，**「$\boldsymbol{n}$ は 3 の倍数ではない」**
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ であるから
　$\boldsymbol{P}=\mathbf{\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10\}}$

問 20

（1）　与えられた条件の否定は，「$x\geqq 1$ かつ $x\leqq 5$」であるから
　　$\boldsymbol{1\leqq x\leqq 5}$

（2）　与えられた条件は，「整数 n は 3 で割り切れ，かつ 5 で割りきれる。」ということなので，この否定は
　整数 $\boldsymbol{n}$ は 3 で割りきれないか，または 5 で割りきれない

問 21

逆　　$\boldsymbol{xy<0 \to x>0}$ **かつ** $\boldsymbol{y<0}$
裏　　$\boldsymbol{x\leqq 0}$ **または** $\boldsymbol{y\geqq 0 \to xy\geqq 0}$
対偶　$\boldsymbol{xy\geqq 0 \to x\leqq 0}$ **または** $\boldsymbol{y\geqq 0}$

問 22

（1）　与えられた命題の対偶は
　「$x\leqq 1$ かつ $y\leqq 1$ ならば，$x+y\leqq 2$」
となるので，この命題を証明する.
　$x\leqq 1,\ y\leqq 1$ であるから，不等式の性質より
　$x+y\leqq 1+1$
すなわち，$x+y\leqq 2$ となる.

よって，もとの命題も真である．

（2） この命題の対偶は，

「m が偶数，または n が偶数ならば，mn は偶数である．」となる．

i） m, n のうち，一方が偶数のとき

自然数 a, b を用いて，$m = 2a$, $n = 2b + 1$ と表すと

$$mn = 2a(2b + 1) = 2(2ab + a)$$

となり，mn は偶数となる．

ii） m, n が偶数のとき

自然数 a, b を用いて，$m = 2a$, $n = 2b$ と表すと

$$mn = 2a \cdot 2b = 2(2ab)$$

となり，mn は偶数となる．

i), ii) より，対偶が真であるので，もとの命題も真である．

∎