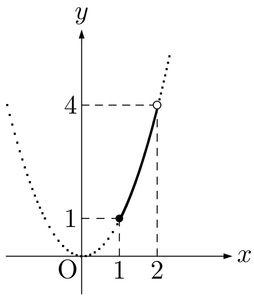
3章　関数とグラフ

§1　2次関数 (p.85〜p.86)

練習問題 1-A

1. (1)　$x=1$ のとき，$y=1$

$x=2$ のとき，$y=4$

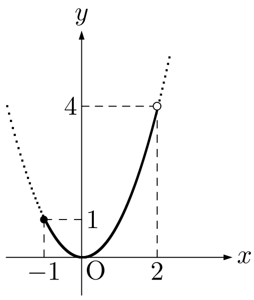


$\boldsymbol{1 \leqq y < 4}$

(2)　$x=-1$ のとき，$y=1$

$x=0$ のとき，$y=0$

$x=2$ のとき，$y=4$



$\boldsymbol{0 \leqq y < 4}$

2. (1)　頂点の座標が $(2,\ 1)$ であるから，求める放物線の方程式は $y=a(x-2)^2+1$ とおくことができる．この放物線が，点 $(0,\ 3)$ を通るから

$$3=a(0-2)^2+1$$
$$3=4a+1$$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$

したがって，求める放物線の方程式は

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1}$$

(2)　点 $(1,\ 0)$ で x 軸に接するので，求める放物線の方程式は $y=a(x-1)^2$ とおくことができる．この放物線が，点 $(2,\ 3)$ を通るから

$$3=a(2-1)^2$$
$$3=a$$

したがって，求める放物線の方程式は

$$\boldsymbol{y=3(x-1)^2}$$

(3)　軸が $x=2$ であるから，求める放物線の方程式は $y=a(x-2)^2+q$ とおくことができる．この放物線が，2点 $(0,\ 0)$，$(3,\ 6)$ を通るから

$$\begin{cases} 0=a(0-2)^2+q \\ 6=a(3-2)^2+q \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} 4a+q=0 \\ a+q=6 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-2,\ q=8$

したがって，求める放物線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-2(x-2)^2+8}$$

3. (1)
$$\begin{aligned} y&=x^2-x \\ &=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって

最大値　**なし**

最小値　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$　$\left(\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}\ \textbf{のとき}\right)$

(2)
$$\begin{aligned} y&=-3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)+1 \\ &=-3\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}+1 \\ &=-3\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right\}+1 \\ &=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}+1 \\ &=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{7}{3} \end{aligned}$$

よって

最大値　$\boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$　$\left(\boldsymbol{x=\dfrac{2}{3}}\ \textbf{のとき}\right)$

最小値　**なし**

(3)
$$\begin{aligned} y&=-\frac{1}{2}(x^2+12x)+1 \\ &=-\frac{1}{2}\{(x+6)^2-6^2\}+1 \\ &=-\frac{1}{2}\{(x+6)^2-36\}+1 \\ &=-\frac{1}{2}(x+6)^2+18+1 \\ &=-\frac{1}{2}(x+6)^2+19 \end{aligned}$$

よって

最大値　**19 ($\boldsymbol{x=-6}$ のとき)**

最小値　**なし**

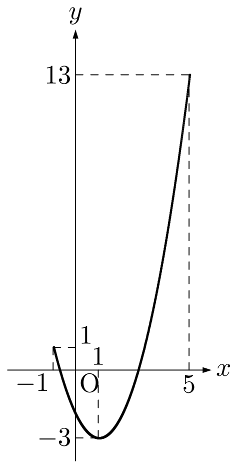
4. (1) $y=(x-1)^2-1^2-2$

$=(x-1)^2-3$

また

$x=-1$ のとき，$y=1$

$x=5$ のとき，$y=13$



よって

最大値　**13 ($x=5$ のとき)**

最小値　**−3 ($x=1$ のとき)**

(2) $y=-2(x^2+2x)+1$

$=-2\{(x+1)^2-1^2\}+1$

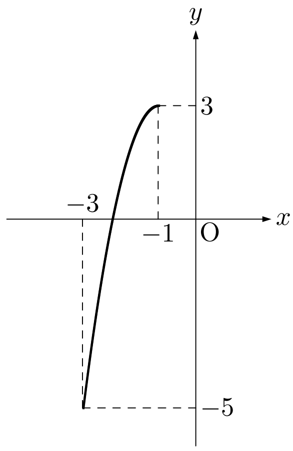
$=-2(x+1)^2+2+1$

$=-2(x+1)^2+3$

また

$x=-3$ のとき，$y=-5$

$x=-1$ のとき，$y=3$



よって

最大値　**3 ($x=-1$ のとき)**

最小値　**−5 ($x=-3$ のとき)**

(3) $y=-(x^2-5x)-\dfrac{1}{4}$

$=-\left\{\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right\}-\dfrac{1}{4}$

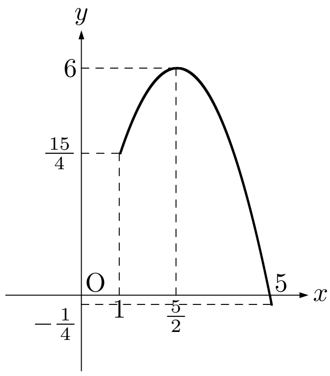
$=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}-\dfrac{1}{4}$

$=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+6$

また

$x=1$ のとき，$y=\dfrac{15}{4}$

$x=5$ のとき，$y=-\dfrac{1}{4}$



よって

最大値　**6 $\left(x=\dfrac{5}{2}\text{のとき}\right)$**

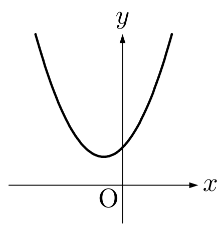
最小値　**$-\dfrac{1}{4}$ ($x=5$ のとき)**

5. (1) 両辺に -1 をかけて，$x^2+x+1 \leqq 0$

$x^2+x+1=0$ の判別式を D とすると

$D=1^2-4\cdot1\cdot1$

$=-3<0$



よって，$y=x^2+x+1$ のグラフは，x 軸と共有点をもたず，つねに $y>0$ である．したがって，$x^2+x+1 \leqq 0$ を満たす x は存在しないから，**解なし**.

(2) $6x^2-5x-6=0$ の判別式を D とすると

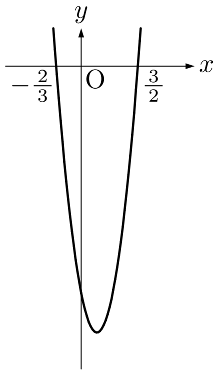
$D=(-5)^2-4\cdot6\cdot(-6)$

$=25+144>0$

$6x^2-5x-6=0$ を解くと

$(3x+2)(2x-3)=0$

$x=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{2}$



$y=6x^2-5x-6$ のグラフより，
$6x^2-5x-6<0$ の解は
$$\boldsymbol{-\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}}$$

6. $y=x^2-5x+6$ のグラフを，x 軸の正の方向に p 平行移動させたグラフの式は
$$y=(x-p)^2-5(x-p)+6$$
このグラフが原点を通るので
$$0=(0-p)^2-5(0-p)+6$$
これを解くと
$$0=p^2+5p+6$$
$$(p+3)(p+2)=0$$
$$p=-3,\ -2$$
よって，x 軸の正の方向に，**−2** または **−3** 平行移動すればよい．

7. $\begin{cases} y=x^2-4x+4 & \cdots ① \\ y=x^2+2x+3 & \cdots ② \end{cases}$ とする．

②のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動したグラフの式は
$$y-q=(x-p)^2+2(x-p)+3$$
$$y=x^2-2px+p^2+2x-2p+3+q$$
$$=x^2+(-2p+2)x+(p^2-2p+q+3)$$
これが，①と一致するので
$$\begin{cases} -2p+2=-4 & \cdots ③ \\ p^2-2p+q+3=4 & \cdots ④ \end{cases}$$
③より
$$-2p=-6$$
$$p=3$$
$$p=3$$
④に代入して
$$3^2-2\cdot 3+q+3=4$$
$$9-6+q+3=4$$
$$q=-2$$
したがって

x 軸方向に 3，y 軸方向に −2 平行移動 したものである．

〔別解〕
$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$
であるから，①のグラフの頂点は，$(2,\ 0)$

また
$$x^2+2x+3=(x+1)^2-1+3$$
$$=(x+1)^2+2$$
であるから，②のグラフの頂点は，$(-1,\ 2)$

②のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動したものが①に重なるとすると
$$-1+p=2,\ 2+q=0$$
よって，$p=3,\ q=-2$

したがって

x 軸方向に 3，y 軸方向に −2 だけ平行移動 したものである．

8.
$$y=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$$
$$=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c$$
よって，与えられた放物線の頂点は
$$\left(-\frac{b}{2},\ -\frac{b^2}{4}+c\right)$$
この頂点を，x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 平行移動させた点が $(0,\ 1)$ になるので
$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2}-1=0 & \cdots ① \\ -\dfrac{b^2}{4}+c+3=1 & \cdots ② \end{cases}$$
①より
$$-\frac{b}{2}=1$$
$$b=-2$$
②に代入して
$$-\frac{(-2)^2}{4}+c+3=1$$
$$-1+c+3=1$$
$$c=-1$$
よって，$\boldsymbol{b=-2,\ c=-1}$

9. 与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると
$$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(k+3)$$
$$=4-4(k+3)$$
$$=-4k-8$$

i) $D>0$，すなわち
$$-4k-8>0$$
$$-4k>8$$
$k<-2$ のとき，実数解の個数は 2 個

ii）$D=0$，すなわち

$-4k-8=0$

$-4k=8$

$k=-2$ のとき，実数解の個数は 1 個

iii）$D<0$，すなわち

$-4k-8<0$

$-4k<8$

$k>-2$ のとき，実数解の個数は 0 個

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{k<-2} \textbf{ のとき　2 個} \\ \boldsymbol{k=-2} \textbf{ のとき　1 個} \\ \boldsymbol{k>-2} \textbf{ のとき　0 個} \end{cases}$$

練習問題 1-B

1.　2 式を上から①，②とする．

①より

$$y=(x-1)^2-1+a$$

よって，①の頂点の座標は，$(1,\ a-1)$

②は放物線の方程式なので，$b \fallingdotseq 0$ であるから

$$\begin{aligned} y &= b\left(x^2-\frac{3}{b}x\right)+1 \\ &= b\left\{\left(x-\frac{3}{2b}\right)^2-\frac{9}{4b^2}\right\}+1 \\ &= b\left(x-\frac{3}{2b}\right)^2-\frac{9}{4b}+1 \\ &= b\left(x-\frac{3}{2b}\right)^2+\frac{4b-9}{4b} \end{aligned}$$

よって，②の頂点の座標は，$\left(\dfrac{3}{2b},\ \dfrac{4b-9}{4b}\right)$

2 つの放物線の頂点が一致するので

$$\begin{cases} 1=\dfrac{3}{2b} & \cdots ③ \\ a-1=\dfrac{4b-9}{4b} & \cdots ④ \end{cases}$$

③より

$2b=3$

$b=\dfrac{3}{2}$

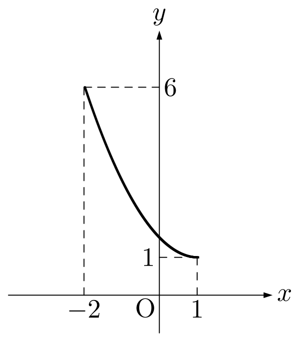
④に代入して

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\cdot\frac{3}{2}-9}{4\cdot\frac{3}{2}}+1 \\ &= \frac{6-9}{6}+1 \\ &= -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{3}{2}}$

2.

$$\begin{aligned} y &= a(x^2-2x)+b \\ &= a\{(x-1)^2-1\}+b \\ &= a(x-1)^2-a+b \end{aligned}$$



よって，$-2 \leqq x \leqq 1$ において，図のように $x=-2$ で最大値，$x=1$ で最小値をとる．

$x=-2$ のとき，$y=a(-2-1)^2-a+b=8a+b$

$x=1$ のとき，$y=a(1-1)^2-a+b=-a+b$

であるから

$$\begin{cases} 8a+b=6 \\ -a+b=1 \end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=\dfrac{5}{9},\ b=\dfrac{14}{9}}$

3.　与えられた不等式は 2 次不等式であるから，$a \fallingdotseq 0$．

$y=ax^2+2x+a$ とおく．

i）$a<0$ のとき

この 2 次関数のグラフは上に凸の放物線となり，すべての x について $y>0$ となることはないから，このときの a の値は存在しない．

ii）$a>0$ のとき

この 2 次関数のグラフは下に凸の放物線となり，$ax^2+2x+a=0$ の判別式を D とするとき，すべての x に対して $y>0$ となるための条件は，$D<0$ となることである．

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 1^2-a\cdot a \\ &= 1-a^2<0 \end{aligned}$$

$a^2-1>0$

$(a+1)(a-1)>0$

$a<-1,\ 1<a$

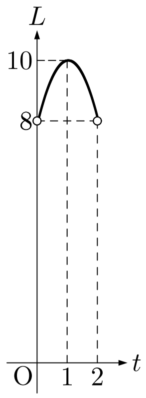
$a>0$ であるから，$a>1$

以上より，定数 a の範囲は，$\boldsymbol{a>1}$

4.　点 C の座標を $(t,\ 0)$ とおくと，D は放物線上の点なので，$\mathrm{CD}=4-t^2$　ただし，$0<t<2$

また，$\mathrm{BC}=2t$ であるから，長方形の周の長さを L とすると

$$\begin{aligned} L &= 2(4-t^2)+2\cdot 2t \\ &= -2t^2+4t+8 \\ &= -2(t^2-2)+8 \\ &= -2\{(t-1)^2-1\}+8 \\ &= -2(t-1)^2+10 \end{aligned}$$



よって，$t=1$ のとき，周の長さ L は最大となり，このとき，$\mathrm{BC}=2t$ より，$\mathbf{BC=2}$

5. $y=(x-m)^2-m^2+4m$

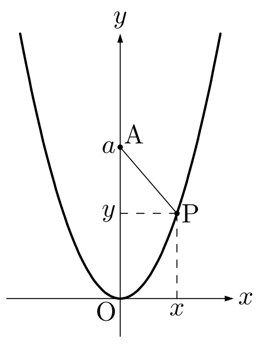
よって，最小値は $-m^2+4m$ であるから

$\boldsymbol{s=-m^2+4m}$

$$\begin{aligned} s &= -(m^2-4m) \\ &= -\{(m-2)^2-4\} \\ &= -(m-2)^2+4 \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{m=2}$ のとき，s は最大となり，その最大値は 4 である．

6.



$\mathrm{AP}>0$ であるから，AP^2 の値が最小となるとき，AP も最小となる．

$\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{AP}^2 &= (x-0)^2+(y-a)^2 \\ &= x^2+(y-a)^2 \\ &= y+y^2-2ay+a^2 \\ &= y^2-(2a-1)y+a^2 \\ &= \left(y-\frac{2a-1}{2}\right)^2-\left(\frac{2a-1}{2}\right)^2+a^2 \\ &= \left(y-\frac{2a-1}{2}\right)^2-\frac{(2a-1)^2-4a^2}{4} \\ &= \left(y-\frac{2a-1}{2}\right)^2+\frac{4a-1}{4} \end{aligned}$$

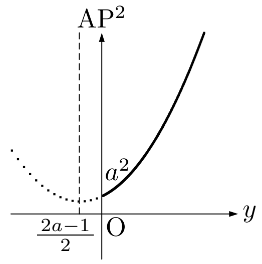
ただし，$y\geqq 0$

軸の位置によって，場合分けをする．

i）$\dfrac{2a-1}{2}<0$ すなわち

$$\begin{aligned} 2a-1&<0 \\ 2a&<1 \\ a&<\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき

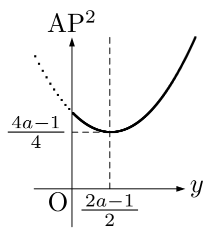


$y=0$ のとき，AP^2 は最小値 a^2 をとる．$a>0$ であるから，このときの AP の最小値は $\sqrt{a^2}=a$

ii）$\dfrac{2a-1}{2}\geqq 0$ すなわち

$$\begin{aligned} 2a-1&\geqq 0 \\ 2a&\geqq 1 \end{aligned}$$

$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき



$y=\dfrac{2a-1}{2}$ のとき，AP^2 は最小値 $\dfrac{4a-1}{4}$ をとる．$a\geqq\dfrac{1}{2}$ より，$4a-1>0$ であるから，このときの AP の最小値は $\sqrt{\dfrac{4a-1}{4}}=\dfrac{\sqrt{4a-1}}{2}$

以上より

$$\begin{cases} 0 < a < \dfrac{1}{2} \text{のとき} & \boldsymbol{y = 0} \textbf{ で最小値 } \boldsymbol{a} \\ a \geqq \dfrac{1}{2} \text{のとき} & \boldsymbol{y = \dfrac{2a-1}{2}} \textbf{ で最小値 } \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{4a-1}}{2}} \end{cases}$$

7.

$$\begin{aligned} y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

よって

標準形　$\boldsymbol{y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}}$

軸の方程式　$\boldsymbol{x = -\dfrac{b}{2a}}$

頂点の座標　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)}$

∎