3章　関数とグラフ

§1　2次関数 (p.71〜p.84)

問1

（1）$f(-1) = 3\cdot(-1)+1$

$= -3+1 = \mathbf{-2}$

（2）$f(-a) = 3\cdot(-a)+1$

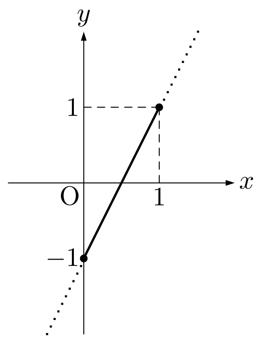
$= \boldsymbol{-3a+1}$

（3）$f(a+1) = 3(a+1)+1$

$= 3a+3+1 = \boldsymbol{3a+4}$

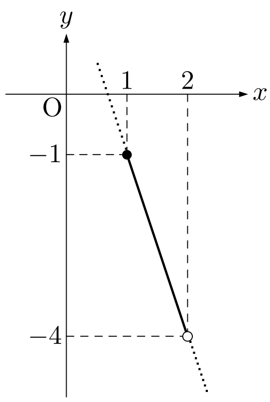
問2

（1）　$x=0$ のとき，$y=-1$
$x=1$ のとき，$y=1$



$\boldsymbol{-1 \leqq y \leqq 1}$

（2）　$x=1$ のとき，$y=-1$
$x=2$ のとき，$y=-4$

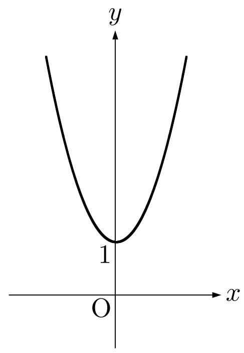


$\boldsymbol{-4 < y \leqq -1}$

問3

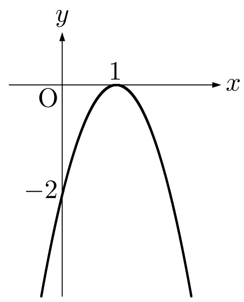
（1）　この関数のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを y 軸方向に1平行移動したものである．

軸　$\boldsymbol{x=0}$
頂点　$\mathbf{(0,\ 1)}$



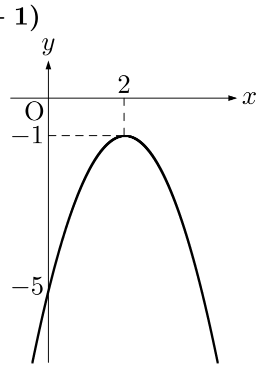
（2）　この関数のグラフは，$y=-2x^2$ のグラフを x 軸方向に1平行移動したものである．

軸　$\boldsymbol{x=1}$
頂点　$\mathbf{(1,\ 0)}$



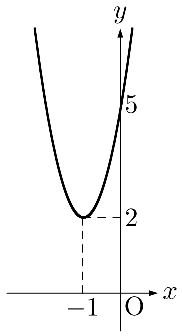
（3）　この関数のグラフは，$y=-x^2$ のグラフを x 軸方向に2，y 軸方向に -1 平行移動したものである．

軸　$\boldsymbol{x=2}$
頂点　$\mathbf{(2,\ -1)}$



（4）　この関数のグラフは，$y=3x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に2平行移動したものである．

軸　$\boldsymbol{x=-1}$
頂点　$\mathbf{(-1,\ 2)}$



問 4

求める放物線の方程式は

$$y-3=-2\{x-(-1)\}^2$$

すなわち，$\boldsymbol{y=-2(x+1)^2+3}$

問 5

（1）

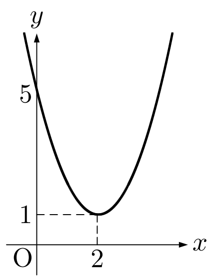
$$\begin{aligned} y &= (x-2)^2-4+5 \\ &= (x-2)^2+1 \end{aligned}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=(x-2)^2+1}$

この関数のグラフは，$y=x^2$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 平行移動したものである．

軸　$\boldsymbol{x=2}$

頂点　$\boldsymbol{(2,\ 1)}$



（2）

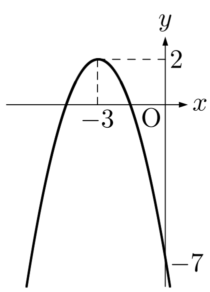
$$\begin{aligned} y &= -(x^2+6x)-7 \\ &= -\{(x+3)^2-9\}-7 \\ &= -(x+3)^2+9-7 \\ &= -(x+3)^2+2 \end{aligned}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=-(x+3)^2+2}$

この関数のグラフは，$y=-x^2$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 平行移動したものである．

軸　$\boldsymbol{x=-3}$

頂点　$\boldsymbol{(-3,\ 2)}$



（3）

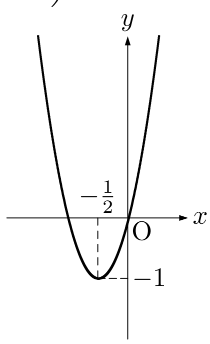
$$\begin{aligned} y &= 4(x^2+x) \\ &= 4\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\} \\ &= 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{4} \\ &= 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1 \end{aligned}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1}$

この関数のグラフは，$y=4x^2$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{1}{2}$，y 軸方向に -1 平行移動したものである．

軸　$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$

頂点　$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2},\ -1\right)}$



（4）

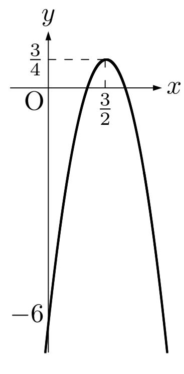
$$\begin{aligned} y &= -3(x^2-3x)-6 \\ &= -3\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}-6 \\ &= -3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{9}{4}-6 \\ &= -3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+274-6 \\ &= -3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \end{aligned}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{y=-3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

この関数のグラフは，$y=-3x^2$ のグラフを x 軸方向に $\frac{3}{2}$，y 軸方向に $\frac{3}{4}$ 平行移動したものである．

軸　$\boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$

頂点　$\boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right)}$



問 6

（1） 頂点の座標が $(1,\ 2)$ であるから，求める放物線の方程式は $y=a(x-1)^2+2$ とおくことができる．この放物線が，原点 $(0,\ 0)$ を通るから

$$0=a(0-1)^2+2$$
$$0=a+2$$

よって，$a=-2$

したがって，求める放物線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-2(x-1)^2+2}$$

（2） 軸が $x=1$ であるから，求める放物線の方程式は $y=a(x-1)^2+q$ とおくことができる．この放物線が，2 点 $(0,\ 1)$, $(3,\ 7)$ を通るから

$$\begin{cases} 1=a(0-1)^2+q \\ 7=a(3-1)^2+q \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} a+q=1 \\ 4a+q=7 \end{cases}$$

これを解いて，$a=2,\ q=-1$

したがって，求める放物線の方程式は

$$\boldsymbol{y=2(x-1)^2-1}$$

（3） 頂点が y 軸上にあるので，求める放物線の方程式は $y=ax^2+q$ とおくことができる．この放物線が，2 点 $(1,\ 0)$, $(2,\ -3)$ を通るから

$$\begin{cases} 0=a\cdot 1^2+q \\ -3=a\cdot 2^2+q \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} a+q=0 \\ 4a+q=-3 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-1,\ q=1$

したがって，求める放物線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-x^2+1}$$

問 7

（1） 求める放物線の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおく．この放物線が，この放物線が 3 点 $(-1,\ 7)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ -1)$ を通るから

$$\begin{cases} 7=a-b+c \\ 1=c \\ -1=a+b+c \end{cases}$$

これを解いて，$a=2,\ b=-4,\ c=1$

したがって，求める放物線の方程式は

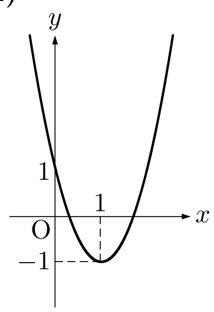
$$\boldsymbol{y=2x^2-4x+1}$$

標準形に変形すると

$$\begin{aligned} y&=2(x^2-2x)+1 \\ &=2\{(x-1)^2-1\}+1 \\ &=2(x-1)^2-2+1 \\ &=2(x-1)^2-1 \end{aligned}$$

軸　$\boldsymbol{x=1}$

頂点　$\boldsymbol{(1,\ -1)}$



（2） 求める放物線の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおく．この放物線が，この放物線が 3 点 $(1,\ 0)$, $(-2,\ 0)$, $(0,\ 2)$ を通るから

$$\begin{cases} 0=a+b+c \\ 0=4a-2b+c \\ 2=c \end{cases}$$

これを解いて，$a=-1,\ b=-1,\ c=2$

したがって，求める放物線の方程式は

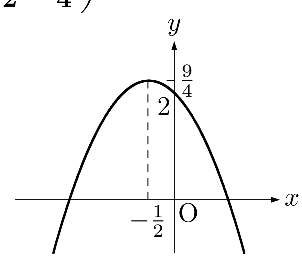
$$\boldsymbol{y=-x^2-x+2}$$

標準形に変形すると

$$\begin{aligned} y&=-(x^2+x)+2 \\ &=-\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+2 \\ &=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+2 \\ &=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} \end{aligned}$$

軸　$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$

頂点　$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2},\ \frac{9}{4}\right)}$



〔別解〕

二次方程式の解とグラフの関係から，求める放物線の方程式を，$y=a(x-1)(x+2)$ とおくことができる．この放物線が点 $(0,\ 2)$ を通るから

$$2=a(0-1)(0+2)$$
$$2=-2a,\ \text{よって，}\ a=-1$$

したがって，求める放物線の方程式は

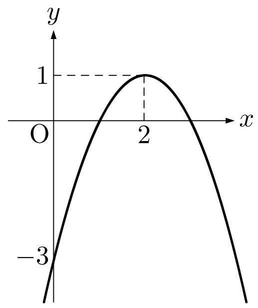
$$y = -(x-1)(x+2)$$

展開すると，$\boldsymbol{y = -x^2 - x + 2}$

問 8

（1） 標準形に変形すると

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 - 4x) - 3 \\ &= -\{(x-2)^2 - 2^2\} - 3 \\ &= -(x-2)^2 + 4 - 3 \\ &= -(x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$



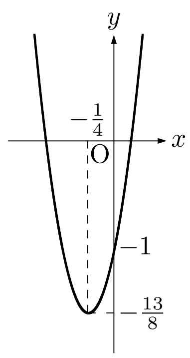
よって

最大値　**1 ($x = 2$ のとき)**

最小値　**なし**

（2） 標準形に変形すると

$$\begin{aligned} y &= 10\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) - 1 \\ &= 10\left\{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right\} - 1 \\ &= 10\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{8} - 1 \\ &= 10\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{8} \end{aligned}$$



よって

最大値　**なし**

最小値　$\boldsymbol{-\dfrac{13}{8}}$　**$\left(x = -\dfrac{1}{4}\right.$ のとき$\left.\right)$**

問 9

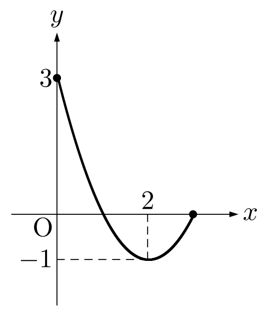
（1） 標準形に変形すると

$$\begin{aligned} y &= (x-2)^2 - 2^2 + 3 \\ &= (x-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

また

$x = 0$ のとき，$y = 3$

$x = 3$ のとき，$y = 0$



よって

最大値　**3 ($x = 0$ のとき)**

最小値　**−1 ($x = 2$ のとき)**

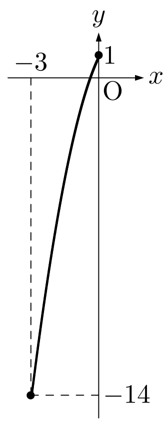
（2） 標準形に変形すると

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 - 2x) + 1 \\ &= -\{(x-1)^2 - 1^2\} + 1 \\ &= -(x-1)^2 + 1 + 1 \\ &= -(x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

また

$x = -3$ のとき，$y = -14$

$x = 0$ のとき，$y = 1$



よって

最大値　**1 ($x = 0$ のとき)**

最小値　**−14 ($x = -3$ のとき)**

問 10

横の長さは

$$\frac{20-2x}{2}=10-x$$

$x>0,\ 10-x>0$ より，定義域は，$0<x<10$

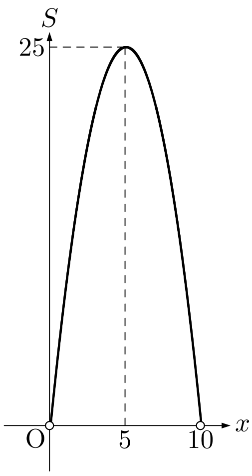
長方形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=x(10-x)\\&=-x^2+10x\\&=-(x^2-10x)\\&=-\{(x-5)^2-5^2\}\\&=-(x-5)^2+25\end{aligned}$$

また

$x=0$ のとき，$y=0$

$x=10$ のとき，$y=0$



よって，$\boldsymbol{x=5}$ のとき，S は **最大値 25** (m^2) をとる．

問 11

（1）　$9x^2-6x+1=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(-3)^2-9\cdot1\\&=9-9=0\end{aligned}$$

よって，グラフは x 軸と**接する．**

接点の x 座標は，$9x^2-6x+1=0$ を解いて

$$(3x-1)^2=0$$

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{3}}$$

（2）　$-2x^2+8x-10=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=4^2-(-2)\cdot(-10)\\&=16-20=-4<0\end{aligned}$$

よって，グラフと x 軸との**共有点はない．**

（3）　$x^2+x-1=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D&=1^2-4\cdot1\cdot(-1)\\&=1+4=5>0\end{aligned}$$

よって，グラフは x 軸と**2 点で交わる．**

共有点の x 座標は，$x^2+x-1=0$ を解いて

$$\begin{aligned}x&=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2\cdot1}\\&=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$$

問 12

（1）　$x^2+2x+k=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=1^2-1\cdot k\\&=1-k\end{aligned}$$

放物線のグラフが x 軸と 2 点で交わるのは，$D>0$ のときだから

$$\begin{aligned}1-k&>0\\-k&>-1\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{k<1}$$

（2）　$6x^2-2kx+5=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(-k)^2-6\cdot5\\&=k^2-30\end{aligned}$$

放物線のグラフが x 軸に接するのは，$D=0$ のときだから

$$\begin{aligned}k^2-30&=0\\k^2&=30\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{k=\pm\sqrt{30}}$$

（3）　$2x^2+3x+k=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D&=3^2-4\cdot2\cdot k\\&=9-8k\end{aligned}$$

放物線のグラフが x 軸と共有点をもたないのは，$D<0$ のときだから

$$\begin{aligned}9-8k&<0\\-8k&<-9\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{k>\frac{9}{8}}$$

問 13

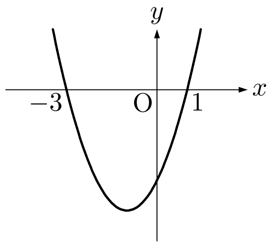
（1）　$x^2+2x-3=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=1^2-1\cdot(-3)\\&=1+3=4>0\end{aligned}$$

$x^2+2x-3=0$ を解くと

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3,\ 1$



$y=x^2+2x-3$ のグラフより，

$x^2+2x-3 \geqq 0$ の解は

$\boldsymbol{x \leqq -3,\ \ 1 \leqq x}$

（2） 両辺に -1 をかけて，$x^2-6x+9>0$

$x^2-6x+9=0$ の判別式を D とすると

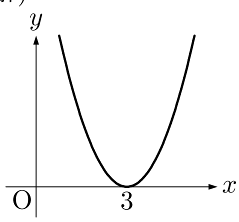
$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot 9$

$=9-9=0$

$x^2-6x+9=0$ を解くと

$(x-3)^2=0$

$x=3$ (2 重解)



$y=x^2-6x+9$ のグラフより，

$x^2-6x+9>0$ の解は

$\boldsymbol{x \neq 3}$

（3） $x^2-6x+7=0$ の判別式を D とすると

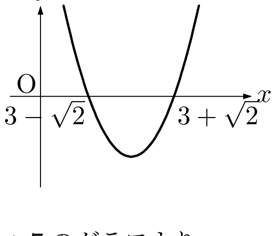
$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot 7$

$=9-7=2>0$

$x^2-6x+7=0$ を解くと

$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{2}}{1}$

$=3\pm\sqrt{2}$



$y=x^2-6x+7$ のグラフより，

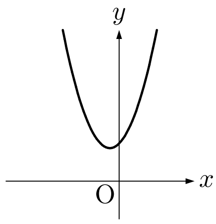
$x^2-6x+7 \leqq 0$ の解は

$\boldsymbol{3-\sqrt{2} \leqq x \leqq 3+\sqrt{2}}$

（4） $2x^2+x+1=0$ の判別式を D とすると

$D=1^2-2\cdot 1$

$=1-2=-1<0$



よって，$y=2x^2+x+1$ のグラフは，x 軸と共有点をもたず，つねに $y>0$ である．したがって，$2x^2+x+1>0$ を満たす x は**すべての実数**である．

∎