3章　関数とグラフ

練習問題 2-A

1.　$y=f(x)$ とおく．

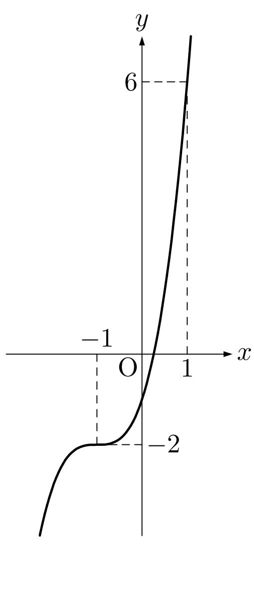
（1）
$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{(-x)^2+1} \\ &= -\frac{x}{x^2+1} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$
よって，**奇関数**である．

（2）
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4-5(-x)^2 \\ &= x^4-5x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$
よって，**偶関数**である．

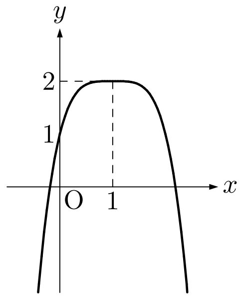
（3）
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^6-2(-x)^3 \\ &= x^6-2(-x^3) \\ &= x^6+2x^3 \end{aligned}$$
$$f(-x) \fallingdotseq f(x),\quad f(-x) \fallingdotseq -f(x)$$
よって，**奇関数でも偶関数でもない．**

（4）
$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x| \\ &= |x| \\ &= f(x) \end{aligned}$$
よって，**偶関数**である．

2.（1）　この関数のグラフは，$y=x^3$ のグラフを，x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 平行移動したものである．



（2）　この関数のグラフは，$y=-x^4$ のグラフを，x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 平行移動したものである．



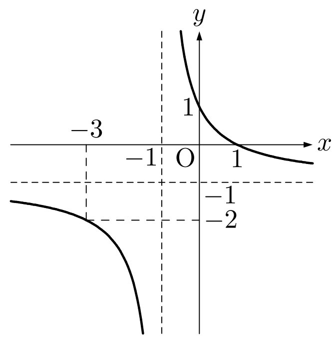
（3）　分子を分母で割ると

$$\begin{array}{r} -1 \\ x+1 \,\big)\overline{\;-x+1\;} \\ \underline{-x-1} \\ 2 \end{array}$$

よって，$y=\dfrac{2}{x+1}-1$

この関数のグラフは，$y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを，x 軸方向に -1，y 軸方向に -1 平行移動したものである．

定義域は $x \fallingdotseq -1$，値域は $y \fallingdotseq -1$ で，漸近線は，$x=-1$，$y=-1$ である．



〔式変形の別解〕
$$\begin{aligned} y &= \frac{-(x+1)+2}{x+1} \\ &= \frac{-(x+1)}{x+1}+\frac{2}{x+1} \\ &= \frac{2}{x+1}-1 \end{aligned}$$

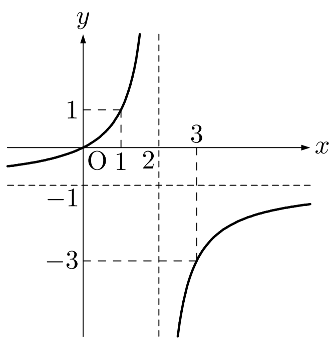
（4） 分子を分母で割ると

$$\begin{array}{r} -1 \\ -x+2\,\big)\overline{\ \ x\ \ \ \ \ \ } \\ x-2 \\ \hline 2 \end{array}$$

よって，
$$y=\frac{2}{-x+2}-1$$
$$=-\frac{2}{x-2}-1$$

この関数のグラフは，$y=-\dfrac{2}{x}$ のグラフを，x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 平行移動したものである．

定義域は $x \fallingdotseq 2$，値域は $y \fallingdotseq -1$ で，漸近線は，$x=2$，$y=-1$ である．



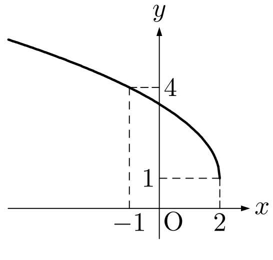
〔式変形の別解〕

$$y=\frac{(x-2)+2}{-(x-2)}$$
$$=\frac{x-2}{-(x-2)}+\frac{2}{-(x-2)}$$
$$=-\frac{2}{x-2}-1$$

（5） $y=\sqrt{-3(x-2)}+1$

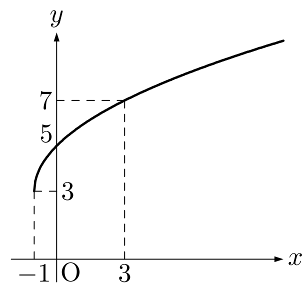
この関数のグラフは，$y=\sqrt{-3x}$ のグラフを，x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 平行移動したものである．

定義域は $-3x+6 \geqq 0$ より，$x \leqq 2$.



（6） この関数のグラフは，$y=2\sqrt{x}$ のグラフを，x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 平行移動したものである．

定義域は $x+1 \geqq 0$ より，$x \geqq -1$.



3.
$$y=\frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}+2}{2x-1}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{5}{2}}{2x-1}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{5}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{2}$$

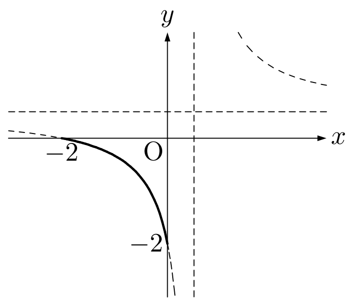
よって，この関数のグラフは，$y=\dfrac{5}{4x}$ $\left(y=\dfrac{\frac{5}{4}}{x}\right)$ のグラフを，x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 平行移動したものである．

定義域は，$x \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$，値域は，$y \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ で，漸近線は，$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ である．

$x=-2$ のとき，$y=\dfrac{-2+2}{2\cdot(-2)-1}=0$

$x=0$ のとき，$y=\dfrac{0+2}{2\cdot 0-1}=-2$

与えられた定義域でのグラフを書くと



よって，値域は，$\boldsymbol{-2 \leqq y \leqq 0}$

4. グラフが，点 $(-1,\ 1)$ を通るので
$$1=\frac{a\cdot(-1)+b}{2\cdot(-1)+1}$$
$$1=\frac{-a+b}{-1}$$
すなわち，$-a+b=-1\cdots$①

また

$$y=\frac{a\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}a+b}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$
$$=-\frac{\frac{1}{2}a-b}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{a}{2}$$
$$=-\frac{\frac{1}{4}(a-2b)}{x+\frac{1}{2}}+\frac{a}{2}$$

よって，漸近線は，$x=-\frac{1}{2}$，$y=\frac{a}{2}$ であるから

$\frac{a}{2}=2$，すなわち，$a=4$

これを，①に代入して

$-4+b=-1$

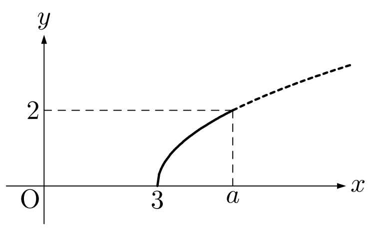
$b=3$

したがって，$\boldsymbol{a=4,\ b=3}$

5. $y=\sqrt{2(x-3)}$

よって，この関数のグラフは，$y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に 3 平行移動したものである．

定義域は，$2x-6\geqq 0$ より，$x\geqq 3$



グラフより，$x=a$ のとき，$y=2$ となればよいので

$2=\sqrt{2a-6}$

両辺を 2 乗して

$4=2a-6$

$2a=10$

$\boldsymbol{a=5}$

6. （1） 逆関数は，$x=ay+b$

これを，y について解くと

$ay+b=x$

$ay=x-b$

$a\neq 0$ なので

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}}$$

定義域，値域は，すべての実数．

（2） この関数の定義域は，$x\leqq 0$，値域は，$y\geqq -2$ であるから，逆関数の定義域，値域はそれぞれ

$x\geqq -2$，$y\leqq 0$

逆関数は，$x=y^2-2$

これを，y について解くと

$y^2-2=x$

$y^2=x+2$

$y\leqq 0$ なので

$$\boldsymbol{y=-\sqrt{x+2}}$$

（3） この関数の定義域は，$x\fallingdotseq -b$，値域は，$y\fallingdotseq 0$ であるから，逆関数の定義域，値域はそれぞれ

$x\fallingdotseq 0$，$y\fallingdotseq -b$

逆関数は，$x=\frac{a}{y+b}$

これを，y について解くと

$x(y+b)=a$

$x\fallingdotseq 0$ なので

$y+b=\frac{a}{x}$

$$\boldsymbol{y=\frac{a}{x}-b}$$

（4） $y=\frac{(x+3)-4}{x+3}$

$=-\frac{4}{x+3}+1$

この関数の定義域は，$x\fallingdotseq -3$，値域は，$y\fallingdotseq 1$ であるから，逆関数の定義域，値域はそれぞれ

$x\fallingdotseq 1$，$y\fallingdotseq -3$

逆関数は，$x=\frac{y-1}{y+3}$

これを，y について解くと

$x(y+3)=y-1$

$xy-y=3x-1$

$y(x-1)=-3x-1$

$x\fallingdotseq 1$ なので

$$\boldsymbol{y=\frac{-3x-1}{x-1}}$$

7. この関数の定義域は，$x\geqq 1$，値域は，$y\geqq 3$ であるから，逆関数の定義域，値域はそれぞれ

$x\geqq 3$，$y\geqq 1$

逆関数は，$x=(y-1)^2+3$

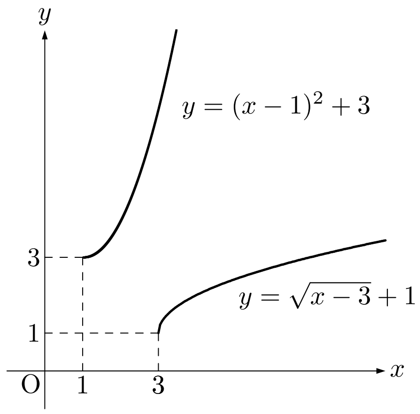
これを，y について解くと

$(y-1)^2=x-3$

$y\geqq 1$ より，$y-1\geqq 0$ であるから

$y-1=\sqrt{x-3}$

$$\boldsymbol{y=\sqrt{x-3}+1}\quad(x\geqq 3)$$



練習問題 2-B

1. グラフが原点を通るから

$$0=\frac{0+b}{0+c}$$

すなわち，$b=0$

また

$$y=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$$

$$=a+\frac{b-ac}{x+c}=\frac{b-ac}{x+c}+a$$

よって，漸近線は，$x=-c$, $y=a$ であるから

$$-c=-1,\quad a=2$$

以上より，$\boldsymbol{a=2,\ b=0,\ c=1}$

2. $y=\sqrt{kx}$ のグラフを，x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 平行移動したグラフの式は，$y-1=\sqrt{k(x+3)}$ である．

このグラフが，点 $(-11,\ 5)$ を通るので

$$5-1=\sqrt{k(-11+3)}$$

$$4=\sqrt{-8k}$$

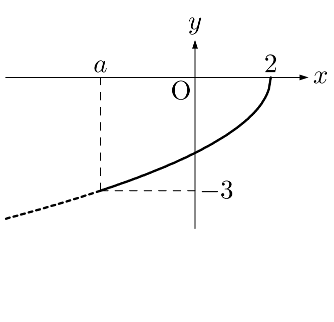
$$4^2=(\sqrt{-8k})^2$$

$$16=-8k$$

よって，$\boldsymbol{k=-2}$

3. $y=-\sqrt{-2(x-2)}$ であるから，このグラフは，$y=-\sqrt{-2x}$ のグラフを，x 軸方向に 2 平行移動したものである．

定義域は，$4-2x\geqq 0$ より，$x\leqq 2$



グラフより，$x=a$ のとき，$y=-3$ となればよいので

$$-3=-\sqrt{4-2a}$$

$$(-3)^2=(-\sqrt{4-2a})^2$$

$$9=4-2a$$

$$2a=-5$$

よって，$\boldsymbol{a=-\frac{5}{2}}$

4.
$$y=\frac{x+\frac{k}{2}-\frac{k}{2}-1}{2\left(x+\frac{k}{2}\right)}$$

$$=\frac{-\frac{k}{2}-1}{2\left(x+\frac{k}{2}\right)}+\frac{1}{2}$$

逆関数が存在するためには，$-\frac{k}{2}-1\fallingdotseq 0$，すなわち，$k\fallingdotseq -2$

このとき，この関数の定義域は，$x\fallingdotseq -\frac{k}{2}$，値域は，$y\fallingdotseq \frac{1}{2}$ であるから，逆関数の定義域は，$x\fallingdotseq \frac{1}{2}$，値域は，$y\fallingdotseq -\frac{k}{2}$

逆関数は，$x=\frac{y-1}{2y+k}$ であるから，これを y について解くと

$$(2y+k)x=y-1$$

$$2yx+kx=y-1$$

$$(2x-1)y=-kx-1$$

$x\fallingdotseq \frac{1}{2}$ であるから，$y=\frac{-kx-1}{2x-1}$

これともとの関数である $y=\frac{x-1}{2x+k}$ が一致するので，$\frac{x-1}{2x+k}=\frac{-kx-1}{2x-1}$ が，x についての恒等式になる．

両辺に $(2x+k)(2x-1)$ をかけると

$$(x-1)(2x-1)=(-kx-1)(2x+k)$$

$$2x^2-3x+1=-2kx^2+(-k^2-2)x-k$$

よって

$$\begin{cases} 2=-2k \\ -3=-k^2-2 \\ 1=-k \end{cases}$$

したがって，$\boldsymbol{k=-1}$

※ 恒等式に持ち込まなくても，$\frac{x-1}{2x+k}=\frac{-kx-1}{2x-1}$ から，$k=-1$ としてもいいかもしれません．

5.
$$f(x)=\frac{a(x-3)+3a+b}{x-3}$$

$$=\frac{3a+b}{x-3}+a$$

逆関数が存在するためには，$3a+b\fallingdotseq 0$

このとき，この関数の定義域は $x \neq 3$, 値域は，$y \neq a$ であるから，逆関数の定義域は，$x \neq a$，値域は，$y \neq 3$

逆関数は，$x = \dfrac{ay+b}{y-3}$ であるから，これを y について解くと

$$(y-3)x = ay + b$$
$$xy - 3x = ay + b$$
$$(x-a)y = 3x + b$$
$$(x-a)y = 3x + b$$

$x \neq a$ であるから，$g(x) = \dfrac{3x+b}{x-a}$

$f(2) = 1$ より

$1 = \dfrac{2a+b}{-1}$，すなわち，$2a + b = -1 \cdots$ ①

$g(3) = 4$ より

$4 = \dfrac{9+b}{3-a}$，すなわち，$4(3-a) = 9 + b$

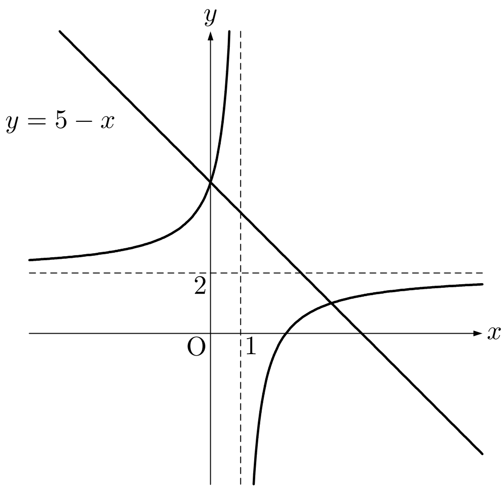
整理すると，$4a + b = 3 \cdots$ ②

①，②を連立させて解くと，$a = 2$, $b = -5$

これは，$3a + b \neq 0$ を満たすので，$\boldsymbol{a = 2,\ b = -5}$

6. （1）
$$y = \frac{2(x-1)-3}{x-1} = -\frac{3}{x-1} + 2$$

この関数の定義域は，$x \neq 1$，値域は，$y \neq 2$



（2）
$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-5}{x-1} \\ y = 5 - x \end{cases}$$

を解くと

$$\frac{2x-5}{x-1} = 5 - x$$
$$2x - 5 = (5-x)(x-1)$$
$$2x - 5 = -x^2 + 6x + 5$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$

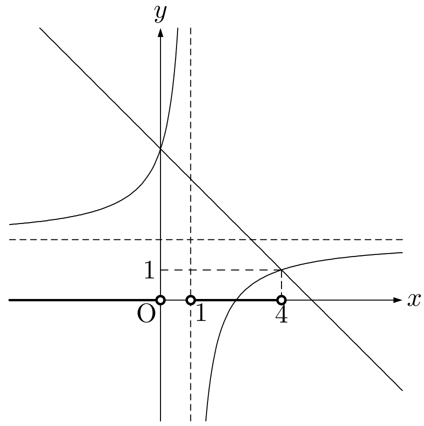
$x = 0,\ 4$

$x = 0$ のとき，$y = 5$

$x = 4$ のとき，$y = 1$

よって，交点の座標は，$\boldsymbol{(0,\ 5)}$，$\boldsymbol{(4,\ 1)}$

（3）



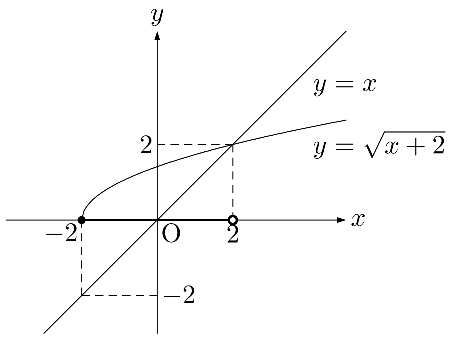
$y = 5 - x$ のグラフが，$y = \dfrac{2x-5}{x-1}$ のグラフより上側にある範囲が不等式の解であるから

$\boldsymbol{x < 0,\ 1 < x < 4}$

7. （1）
$$\begin{cases} y = \sqrt{x+2} \\ y = x \end{cases}$$
とする．

$y = \sqrt{x+2}$ の定義域は，$x + 2 \geqq 0$ より，$x \geqq -2$，値域は $y \geqq 0$

$y = \sqrt{x+2}$ と $y = x$ のグラフをかくと



交点の座標を求めるために，$\sqrt{x+2} = x$ を解くと

$$x + 2 = x^2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$

$x = 2,\ -1$

$x = 2$ のとき，左辺 $=$ 右辺 $= 2$

$x = -1$ のとき，左辺 $= 1$，右辺 $= -1$，よって，無縁解．

よって，交点の座標は，$(2,\ 2)$

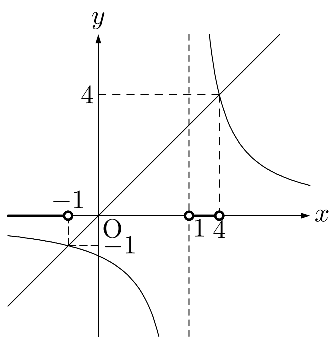
$y = \sqrt{x+2}$ のグラフが，$y = x$ のグラフより上側にある範囲が不等式の解であるから

$\boldsymbol{-2 \leqq x < 2}$

（2） $\begin{cases} y = \dfrac{4}{x-3} \\ y = x \end{cases}$ とする．

$y = \dfrac{4}{x-3}$ の定義域は，$x \neq 3$，値域は $y \neq 0$

$y = \dfrac{4}{x-3}$ と $y = x$ のグラフをかくと



交点の座標を求めるために，$\dfrac{4}{x-3} = x$ を解くと

$4 = x(x-3)$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x = 4,\ -1$

$x = 4$ のとき，$y = 4$

$x = -1$ のとき，$y = -1$

よって，交点の座標は，$(4,\ 4)$，$(-1,\ -1)$

$y = \dfrac{4}{x-3}$ のグラフが，$y = x$ のグラフより上側にある範囲が不等式の解であるから

$\boldsymbol{x < -1,\ \ 3 < x < 4}$

■