3章　関数とグラフ

§2　いろいろな関数 (p.87〜p.97)

問 1

$y=f(x)$ とおく.

（1） $f(-x)=(-x)^2+1$

$=x^2+1$

$=f(x)$

よって，**偶関数**である.

（2） $f(-x)=-(-x)^5+(-x)$

$=x^5-x$

$=-(-x^5+x)$

$=-f(x)$

よって，**奇関数**である.

（3） $f(-x)=(-x)-(-x)^2$

$=-x-x^2$

$f(-x)\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x)$

よって，**奇関数でも偶関数でもない**.

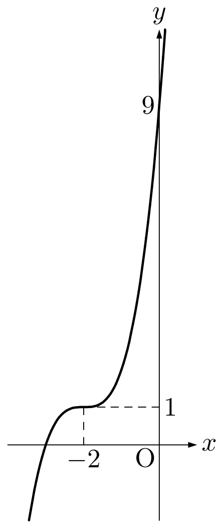
問 2

（1）　この関数のグラフは，$y=x^3$ のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 平行移動したものである.

また，$x=0$ のとき

$y=(0+2)^3+1$

$=8+1=9$

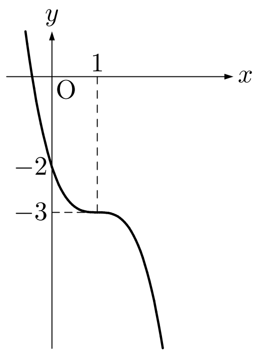


（2）　この関数のグラフは，$y=-x^3$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 平行移動したものである.

また，$x=0$ のとき

$y=-(0-1)^3-3$

$=1-3=-2$

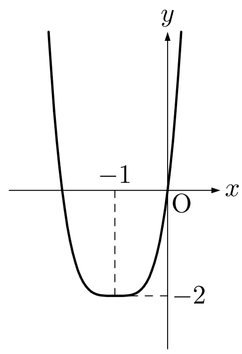


（3）　この関数のグラフは，$y=2x^4$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 平行移動したものである.

また，$x=0$ のとき

$y=2(0+1)^4-2$

$=2-2=0$



問 3

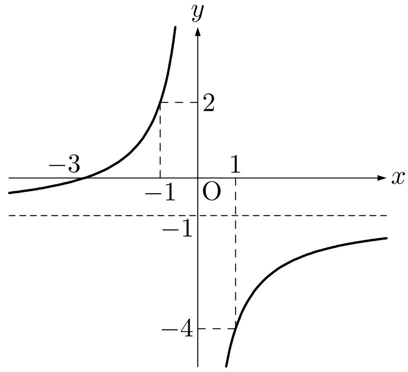
（1）　この関数のグラフは，$y=-\dfrac{3}{x}$ のグラフを y 軸方向に -1 平行移動したものである.

定義域は，$\boldsymbol{x\neq 0}$，値域は，$\boldsymbol{y\neq -1}$

漸近線は，$\boldsymbol{x=0,\ \ y=-1}$.

また，$y=0$ のとき

$0=-\dfrac{3}{x}-1$ より，$x=-3$



（2） この関数のグラフは，$y=\dfrac{4}{x}$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 平行移動したものである．

定義域は，$\boldsymbol{x \neq -1}$，値域は，$\boldsymbol{y \neq -2}$

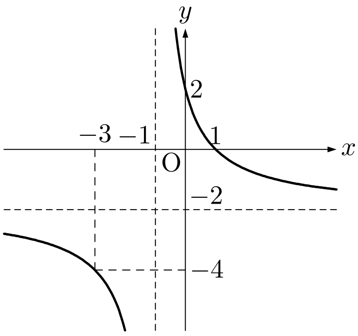
漸近線は，$\boldsymbol{x=-1}$，$\boldsymbol{y=-2}$．

また，$x=0$ のとき

$y=\dfrac{4}{0+1}-2$ より，$y=2$

$y=0$ のとき

$0=\dfrac{4}{x+1}-2$ より，$x=1$



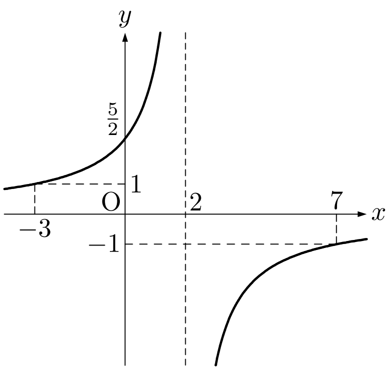
（3） $y=-\dfrac{5}{x-2}$ であるから，この関数のグラフは，$y=-\dfrac{5}{x}$ のグラフを x 軸方向に 2 平行移動したものである．

定義域は，$\boldsymbol{x \neq 2}$，値域は，$\boldsymbol{y \neq 0}$

漸近線は，$\boldsymbol{x=2}$，$\boldsymbol{y=0}$．

また，$x=0$ のとき

$y=\dfrac{5}{2-0}$ より，$y=\dfrac{5}{2}$



問 4

（1） 分子を分母で割ると

$$\begin{array}{rr} & 4 \\ x-1\,\big) & \overline{4x-3} \\ & \underline{4x-4} \\ & 1 \end{array}$$

よって，$y=\dfrac{1}{x-1}+4$

この関数のグラフは，$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを，x 軸方向に 1，y 軸方向に 4 平行移動したものである．

定義域は $\boldsymbol{x \neq 1}$，値域は $\boldsymbol{y \neq 4}$

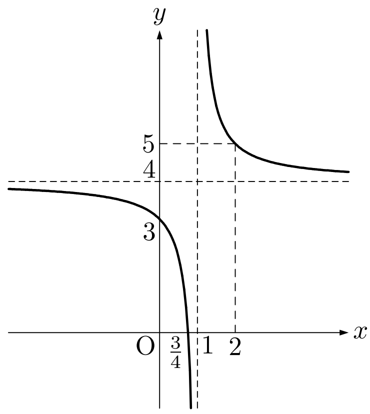
漸近線は，$\boldsymbol{x=1}$，$\boldsymbol{y=4}$．

また，$x=0$ のとき

$y=\dfrac{1}{0-1}+4$ より，$y=3$

$y=0$ のとき

$0=\dfrac{1}{x-1}+4$ より，$x=\dfrac{3}{4}$



〔式変形の別解〕

$$\begin{aligned} y &= \frac{4(x-1)+1}{x-1} \\ &= \frac{4(x-1)}{x-1}+\frac{1}{x-1} \\ &= \frac{1}{x-1}+4 \end{aligned}$$

（2） 分子を分母で割ると

$$\begin{array}{rr} & -2 \\ x+1\,\big) & \overline{-2x} \\ & \underline{-2x-2} \\ & 2 \end{array}$$

よって，$y=\dfrac{2}{x+1}-2$

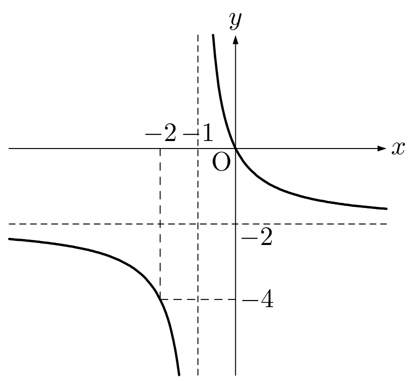
この関数のグラフは，$y=\dfrac{2}{x}$ のグラフを，x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 平行移動したものである．

定義域は $\boldsymbol{x \neq -1}$，値域は $\boldsymbol{y \neq -2}$

漸近線は，$\boldsymbol{x=-1}$，$\boldsymbol{y=-2}$．

また，$x=0$ のとき

$y=\dfrac{2}{0+1}-2$ より，$y=0$



〔式変形の別解〕

$$\begin{aligned} y &= \frac{-2(x+1)+2}{x+1} \\ &= \frac{-2(x+1)}{x+1} + \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{2}{x+1} - 2 \end{aligned}$$

問 5

（1）　$3 - x \geqq 0$ より，定義域は $\boldsymbol{x \leqq 3}$

（2）　分母 $\neq 0$ であるから，$x - 2 > 0$ より，定義域は $\boldsymbol{x > 2}$

（3）　$x^2 - x - 6 \geqq 0$ を解くと

$(x+2)(x-3) \geqq 0$

$x \leqq -2,\ \ 3 \leqq x$

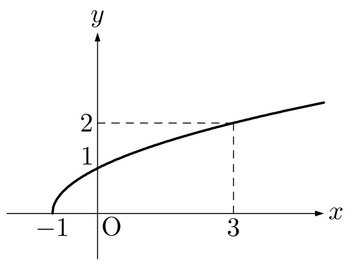
よって，定義域は $\boldsymbol{x \leqq -2,\ \ 3 \leqq x}$

問 6

（1）　この関数のグラフは，$y = \sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に -1 平行移動したものである．

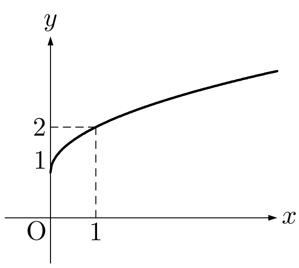
定義域は，$x+1 \geqq 0$ より，$\boldsymbol{x \geqq -1}$，値域は，$\boldsymbol{y \geqq 0}$

また，$x = 0$ のとき，$y = \sqrt{0+1} = 1$



（2）　この関数のグラフは，$y = \sqrt{x}$ のグラフを y 軸方向に 1 平行移動したものである．

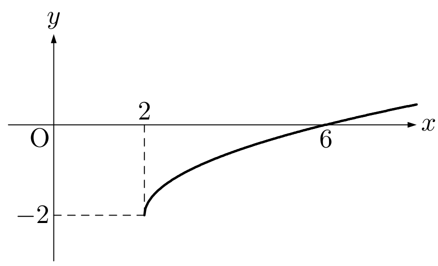
定義域は，$\boldsymbol{x \geqq 0}$，値域は，$\boldsymbol{y \geqq 1}$



（3）　この関数のグラフは，$y = \sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 平行移動したものである．

定義域は，$x-2 \geqq 0$ より，$\boldsymbol{x \geqq 2}$，値域は，$\boldsymbol{y \geqq -2}$

また，$y = 0$ のとき，$0 = \sqrt{x-2} - 2$ より，$x = 6$



問 7

$y = f(x)$ とおく．

（1）　求める関数の式は，$y = -f(x)$ であるから

$$\begin{aligned} y &= -f(x) \\ &= -(x^2 - x) \\ &= \boldsymbol{-x^2 + x} \end{aligned}$$

（2）　求める関数の式は，$y = f(-x)$ であるから

$$\begin{aligned} y &= f(-x) \\ &= (-x)^2 - (-x) \\ &= \boldsymbol{x^2 + x} \end{aligned}$$

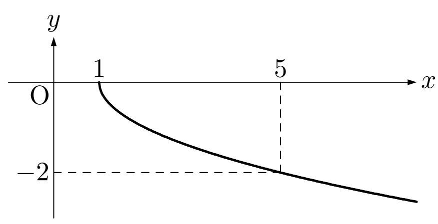
（3）　求める関数の式は，$y = -f(-x)$ であるから

$$\begin{aligned} y &= -f(-x) \\ &= -\{(-x)^2 - (-x)\} \\ &= -(x^2 + x) \\ &= \boldsymbol{-x^2 - x} \end{aligned}$$

問 8

（1）　この関数のグラフは，$y = -\sqrt{x}$ のグラフを x 軸方向に 1 平行移動したものである．

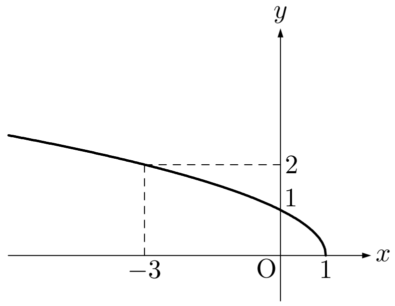
定義域は，$x - 1 \geqq 0$ より，$\boldsymbol{x \geqq 1}$，値域は，$\boldsymbol{y \leqq 0}$



（2）　$y = \sqrt{-(x-1)}$ であるから，この関数のグラフは，$y = \sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 1 平行移動したものである．

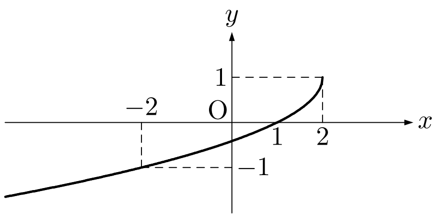
定義域は，$-x+1 \geqq 0$ より，$\boldsymbol{x \leqq 1}$，値域は，$\boldsymbol{y \geqq 0}$

また，$x = 0$ のとき，$y = \sqrt{0+1} = 1$



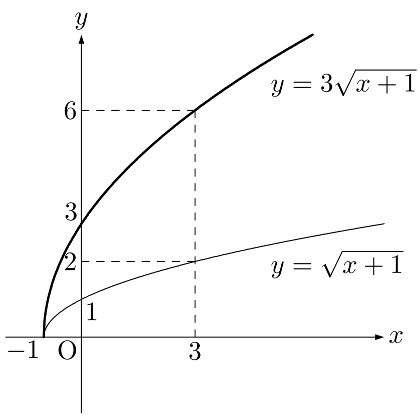
（3）　$y=-\sqrt{-(x-2)}+1$ であるから，この関数のグラフは，$y=-\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 平行移動したものである．

定義域は，$2-x \geqq 0$ より，$\boldsymbol{x \leqq 2}$，値域は，$\boldsymbol{y \leqq 1}$



問 9

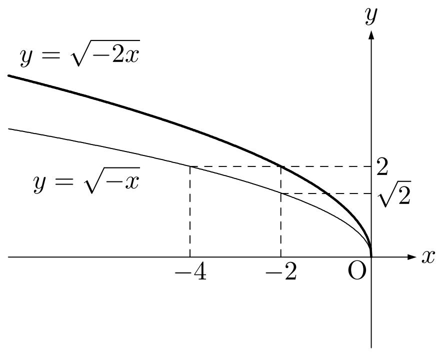
（1）　$f(x)=\sqrt{x+1}$ とすると，$y=3f(x)$ であるから，この関数のグラフは，$y=\sqrt{x+1}$ のグラフを y 軸方向に 3 倍して得られる．



（2）　$f(x)=\sqrt{-x}$ とすると，$y=f(2x)$ であるから，この関数のグラフは，$y=\sqrt{-x}$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍して得られる．

〔別解〕

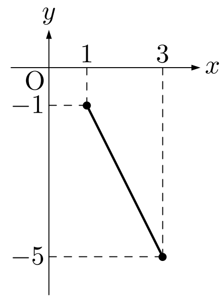
$f(x)=\sqrt{-x}$ とすると，$y=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-x}=\sqrt{2}f(x)$ であるから，この関数のグラフは，$y=\sqrt{-x}$ のグラフを y 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍して得られる．



問 10

（1）　$x=1$ のとき，$y=-2\cdot 1+1=-1$

$x=3$ のとき，$y=-2\cdot 3+1=-5$



よって，この関数の値域は，$-5 \leqq y \leqq -1$

$y=-2x+1$ を x について解くと

$2x=-y+1$

$x=-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}$

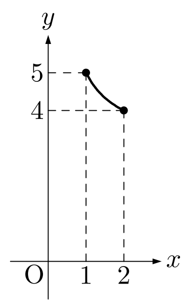
よって，逆関数は，$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}}$

また，逆関数の定義域，値域はそれぞれ

$\boldsymbol{-5 \leqq x \leqq -1}$，$\boldsymbol{1 \leqq y \leqq 3}$

（2）　$x=1$ のとき，$y=\dfrac{2}{1}+3=5$

$x=2$ のとき，$y=\dfrac{2}{2}+3=4$



よって，この関数の値域は，$4 \leqq y \leqq 5$

$y=\dfrac{2}{x}+3$ を x について解くと

$xy=2+3x$

$(y-3)x=2$

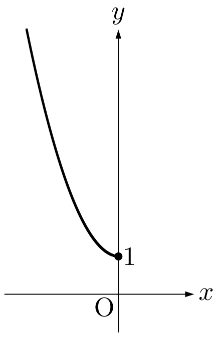
$x=\dfrac{2}{y-3}$　$(4 \leqq y \leqq 5$ より，$y \neq 3)$

よって，逆関数は，$\boldsymbol{y=\dfrac{2}{x-3}}$

また，逆関数の定義域，値域はそれぞれ

$\boldsymbol{4 \leqq x \leqq 5,\ \ 1 \leqq y \leqq 2}$

（3）　$x = 0$ のとき，$y = 0^2 + 1 = 1$



この関数の値域は，$y \geqq 1$

$y = x^2 + 1$ を x について解くと

$x^2 = y - 1$

$x = \pm\sqrt{y-1}$

$x \leqq 0$ より，$x = -\sqrt{y-1}$ であるから，逆関数は，

$\boldsymbol{y = -\sqrt{x-1}}$

また，逆関数の定義域，値域はそれぞれ

$\boldsymbol{x \geqq 1,\ \ y \leqq 0}$

∎