4章　指数関数と対数関数

§1　指数関数　(p.109〜p.110)

練習問題 1-A

1. (1)　与式 $= (8a^{-6})^{\frac{1}{3}}$

$= 8^{\frac{1}{3}} \cdot (a^{-6})^{\frac{1}{3}}$

$= (2^3)^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-6\cdot\frac{1}{3}}$

$= 2^{3\cdot\frac{1}{3}} \cdot a^{-2}$

$= 2^1 \cdot a^{-2}$

$= \boldsymbol{2a^{-2}}$　または，$\boldsymbol{\dfrac{2}{a^2}}$

(2)　与式 $= \{(a^{-3})^{\frac{1}{6}}\}^4$

$= a^{-3\cdot\frac{1}{6}\cdot 4}$

$= \boldsymbol{a^{-2}}$　または，$\boldsymbol{\dfrac{1}{a^2}}$

(3)　与式 $= a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$

$= a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$

$= \boldsymbol{a^{\frac{5}{6}}}$　または，$\boldsymbol{\sqrt[6]{a^5}}$

(4)　与式 $= a^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{3}{4}}$

$= a^{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}$

$= \boldsymbol{a^{-\frac{5}{12}}}$　または，$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt[12]{a^5}}}$

2. (1)　それぞれの数を，0.7 を底として表すと

$$\begin{array}{ccccc} 0.7 & 1 & (0.7)^{-2} & (0.7)^{-3} & \sqrt{0.7} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (0.7)^1 & (0.7)^0 & (0.7)^{-2} & (0.7)^{-3} & (0.7)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

$y = 0.7^x$ は，単調に減少するから

$(0.7)^{-3} > (0.7)^{-2} > (0.7)^0 > (0.7)^{\frac{1}{2}} > (0.7)^1$

したがって

$\boldsymbol{(0.7)^{-3},\ (0.7)^{-2},\ 1,\ \sqrt{0.7},\ 0.7}$

(2)　$\sqrt[3]{16} = (4^2)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$

それぞれの数を，4 を底として表すと

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[3]{4} & 4^{-\frac{1}{2}} & 1 & \sqrt[3]{16} & 4^{-\frac{2}{5}} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4^{\frac{1}{3}} & 4^{-\frac{1}{2}} & 4^0 & 4^{\frac{2}{3}} & 4^{-\frac{2}{5}} \end{array}$$

$y = 4^x$ は，単調に増加するから

$4^{\frac{2}{3}} > 4^{\frac{1}{3}} > 4^0 > 4^{-\frac{2}{5}} > 4^{-\frac{1}{2}}$

したがって

$\boldsymbol{\sqrt[3]{16},\ \sqrt[3]{4},\ 1,\ 4^{-\frac{2}{5}},\ 4^{-\frac{1}{2}}}$

3. (1)　$\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 3$ の両辺を 2 乗すると

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 3^2$$

$$(\sqrt{x})^2 + 2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 9$$

$$x + 2 + \frac{1}{x} = 9$$

よって

$$x + x^{-1} = x + \frac{1}{x}$$

$$= 9 - 2 = \mathbf{7}$$

〔別解〕

※ $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ を利用する．

与式 $= x + \dfrac{1}{x}$

$$= \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= 3^2 - 2 = \mathbf{7}$$

(2)　$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ として，この両辺を 3 乗すると

$$(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 = 3^3$$

$$(x^{\frac{1}{2}})^3 + 3\cdot(x^{\frac{1}{2}})^2\cdot(x^{-\frac{1}{2}}) + 3\cdot(x^{\frac{1}{2}})\cdot(x^{-\frac{1}{2}})^2 + (x^{-\frac{1}{2}})^3 = 27$$

$$x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) + x^{-\frac{3}{2}} = 27$$

$$x^{\frac{3}{2}} + 3\cdot 1\cdot 3 + x^{-\frac{3}{2}} = 27$$

よって

$$x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = 27 - 9$$

$$= \mathbf{18}$$

〔別解〕

※ $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ を利用する．

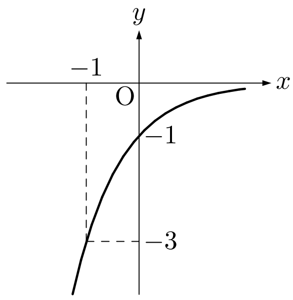
与式 $= (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 - 3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$

$$= (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 - 3x^0(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$$

$$= 3^3 - 3\cdot 1\cdot 3$$

$$= 27 - 9 = \mathbf{18}$$

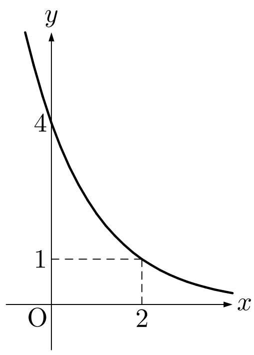
4. (1)　この関数のグラフは，$y = 3^x$ のグラフを，原点に関して対称移動したものである．



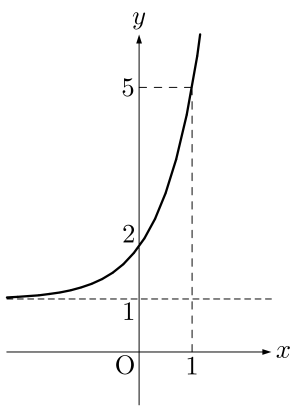
（2）　$y = 2^{2-x}$

$= 2^{-(x-2)}$

この関数のグラフは，$y = 2^{-x}$ のグラフを，x 軸方向に 2 平行移動したものである．



（3）　この関数のグラフは，$y = 4^x$ のグラフを，y 軸方向に 1 平行移動したものである．



5.（1）　$2^{x+2} = 2^6$

よって

$x + 2 = 6$

$x = 6 - 2$

$\boldsymbol{x = 4}$

（2）　$2^x = X$ とおくと

$X > 0,\ 4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = X^2$

$X^2 - 3X - 4 = 0$

$(X+1)(X-4) = 0$

$X = -1,\ 4$

$X > 0$ より，$X = 4$

よって

$2^x = 4$

$2^x = 2^2$

$\boldsymbol{x = 2}$

（3）　$3^x = X$ とおくと

$X > 0,\ 9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = X^2$

$9^x \cdot 9^1 - 3^x - 8 = 0$

$9X^2 - X - 8 = 0$

$(9X+8)(X-1) = 0$

$X = -\dfrac{9}{8},\ 1$

$X > 0$ より，$X = 1$

よって

$3^x = 1$

$3^x = 3^0$

$\boldsymbol{x = 0}$

6.（1）　$(2^2)^x < (\sqrt{2})^{-1}$

$2^{2x} < (2^{\frac{1}{2}})^{-1}$

$2^{2x} < 2^{-\frac{1}{2}}$

底が 1 より大きいので

$2x < -\dfrac{1}{2}$

$\boldsymbol{x < -\dfrac{1}{4}}$

（2）　$(3^{-1})^{2-x} > 3^2$

$3^{x-2} > 3^2$

底が 1 より大きいので

$x - 2 > 2$

$\boldsymbol{x > 4}$

7.（1）　与式 $= (a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2$

$= a^1 - b^1 = \boldsymbol{a - b}$

（2）　与式 $= \{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{-\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})$

$= (a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}})$

$= \{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{-\frac{1}{2}})^2\}$

$= a^1 - b^{-1} = \boldsymbol{a - b^{-1}}$

（3）　与式 $= \dfrac{(a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}$

$= \dfrac{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})\{(a^{\frac{1}{3}})^2 + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + (b^{\frac{1}{3}})^2\}}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}$

$= \boldsymbol{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$

練習問題 1-B

1. $a^{2x}=3$ より，$a^{-2x}=\dfrac{1}{a^{2x}}=\dfrac{1}{3}$

（1）与式 $=(a^x)^2-2\cdot a^x\cdot a^{-x}+(a^{-x})^2$

$=a^{2x}-2+a^{-2x}$

$=3-2+\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

（2）与式 $=\dfrac{(a^x)^3+(a^{-x})^3}{a^x+a^{-x}}$

$=\dfrac{(a^x+a^{-x})\{(a^x)^2-a^xa^{-x}+(a^{-x})^2\}}{a^x+a^{-x}}$

$=a^{2x}-1+a^{-2x}$

$=3-1+\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$

2.（1） それぞれの数を，2 を底として表すと

$8^{-\frac{1}{4}}=(2^3)^{-\frac{1}{4}}=2^{-\frac{3}{4}}$

$4^{-\frac{2}{5}}=(2^2)^{-\frac{2}{5}}=2^{-\frac{4}{5}}$

$\sqrt[8]{2^{-7}}=(2^{-7})^{\frac{1}{8}}=2^{-\frac{7}{8}}$

$y=2^x$ は単調に増加するから

$2^{-\frac{7}{8}}<2^{-\frac{4}{5}}<2^{-\frac{3}{4}}$

よって，$\boldsymbol{\sqrt[8]{2^{-7}},\ 4^{-\frac{2}{5}},\ 8^{-\frac{1}{4}}}$

（2） それぞれの数を，3 を底として表すと

$\sqrt{27}=(3^3)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt[4]{3^5}=(3^5)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{5}{4}}$

$\sqrt[3]{81}=(3^4)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{3}}$

$y=3^x$ は単調に増加するから

$3^{\frac{5}{4}}<3^{\frac{4}{3}}<3^{\frac{3}{2}}$

よって，$\boldsymbol{\sqrt[4]{3^5},\ \sqrt[3]{81},\ \sqrt{27}}$

3. $2^x-2^{-x}=3$ の両辺を 2 乗すると

$(2^x-2^{-x})^2=3^2$

$(2^x)^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}+(2^{-x})^2=9$

$2^{2x}-2+2^{-2x}=9$

よって，$2^{2x}+2^{-2x}=9+2=11\cdots$①

$(2^x+2^{-x})^2=(2^x)^2+2\cdot2^x\cdot2^{-x}+(2^{-x})^2$

$=2^{2x}+2+2^{-2x}$

$=2^{2x}+2^{-2x}+2$

①より，$2^{2x}+2^{-2x}=11$ であるから

$(2^x+2^{-x})^2=11+2=13$

ここで，$2^x>0,\ 2^{-x}>0$ なので，$2^x+2^{-x}>0$

よって，$2^x+2^{-x}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$

4.（1） $4^x=X$ とおく．ただし，$X>0\cdots$①

$(4^2)^x-5\cdot4^x+4>0$

$(4^x)^2-5\cdot4^x+4>0$

$X^2-5X+4>0$

$(X-1)(X-4)>0$

よって，$X<1,\ 4<X$

①より，$0<X<1,\ 4<X$

したがって，$0<4^x<1,\ 4<4^x$

$0<4^x$ は常に成り立つので，$4^x<1$

すなわち，$4^x<4^0$ であるから，$x<0$

また, $4<4^x$ より, $4^1<4^x$ であるから, $1<x$

よって，$\boldsymbol{x<0,\ 1<x}$

（2） 両辺に，$2^x>0$ をかけると

$2^x\cdot2^{x+2}-2^x\cdot2^{-x}+2^x\cdot3=0$

$2^{2x+2}-1+3\cdot2^x=0$

$2^2\cdot(2^x)^2+3\cdot2^x-1=0$

$4\cdot(2^x)^2+3\cdot2^x-1=0$

$2^x=X$ とおく．ただし，$X>0\cdots$①

$4X^2+3X-1=0$

$(4x-1)(x+1)=0$

よって，$X=\dfrac{1}{4},\ -1$

①より，$X=\dfrac{1}{4}$

したがって

$2^x=\dfrac{1}{4}$

$2^x=2^{-2}$

よって，$\boldsymbol{x=-2}$

（3） $2^x=X$ とおく．ただし，$X>0\cdots$①

$(2^2)^x+2^x\cdot2^1-24\leqq0$

$(2^x)^2+2\cdot2^x-24\leqq0$

$X^2+2X-24\leqq0$

$(X-6)(X+4)\leqq0$

よって，$-6\leqq X\leqq4$

これと①より，$0<X\leqq4$

したがって，$0<2^x\leqq4$

$0<2^x$ は常に成り立つので，$2^x\leqq4$

すなわち，$2^x\leqq2^2$ であるから，$\boldsymbol{x\leqq2}$

（4） 2 式を上から①，②とする．

$2^x=X,\ 2^y=Y$ とおく．ただし，$X>0,\ Y>0\cdots$③

①より

$2^x\cdot2^{-y}\cdot2^1=8$

$2\cdot2^x\cdot\dfrac{1}{2^y}=8$

すなわち，$\dfrac{X}{Y}=4\cdots$①$'$

②より

$(2^2)^x-(2^2)^y=60$

$(2^x)^2-(2^y)^2=60$

$X^2-Y^2=60\cdots$②$'$

①$'$ より，$X=4Y$ であるから，これを ②$'$ に代入して

$(4Y)^2-Y^2=60$

$15Y^2=60$

$Y^2=4$

$Y>0$ より，$Y=2$

このとき，$X=4Y=8$

したがって，$2^x=8$，$2^y=2$，すなわち，$2^x=2^3$，$2^y=2^1$ であるから，$\boldsymbol{x=3,\ y=1}$

〔別解〕

①より，$2^{x-y+1}=2^3$ であるから

$x-y+1=3$

$y=x-2$

これを②に代入して

$4^x-4^{x-2}=60$

$4^x-4^x\cdot4^{-2}=60$

$4^x-\dfrac{4^x}{4^2}=60$

$16\cdot4^x-4^x=60\cdot4^2$

$15\cdot4^x=60\cdot4^2$

$4^x=\dfrac{60\cdot4^2}{15}=4\cdot4^2=4^3$

よって，$x=3$

このとき，$y=3-1=2$

以上より，$\boldsymbol{x=3,\ y=1}$

5. i）$0<a<1$ のとき

$y=a^x$ は単調に減少するので

$5x-3<2$

$5x<5$

$x<1$

ii）$a>1$ のとき

$y=a^x$ は単調に増加するので

$5x-3>2$

$5x>5$

$x>1$

以上より

$$\begin{cases}0<a<1\ \text{のとき} & \boldsymbol{x<1}\\ a>1\ \text{のとき} & \boldsymbol{x>1}\end{cases}$$

6. （1）与式 $=(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}})$

$=(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}})\{(a^{\frac{1}{6}})^2-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+(b^{\frac{1}{6}})^2\}$

$=(a^{\frac{1}{6}})^3+(b^{\frac{1}{6}})^3$

$=\boldsymbol{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$ 　または　$\boldsymbol{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

（2）与式 $=\{(a^2b^6)^{\frac{1}{3}}\}^{-\frac{3}{4}}\times\left\{\left(\dfrac{ab^{-2}}{2}\right)^{-3}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$=(a^2b^6)^{-\frac{1}{4}}\times(2^{-1}\cdot ab^{-2})^{-\frac{3}{2}}$

$=(a^2)^{-\frac{1}{4}}(b^6)^{-\frac{1}{4}}\times(2^{-1})^{-\frac{3}{2}}a^{-\frac{3}{2}}(b^{-2})^{-\frac{3}{2}}$

$=a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}\times2^{\frac{3}{2}}\cdot a^{-\frac{3}{2}}b^3$

$=2^{\frac{3}{2}}a^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}+3}$

$=\boldsymbol{2^{\frac{3}{2}}a^{-2}b^{\frac{3}{2}}}$

7. $a>0$ より，$a^x>0$，$a^y>0$ なので，相加平均と相乗平均の大小関係より

$\dfrac{a^x+a^y}{2}\geqq\sqrt{a^x\cdot a^y}$

$=\sqrt{a^{x+y}}$

$=(a^{x+y})^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{x+y}{2}}$

よって，$\dfrac{a^x+a^y}{2}\geqq a^{\frac{x+y}{2}}$

等号が成り立つのは，$a^x=a^y$，すなわち $x=y$ のとき．

8. $2^x+8^y=2^x+2^{3y}$ であるから，**7.** より

$\dfrac{2^x+8^y}{2}=\dfrac{2^x+2^{3y}}{2}\geqq2^{\frac{x+3y}{2}}$

ここで，$x+3y-2=0$ より，$x+3y=2$ なので

$2^{\frac{x+3y}{2}}=2^{\frac{1}{1}}=2$

よって，$\dfrac{2^x+8^y}{2}\geqq2$ であるから

$2^x+8^y\geqq2\cdot2=4$

したがって，最小値は，4

また，等号が成り立つのは，$x=3y$ のときであるから，これを，$x+3y-2=0$ に代入して

$3y+3y-2=0$

$6y=2$

$y=\dfrac{1}{3}$

$x=3\cdot\dfrac{1}{3}=1$

以上より，**最小値　4** $\left(\boldsymbol{x=1,\ y=\frac{1}{3}}\ \textbf{のとき}\right)$

〔別解〕

$x+3y-2=0$ より，$x=2-3y$

よって

$2^x+8^y=2^{2-3y}+8^y$

$=2^2\cdot2^{-3y}+8^y$

$=\dfrac{4}{2^{3y}}+8^y$

$=\dfrac{4}{(2^3)^y}+8^y$

$=\dfrac{4}{8^y}+8^y$

ここで，$8^y > 0$ であるから，$\dfrac{4}{8^y} > 0$

よって，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned}\frac{4}{8^y} + 8^y &\geqq 2\sqrt{\frac{4}{8^y} \cdot 8^y} \\ &= 2\sqrt{4} = 4\end{aligned}$$

したがって，$2^x + 8^y \geqq 4$ であるから，最小値は，4

また，等号が成り立つのは，$\dfrac{4}{8^y} = 8^y$ のときであるから

$$\begin{aligned}(8^y)^2 &= 4 \\ 8^{2y} &= 4 \\ (2^3)^{2y} &= 4 \\ 2^{6y} &= 2^2\end{aligned}$$

すなわち，$6y = 2$

$y = \dfrac{1}{3}$

また，このとき，$x = 2 - 3 \cdot \dfrac{1}{3} = 1$

以上より，**最小値　4**　$\left(\boldsymbol{x = 1,\ y = \dfrac{1}{3}}\textbf{のとき}\right)$