4章　指数関数と対数関数

§ 2　対数関数　(p.111〜p.119)

問 1

（1）$\log_3 27 = m$ とおくと

$$3^m = 27$$
$$3^m = 3^3$$

よって，$m = 3$ であるから，$\boldsymbol{\log_3 27 = 3}$

〔別解〕

$$\begin{aligned}与式 &= \log_3 3^3 \\ &= 3\log_3 3 \\ &= 3 \cdot 1 = \boldsymbol{3}\end{aligned}$$

（2）$\log_4 1 = m$ とおくと

$$4^m = 1$$
$$4^m = 4^0$$

よって，$m = 0$ であるから，$\boldsymbol{\log_4 1 = 0}$

〔別解〕

$$\begin{aligned}与式 &= \log_4 4^0 \\ &= 0\log_4 4 = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

（3）$\log_2 \dfrac{1}{16} = m$ とおくと

$$2^m = \frac{1}{16}$$
$$2^m = \frac{1}{2^4}$$
$$2^m = 2^{-4}$$

よって，$m = -4$ であるから，$\boldsymbol{\log_2 \dfrac{1}{16} = -4}$

〔別解〕

$$\begin{aligned}与式 &= \log_2 \frac{1}{2^4} \\ &= \log_2 2^{-4} \\ &= -4\log_2 2 \\ &= -4 \cdot 1 = \boldsymbol{-4}\end{aligned}$$

（4）$\log_{10} \sqrt[3]{10} = m$ とおくと

$$10^m = \sqrt[3]{10}$$
$$10^m = 10^{\frac{1}{3}}$$

よって，$m = \dfrac{1}{3}$ であるから，$\boldsymbol{\log_{10} \sqrt[3]{10} = \dfrac{1}{3}}$

〔別解〕

$$\begin{aligned}与式 &= \log_{10} \sqrt[3]{10} \\ &= \log_{10} 10^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\log_{10} 10 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 = \boldsymbol{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

（5）$\log_{0.1} 10 = m$ とおくと

$$0.1^m = 10$$
$$0.1^m = \frac{10}{1} = \frac{10 \times 0.1}{1 \times 0.1} = \frac{1}{0.1}$$
$$0.1^m = 0.1^{-1}$$

よって，$m = -1$ であるから，$\boldsymbol{\log_{0.1} 10 = -1}$

〔別解〕

$$\begin{aligned}与式 &= \log_{0.1} \frac{10}{1} \\ &= \log_{0.1} \frac{1}{0.1} \\ &= \log_{0.1} 0.1^{-1} \\ &= -\log_{0.1} 0.1 \\ &= -1 \cdot 1 = \boldsymbol{-1}\end{aligned}$$

（6）$\log_{0.5} 0.125 = m$ とおくと

$$0.5^m = 0.125$$
$$0.5^m = 0.5^3$$

よって，$m = 3$ であるから，$\boldsymbol{\log_{0.5} 0.125 = 3}$

〔別解〕

$$\begin{aligned}与式 &= \log_{0.5} 0.5^3 \\ &= 3\log_{0.5} 0.5 \\ &= 3 \cdot 1 = \boldsymbol{3}\end{aligned}$$

問 2

（1）

$$\begin{aligned}与式 &= \log_2 \left(\frac{3}{4} \div \frac{3}{2}\right) \\ &= \log_2 \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) \\ &= \log_2 \frac{1}{2} \\ &= \log_2 2^{-1} \\ &= -\log_2 2 \\ &= -1 \cdot 1 = \boldsymbol{-1}\end{aligned}$$

〔別解〕

$$\begin{aligned}与式 &= (\log_2 3 - \log_2 4) - (\log_2 3 - \log_2 2) \\ &= \log_2 2 - \log_2 4 \\ &= 1 - \log_2 2^2 \\ &= 1 - 2\log_2 2 \\ &= 1 - 2 \cdot 1 \\ &= 1 - 2 = \boldsymbol{-1}\end{aligned}$$

（2）　与式 $= \log_2 \left(\dfrac{1}{12} \times 3\sqrt{2}\right)$

$$= \log_2 \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \log_2 \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^2}$$
$$= \log_2 2^{\frac{1}{2}-2}$$
$$= \log_2 2^{-\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{3}{2}\log_2 2$$
$$= -\frac{3}{2} \cdot 1 = \boldsymbol{-\frac{3}{2}}$$

〔別解〕

与式 $= (\log_2 1 - \log_2 12) + (\log_2 3 + \log_2 \sqrt{2})$

$$= 0 - \log_2(2^2 \times 3) + \log_2 3 + \log_2 2^{\frac{1}{2}}$$
$$= -(\log_2 2^2 + \log_2 3) + \log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 2$$
$$= -2\log_2 2 - \log_2 3 + \log_2 3 + \frac{1}{2} \cdot 1$$
$$= -2 \cdot 1 + \frac{1}{2}$$
$$= -2 + \frac{1}{2} = \boldsymbol{-\frac{3}{2}}$$

（3）　与式 $= \log_2(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$

$$= \log_2\{3^2 - (\sqrt{5})^2\}$$
$$= \log_2(9-5)$$
$$= \log_2 4$$
$$= \log_2 2^2$$
$$= 2\log_2 2$$
$$= 2 \cdot 1 = \mathbf{2}$$

（4）　与式 $= \log_5 15^3 - \log_5 135$

$$= \log_5 \frac{15^3}{135}$$
$$= \log_5 \frac{(3 \times 5)^3}{3^3 \times 5}$$
$$= \log_5 \frac{3^3 \times 5^3}{3^3 \times 5}$$
$$= \log_5 5^2$$
$$= 2\log_5 5$$
$$= 2 \cdot 1 = \mathbf{2}$$

問 3

（1）　左辺 $= \log_a 1 - \log_a N$

$$= 0 - \log_a N$$
$$= -\log_a N = \text{右辺}$$

（2）　左辺 $= \log_a M^{\frac{1}{n}}$

$$= \frac{1}{n}\log_a M = \text{右辺}$$

（3）　左辺 $= (\log_a L + \log_a M) + \log_a N$

$$= \log_a LM + \log_a N$$
$$= \log_a LMN = \text{右辺}$$

問 4

（1）　与式 $= \log_{10} 125^{\frac{1}{3}} + \log_{10}\dfrac{3}{5} - \log_{10}\dfrac{3}{10}$

$$= \log_{10}\left\{(5^3)^{\frac{1}{3}} \times \frac{3}{5} \div \frac{3}{10}\right\}$$
$$= \log_{10}\left(5 \times \frac{3}{5} \times \frac{10}{3}\right)$$
$$= \log_{10} 10 = \mathbf{1}$$

（2）　与式 $= \log_a \left(\dfrac{A}{B} \times \dfrac{B}{C} \times \dfrac{C}{A}\right)$

$$= \log_a 1 = \mathbf{0}$$

問 5

底を a にそろえる．

左辺 $= \log_a b \cdot \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \dfrac{\log_a a}{\log_a c}$

$$= \log_a a = 1 = \text{右辺}$$

問 6

（1）　底を 2 にそろえる．

与式 $= \dfrac{\log_2 25}{\log_2 4} \cdot \dfrac{\log_2 8}{\log_2 5}$

$$= \frac{\log_2 5^2}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5}$$
$$= \frac{2\log_2 5}{2\log_2 2} \cdot \frac{3\log_2 2}{\log_2 5}$$
$$= \mathbf{3}$$

（2）　底を 2 にそろえる．

与式 $= \dfrac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \dfrac{\log_2 25}{\log_2 9} \cdot \dfrac{\log_2 8}{\log_2 5}$

$$= \frac{\log_2 3}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 5^2}{\log_2 3^2} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5}$$
$$= \frac{\log_2 3}{2\log_2 2} \cdot \frac{2\log_2 5}{2\log_2 3} \cdot \frac{3\log_2 2}{\log_2 5}$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

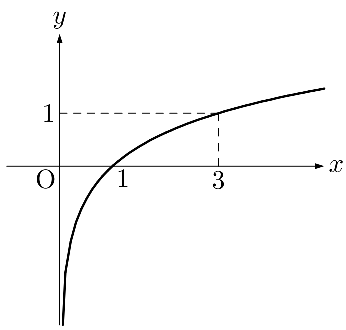
問 7

（1）　$x = 1$ のとき，$y = \log_3 1 = 0$

$x = 3$ のとき，$y = \log_3 3 = 1$

グラフは，2 点 $(1,\ 0), (3,\ 1)$ を通り，単調に増加す

る曲線となる．

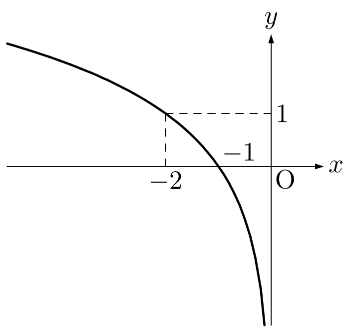


（2）　この関数のグラフは，$y = \log_2 x$ のグラフと y 軸に関して対称である．

$x = -1$ のとき，$y = \log_2\{-(-1)\} = 0$

$x = -2$ のとき，$y = \log_2\{-(-2)\} = 1$

グラフは，2 点 $(-1,\ 0), (-2,\ 1)$ を通り，単調に減少する曲線となる．

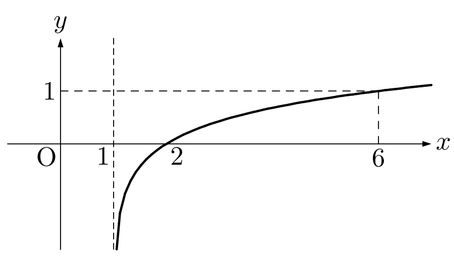


（3）　この関数のグラフは，$y = \log_5 x$ のグラフを x 軸方向に 1 平行移動したものであり，漸近線は $x = 1$ である．

$x = 2$ のとき，$y = \log_5(2-1) = 0$

$x = 6$ のとき，$y = \log_5(6-1) = 1$

グラフは，2 点 $(2,\ 0), (6,\ 1)$ を通り，単調に増加する曲線となる．



問 8

（1）　$\dfrac{1}{32} = \dfrac{1}{2^5} = 2^{-5}$

$\sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}} = (2^4)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$

であるから，定義域は

$2^{-5} < x < 2^{\frac{4}{3}}$

$y = \log_2 x$ は単調に増加するので

$\log_2 2^{-5} < \log_2 x < \log_2 2^{\frac{4}{3}}$

すなわち

$\log_2 2^{-5} < y < \log_2 2^{\frac{4}{3}}$

$-5\log_2 2 < y < \dfrac{4}{3}\log_2 2$

よって，$\boldsymbol{-5 < y < \dfrac{4}{3}}$

（2）　$0.001 = (0.1)^3$

$10 = \dfrac{1}{0.1} = (0.1)^{-1}$

であるから，定義域は

$(0.1)^3 \leqq x < (0.1)^{-1}$

$y = \log_{0.1} x$ は単調に減少するので

$\log_{0.1}(0.1)^3 \geqq \log_{0.1} x > \log_{0.1}(0.1)^{-1}$

すなわち

$\log_{0.1}(0.1)^3 \geqq y > \log_{0.1}(0.1)^{-1}$

$3\log_{0.1} 0.1 \geqq y > -\log_{0.1} 0.1$

よって，$\boldsymbol{-1 < y \leqq 3}$

問 9

（1）　$0.5 < 3 < 5$

$y = \log_2 x$ は単調に増加するから

$\boldsymbol{\log_2 0.5 < \log_2 3 < \log_2 5}$

（2）　$0.25 < 2 < 4$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ は単調に減少するから

$\log_{\frac{1}{2}} 0.25 > \log_{\frac{1}{2}} 2 > \log_{\frac{1}{2}} 4$

すなわち，$\boldsymbol{\log_{\frac{1}{2}} 4 < \log_{\frac{1}{2}} 2 < \log_{\frac{1}{2}} 0.25}$

問 10

（1）　真数条件より，$5x > 0,\ x - 2 > 0$ であるから

$x > 2 \cdots$①

$\log_{10}\dfrac{5x}{x-2} = 1$

$\log_{10}\dfrac{5x}{x-2} = \log_{10} 10$

よって

$\dfrac{5x}{x-2} = 10$

$5x = 10(x-2)$

$x = 2(x-2)$

$x = 2x - 4$

$x = 4$

これは，①を満たしている．

よって，$\boldsymbol{x = 4}$

（2） 真数条件より，$x+1>0$，$x-2>0$ であるから

$x>2\cdots$①

$\log_2(x+1)(x-2)=2$

$\log_2(x+1)(x-2)=2\log_2 2$

$\log_2(x+1)(x-2)=\log_2 2^2$

よって

$(x+1)(x-2)=2^2$

$x^2-x-2-4=0$

$x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$x=-2,\ 3$

①より，$\boldsymbol{x=3}$

問 11

（1） 真数条件より，$x>0\cdots$①

$\log_3 x \leqq 4\log_3 3$

$\log_3 x \leqq \log_3 3^4$

$\log_3 x \leqq \log_3 81$

底が 1 より大きいので

$x \leqq 81$

これと①より，$\boldsymbol{0<x\leqq 81}$

（2） 真数条件より，$1-10x>0$ すなわち，$x<\dfrac{1}{10}\cdots$①

$1\log_{10}10<\log_{10}(1-10x)<2\log_{10}10$

$\log_{10}10<\log_{10}(1-10x)<\log_{10}10^2$

$\log_{10}10<\log_{10}(1-10x)<\log_{10}100$

底が 1 より大きいので

$10<1-10x<100$

$9<-10x<99$

よって，$-\dfrac{9}{10}>x>-\dfrac{99}{10}$

これと①より，$\boldsymbol{-\dfrac{99}{10}<x<-\dfrac{9}{10}}$

問 12

（1） 与式 $=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2}$

$=\dfrac{0.4771}{0.3010}$

$=1.58504\cdots$

$=\mathbf{1.585}$

（2） 与式 $=\dfrac{\log_{10}5}{\log_{10}3}$

$=\dfrac{\log_{10}\frac{10}{2}}{\log_{10}3}$

$=\dfrac{\log_{10}10-\log_{10}2}{\log_{10}3}$

$=\dfrac{1-0.3010}{0.4771}$

$=\dfrac{0.6990}{0.4771}$

$=1.46510\cdots$

$=\mathbf{1.465}$

（3） 与式 $=\dfrac{\log_{10}12}{\log_{10}15}$

$=\dfrac{\log_{10}(2^2\times 3)}{\log_{10}(3\times 5)}$

$=\dfrac{\log_{10}2^2+\log_{10}3}{\log_{10}3+\log_{10}5}$

$=\dfrac{2\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}3+(\log_{10}10-\log_{10}2)}$

$=\dfrac{2\cdot 0.3010+0.4771}{0.4771+1-0.3010}$

$=\dfrac{1.0791}{1.1761}$

$=0.91752\cdots$

$=\mathbf{0.9175}$

問 13

（1） 両辺の常用対数をとると

$\log_{10}10^n \leqq \log_{10}2^{30}$

$n\log_{10}10 \leqq 30\log_{10}2$

$n \leqq 30\log_{10}2$

対数表より，$\log_{10}2=0.3010$ だから

$30\log_{10}2=30\times 0.3010=9.03$

よって，$n\leqq 9.03$ であり，n は，これを満たす最大の整数なので，$\boldsymbol{n=9}$

（2） 両辺の常用対数をとると

$\log_{10}10^n \leqq \log_{10}3^{30}$

$n\log_{10}10 \leqq 30\log_{10}3$

$n \leqq 30\log_{10}3$

対数表より，$\log_{10}3=0.4771$ だから

$30\log_{10}3=30\times 0.4771=14.313$

よって，$n\leqq 14.313$ であり，n は，これを満たす最大の整数なので，$\boldsymbol{n=14}$

問 14

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 10^{-n} \geqq \log_{10} 4^{-15}$$
$$-n\log_{10} 10 \geqq -15\log_{10} 4$$
$$-n \geqq -15\log_{10} 4$$
$$n \leqq 15\log_{10} 4$$

対数表より，$\log_{10} 4 = 0.6021$ だから

$$15\log_{10} 4 = 15 \times 0.6021 = 9.0315$$

よって，$n \leqq 9.0315$ であり，n は，これを満たす最大の整数なので，$\boldsymbol{n = 9}$

問 15

ガラスを 1 枚通過するごとに，明るさは $\dfrac{91}{100}$ になる．重ねるガラスの枚数を n 枚とすると

$$\left(\frac{91}{100}\right)^n \leqq \frac{3}{10}$$

両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{91}{100}\right)^n \leqq \log_{10}\frac{3}{10}$$
$$n\log_{10}\left(\frac{91}{100}\right) \leqq \log_{10}\frac{3}{10}$$
$$n\log_{10}\left(\frac{9.1}{10}\right) \leqq \log_{10} 3 - \log_{10} 10$$
$$n(\log_{10} 9.1 - \log_{10} 10) \leqq \log_{10} 3 - 1$$
$$n(\log_{10} 9.1 - 1) \leqq \log_{10} 3 - 1$$

対数表より，$\log_{10} 9.1 = 0.9590$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ だから

$$\log_{10} 9.1 - 1 = 0.9590 - 1 = -0.041$$
$$\log_{10} 3 - 1 = 0.4771 - 1 = -0.5229$$

よって

$$-0.041n \leqq -0.5229$$
$$n \geqq \frac{-0.5229}{-0.041}$$
$$n \geqq 12.753\cdots$$

n は，これを満たす最小の整数なので，$n = 13$

したがって，重ねる枚数は **13 枚**

∎