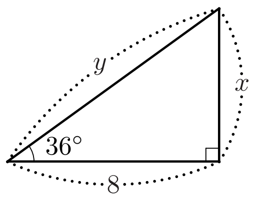
# 5章　三角関数

§1　三角比とその応用 (p.135〜p.136)

## 練習問題 1-A

**1.** (1)



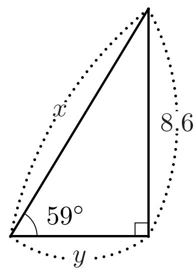

$\tan 36° = \dfrac{x}{8}$ だから

$$\begin{aligned} x &= 8 \cdot \tan 36° \\ &= 8 \cdot 0.7265 \\ &= 5.812 = \mathbf{5.81} \end{aligned}$$

$\cos 36° = \dfrac{8}{y}$ だから

$$\begin{aligned} y &= \frac{8}{\cos 36°} \\ &= \frac{8}{0.8090} \\ &= 9.888\cdots = \mathbf{9.89} \end{aligned}$$

(2)




$\sin 59° = \dfrac{8.6}{x}$ だから

$$\begin{aligned} x &= \frac{8.6}{\sin 59°} \\ &= \frac{8.6}{0.8572} \\ &= 10.0326\cdots = \mathbf{10.03} \end{aligned}$$

$\tan 59° = \dfrac{8.6}{y}$ だから

$$\begin{aligned} y &= \frac{8.6}{\tan 59°} \\ &= \frac{8.6}{1.6643} \\ &= 5.167\cdots = \mathbf{5.17} \end{aligned}$$

**2.** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha &= 1 - \cos^2\alpha \\ &= 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

$\sin\alpha > 0$ より

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

また

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ &= \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{5\sin\alpha - 2}{6\tan\alpha + 7} &= \frac{5 \cdot \frac{4}{5} - 2}{6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 7} \\ &= \frac{4-2}{-8+7} \\ &= \frac{2}{-1} = \mathbf{-2} \end{aligned}$$

**3.** (1) 

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta) \\ &= 1 \cdot (\sin^2\theta - \cos^2\theta) \\ &= \{(1-\cos^2\theta) - \cos^2\theta\} \\ &= 1 - 2\cos^2\theta = \text{右辺} \end{aligned}$$

**〔別解〕**

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (\sin^2\theta)^2 - \cos^4\theta \\ &= (1-\cos^2\theta)^2 - \cos^4\theta \\ &= 1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta - \cos^4\theta \\ &= 1 - 2\cos^2\theta = \text{右辺} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + \left\{1 - \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^4\right\}\cos^2\theta \\ &= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \left(1 - \frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}\right)\cos^2\theta \\ &= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^4\theta - \sin^4\theta}{\cos^4\theta} \cdot \cos^2\theta \\ &= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^4\theta - \sin^4\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{\sin^2\theta + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{\sin^2\theta + 1 \cdot (\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= 1 = \text{右辺} \end{aligned}$$

**〔別解〕**

$$\begin{aligned}左辺 &= \tan^2\theta + (1-\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta \\ &= \tan^2\theta + (1-\tan^2\theta)\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta \\ &= \tan^2\theta + (1-\tan^2\theta)\cdot 1 \\ &= \tan^2\theta + 1 - \tan^2\theta \\ &= 1 = 右辺\end{aligned}$$

**4.** （1）余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ &= \frac{4^2+3^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot4\cdot3} \\ &= \frac{16+9-13}{24} \\ &= \frac{12}{24} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{C = 60^\circ}$

（2）

$$\begin{aligned}B &= 180^\circ - (A+C) \\ &= 180^\circ - (80^\circ + 32^\circ) = 112^\circ\end{aligned}$$

正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ であるから

$$\begin{aligned}a &= \frac{b}{\sin B}\cdot\sin A \\ &= \frac{12}{\sin 112^\circ}\cdot\sin 32^\circ \\ &= \frac{12\cdot\sin 32^\circ}{\sin(180^\circ - 68^\circ)} \\ &= \frac{12\cdot\sin 32^\circ}{\sin 68^\circ} \\ &= \frac{12\cdot 0.5299}{0.9272} \\ &= 6.858\cdots\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a = 6.86}$

同様に

$$\begin{aligned}c &= \frac{b}{\sin B}\cdot\sin C \\ &= \frac{12}{\sin 112^\circ}\cdot\sin 80^\circ \\ &= \frac{12\cdot\sin 80^\circ}{\sin 68^\circ} \\ &= \frac{12\cdot 0.9848}{0.9272} \\ &= 12.745\cdots\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{c = 12.75}$

**5.** （1） 正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ であるから

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

また，余弦定理より

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

これらを与えられた等式に代入すると

$$\boldsymbol{\frac{c}{2R} = 2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}$$

（2）（1）より

$$\frac{c}{2R} = 2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

右辺を約分して整理すると

$$\frac{c}{2R} = \frac{c^2+a^2-b^2}{2Rc}$$

両辺に，$2Rc$ をかけると

$$c^2 = c^2 + a^2 - b^2$$

$$a^2 - b^2 = 0$$

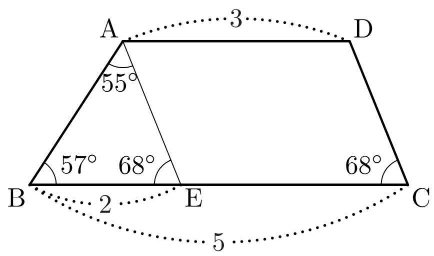
$$(a+b)(a-b) = 0$$

$a>0,\ b>0$ より，$a+b \fallingdotseq 0$ であるから

$a-b=0$，すなわち，$a=b$

よって，△ABC は，**$\boldsymbol{a=b}$（AC = BC）の二等辺三角形**である。

**6.** 点 A を通り辺 CD に平行な直線と辺 BC との交点を E とする．




△ABE において

∠BAE = 180° − (57° + 68°) = 55°，BE = 2

正弦定理より，$\dfrac{\text{AB}}{\sin 68^\circ} = \dfrac{2}{\sin 55^\circ}$

よって

$$\begin{aligned}\text{AB} &= \frac{2}{\sin 55^\circ}\cdot\sin 68^\circ \\ &= \frac{2}{0.8192}\times 0.9272 \\ &= 2.263\cdots = \mathbf{2.26}\end{aligned}$$

点 A から辺 BC に垂線 AH を引くと，$\sin 57^\circ = \dfrac{\text{AH}}{\text{AB}}$ であるから

$$\begin{aligned}\text{AH} &= \text{AB}\cdot\sin 57^\circ \\ &= 2.263\times 0.8387 \\ &= 1.8979\cdots = 1.898\end{aligned}$$

よって，台形の面積は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(3+5)\times 1.898 = 4\times 1.895 \\ &\qquad = 7.592 = \mathbf{7.59}\end{aligned}$$

# 練習問題 1-B

**1.** （1） △ABC は二等辺三角形なので

$$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2}$$
$$= \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$$

BD は，∠ABC の二等分線なので

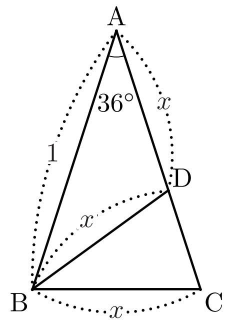
$$\angle\mathrm{ABD} = \angle\mathrm{DBC} = \frac{1}{2} \times 72^\circ = 36^\circ$$

また，$\angle\mathrm{BDC} = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$

したがって，△DAB，△BCD は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AD} = \mathrm{BD} = \mathrm{BC} = x$$

よって，$\mathrm{DC} = 1 - x$




また，△ABC∽△BCD であるから

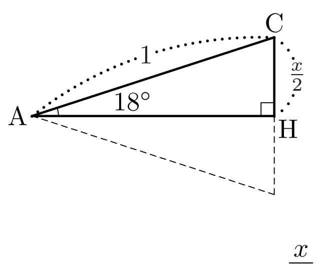
$$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{BC} : \mathrm{CD}$$

すなわち，$1 : x = x : (1-x)$

$$x^2 = 1 - x$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x > 0$ であるから，$\boldsymbol{x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$

（2） 頂点 A から底辺 BC に垂線 AH を引くと，AH は ∠A を二等分するので，$\angle\mathrm{CAH} = 18^\circ$.




△CAH において，$\sin 18^\circ = \dfrac{\frac{x}{2}}{1} = \dfrac{x}{2}$ であるから

$$\sin 18^\circ = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$$

**2.** （1） △ABC の外接円の半径を $R$ とすると正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ であるから

$$\sin A = \frac{a}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R},\ \sin C = \frac{c}{2R}$$

これらを等式の左辺に代入すると

$$\text{左辺} = (b-c)\frac{a}{2R} + (c-a)\frac{b}{2R} + (a-b)\frac{c}{2R}$$
$$= \frac{(b-c)a + (c-a)b + (a-b)c}{2R}$$
$$= \frac{ba - ca + cb - ab + ac - bc}{2R}$$
$$= \frac{0}{2R} = 0 = \text{右辺}$$

（2） 余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

これらを等式の左辺に代入すると

$$\text{左辺} = a\left(b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - c \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)$$
$$= a\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)$$
$$= a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)}{2a}$$
$$= \frac{2b^2 - 2c^2}{2}$$
$$= b^2 - c^2 = \text{右辺}$$

**3.** 余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

これらを等式に代入すると

$$a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

両辺に $2abc$ をかけて整理すると

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) = c^2(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 + b^2c^2 + b^2a^2 - b^4 = c^2a^2 + c^2b^2 - c^4$$

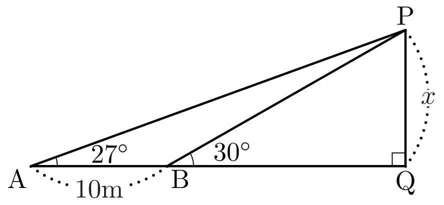
$a^4-2a^2b^2+b^4-c^4=0$
$(a^2-b^2)^2-c^4=0$
$\{(a^2-b^2)+c^2\}\{(a^2-b^2)-c^2\}=0$
$(a^2-b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)=0$

よって，$a^2-b^2+c^2=0$ または，$a^2-b^2-c^2=0$

i ) $a^2-b^2+c^2=0$ のとき
$a^2+c^2=b^2$ であるから，△ABC は
**AC を斜辺とする ($B=90°$の) 直角三角形**

ii ) $a^2-b^2-c^2=0$ のとき
$b^2+c^2=a^2$ であるから，△ABC は
**BC を斜辺とする ($A=90°$の) 直角三角形**

**4.** 図のように，木が立っている地点を Q，点 A から 10 m 進んだ地点を B とし，PQ $=x$ (m) とする．




△PBQ において
$\tan 30° = \dfrac{x}{\mathrm{BQ}} \cdots ①$

△PAQ において
$\tan 27° = \dfrac{x}{10+\mathrm{BQ}} \cdots ②$

①より，$x=\mathrm{BQ}\cdot\tan 30° = \dfrac{\mathrm{BQ}}{\sqrt{3}}$

すなわち，$\mathrm{BQ}=\sqrt{3}x$

②より，$x=(10+\mathrm{BQ})\tan 27°$

よって
$x=(10+\sqrt{3}x)\tan 27°$

巻末の表より，$\tan 27° = 0.5095$ であるから

$$
\begin{aligned}
x &= 0.5095(10+\sqrt{3}x) \\
x &= 5.095+0.5095\sqrt{3}x \\
(1-0.5095\sqrt{3})x &= 5.095 \\
x &= \frac{5.095}{1-0.5095\sqrt{3}} \\
&= \frac{5.095}{1-0.5095\cdot 1.732} \\
&= \frac{5.095}{1-0.8825} \\
&= \frac{5.095}{0.1175} \\
&= 43.3617\cdots
\end{aligned}
$$

よって，**43.36 m**

**5.** $A+B+C=180°$ より，$B+C=180°-A$

よって，$\sin(B+C)=\sin(180°-A)=\sin A$

正弦定理より，$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$ であるから

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \frac{a^2\cdot\dfrac{b}{2R}\cdot\sin C}{2\cdot\dfrac{a}{2R}} \\
&= \frac{ab\sin C}{2} = \frac{1}{2}ab\sin C = S = \text{左辺}
\end{aligned}
$$

※ **6.** は次のページ．

**6.** (1) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $\sin A > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1-\cos^2 A}\\ &= \sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}}\\ &= \frac{\sqrt{\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}}}{2bc}\\ &= \frac{\sqrt{\{(b^2+2bc+c^2)-a^2\}\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}}}{2bc}\\ &= \frac{\sqrt{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}}{2bc}\\ &= \frac{\sqrt{\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}}}{2bc}\\ &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc}\end{aligned}$$

(2) $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ より, $a+b+c=2s$

よって

$$\begin{aligned}b+c-a &= a+b+c-2a\\ &= 2s-2a = 2(s-a)\\ a+b-c &= a+b+c-2c\\ &= 2s-2c = 2(s-c)\\ a-b+c &= a+b+c-2b\\ &= 2s-2b = 2(s-b)\end{aligned}$$

ここで,(1)と面積の公式より

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}bc\sin A\\ &= \frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc}\\ &= \frac{\sqrt{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)}}{4}\\ &= \frac{4\sqrt{s(s-a)(s-c)(s-b)}}{4}\\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}$$