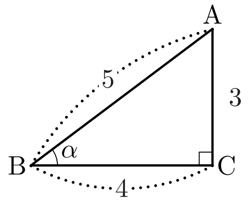
5章　三角関数

§1　三角比とその応用　(p.123〜p.134)

問 1

（1）



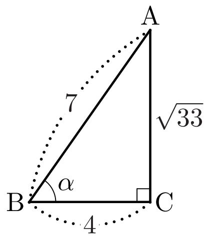
図のように頂点を定めると，三平方の定理より

$\mathrm{AC} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$

したがって

$\sin\alpha = \mathbf{\dfrac{3}{5}},\ \cos\alpha = \mathbf{\dfrac{4}{5}},\ \tan\alpha = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$

（2）



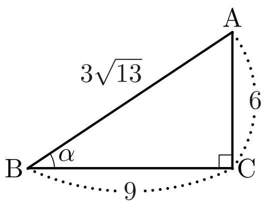
図のように頂点を定めると，三平方の定理より

$\mathrm{AC} = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{33}$

したがって

$\sin\alpha = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{33}}{7}},\ \cos\alpha = \mathbf{\dfrac{4}{7}},\ \tan\alpha = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{33}}{4}}$

（3）



図のように頂点を定めると，三平方の定理より

$\mathrm{AB} = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

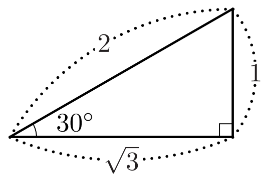
したがって

$\sin\alpha = \dfrac{6}{3\sqrt{13}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{13}}}$

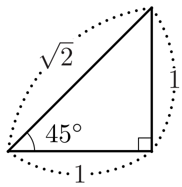
$\cos\alpha = \dfrac{9}{3\sqrt{13}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{13}}}$

$\tan\alpha = \dfrac{6}{9} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$

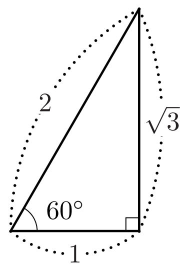
問 2



$\boldsymbol{\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2},\ \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$



$\boldsymbol{\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \tan 45^\circ = 1}$



$\boldsymbol{\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2},\ \tan 60^\circ = \sqrt{3}}$

問 3

（1）与式 $= \sin(90^\circ - 20^\circ)$

$= \mathbf{\cos 20^\circ}$

（2）与式 $= \cos(90^\circ - 26^\circ)$

$= \mathbf{\sin 26^\circ}$

（3）与式 $= \tan(90^\circ - 3^\circ)$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{\tan 3^\circ}}$

問 4

（1）**0.2924**

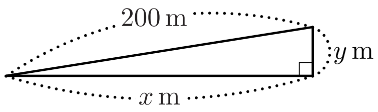
（2）**0.4384**

（3）**0.0524**

（4）**0.9563**

問 5

水平方向の長さを $x\,\mathrm{m}$，垂直方向の高さを $y\,\mathrm{m}$ とする．



$\cos 9^\circ = \dfrac{x}{200}$ であるから

$$\begin{aligned} x &= 200\cos 9^\circ \\ &= 200 \times 0.9877 \\ &= 197.54 \end{aligned}$$

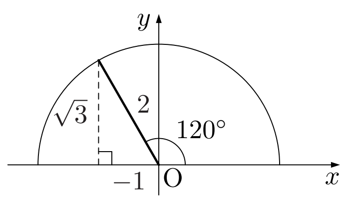
$\sin 9^\circ = \dfrac{y}{200}$ であるから

$$\begin{aligned} y &= 200\sin 9^\circ \\ &= 200 \times 0.1564 \\ &= 31.28 \end{aligned}$$

よって，水平方向　**197.54 m**，　垂直方向　**31.28 m**

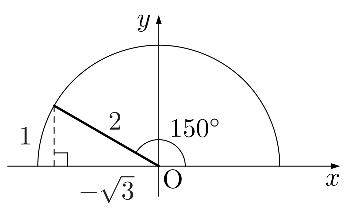
問 6

120° の三角比



$\sin 120^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\cos 120^\circ = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$，$\tan 120^\circ = \boldsymbol{-\sqrt{3}}$

150° の三角比



$\sin 150^\circ = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，$\cos 150^\circ = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\tan 150^\circ = \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

問 7

（1）
$$\begin{aligned} \sin 165^\circ &= \sin(180^\circ - 15^\circ) \\ &= \sin 15^\circ \\ &= \mathbf{0.2588} \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} \cos 142^\circ &= \cos(180^\circ - 38^\circ) \\ &= -\cos 38^\circ \\ &= \mathbf{-0.7880} \end{aligned}$$

（3）
$$\begin{aligned} \tan 116^\circ &= \tan(180^\circ - 64^\circ) \\ &= -\tan 64^\circ \\ &= \mathbf{-2.0503} \end{aligned}$$

問 8

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + (-2)^2 = 5$$

よって，$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$

α は鈍角なので，$\cos\alpha < 0$

$$\cos\alpha = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

また

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \tan\alpha\cos\alpha \\ &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

問 9

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ より

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha &= 1 - \cos^2\alpha \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49} \end{aligned}$$

$\sin\alpha > 0$ であるから

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{48}{49}} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

また

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ &= \frac{\frac{4\sqrt{3}}{7}}{-\frac{1}{7}} = \boldsymbol{-4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

問 10

正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ であるから

$$\frac{a}{\sin 120^\circ} = 2 \cdot 2$$

よって

$$a = 4 \cdot \sin 120^\circ$$
$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2\sqrt{3}}$$

また，A は頂角であるから
$$B = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

正弦定理より，$\dfrac{b}{\sin B} = 2R$ であるから
$$b = 4 \cdot \sin 30^\circ$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{2}$$

問 11

$$\angle \mathrm{ACB} = 180^\circ - (68^\circ + 73^\circ) = 39^\circ$$

$\triangle$ABC において，正弦定理より
$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin 73^\circ} = \frac{30}{\sin 39^\circ}$$

よって
$$\mathrm{AC} = \frac{30 \sin 73^\circ}{\sin 39^\circ}$$
$$= \frac{30 \times 0.9563}{0.6293}$$
$$= 45.5887 \cdots$$
$$= \mathbf{45.59}$$

また，$\triangle$CAH において
$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{AC}} = \sin 68^\circ$$

であるから
$$\mathrm{CH} = \mathrm{AC} \sin 68^\circ$$
$$= 45.59 \times 0.9272$$
$$= 42.271048$$
$$= \mathbf{42.27}$$

問 12

余弦定理により
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$
$$= 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$$
$$= 49 + 25 - 70 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 74 - 35 = 39$$

$b > 0$ であるから，$b = \mathbf{\sqrt{39}}$

問 13

（1） $\triangle$CBH において，三平方の定理より
$$a^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^2 \cdots ①$$

$\triangle$CAH において

$\dfrac{\mathrm{CH}}{b} = \sin A$ より，$\mathrm{CH} = b \sin A \cdots ②$

$\dfrac{\mathrm{AH}}{b} = \cos A$ より，$\mathrm{AH} = b \cos A$

また，$\mathrm{BH} = \mathrm{AH} - c = b\cos A - c \cdots ③$

②，③を①に代入すると
$$a^2 = (b\cos A - c)^2 + (b \sin A)^2$$
$$= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A$$
$$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$$
$$= \boldsymbol{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

（2） $\triangle$CBH において，三平方の定理より
$$a^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^2 \cdots ①$$

$\triangle$CAH において
$$\frac{\mathrm{CH}}{b} = \sin \angle \mathrm{CAH}$$
$$= \sin(180^\circ - A)$$
$$= \sin A$$

よって，$\mathrm{CH} = b \sin A \cdots ②$
$$\frac{\mathrm{AH}}{b} = \cos \angle \mathrm{CAH}$$
$$= \cos(180^\circ - A)$$
$$= -\cos A$$

よって，$\mathrm{AH} = -b \cos A$

また，$\mathrm{BH} = \mathrm{AH} + c = c - b\cos A \cdots ③$

②，③を①に代入すると
$$a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b \sin A)^2$$
$$= c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A$$
$$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A$$
$$= \boldsymbol{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

問 14

余弦定理により
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$= \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$
$$= \frac{21}{24} = \mathbf{\frac{7}{8}}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$
$$= \frac{4^2 + 2^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 2}$$
$$= \mathbf{\frac{11}{16}}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$
$$= \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$= \frac{-3}{12} = \mathbf{-\frac{1}{4}}$$

問 15

余弦定理より，$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

（1） A が直角ならば，$\cos A = 0$

よって

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 0$$

$$b^2+c^2-a^2 = 0$$

すなわち，$a^2 = b^2+c^2$

逆に，$a^2 = b^2+c^2$ ならば，$b^2+c^2-a^2 = 0$ であるから

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 0$$

すなわち，$\cos A = 0$

よって，$A = 90^\circ$ であるから，A は直角である．

以上より，　A が直角 $\Longleftrightarrow a^2 = b^2+c^2$

（2） A が鋭角ならば，$\cos A > 0$

よって

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > 0$$

両辺に，$2bc\ (>0)$ をかけると

$$b^2+c^2-a^2 > 0$$

すなわち，$a^2 < b^2+c^2$

逆に，$a^2 < b^2+c^2$ ならば，$b^2+c^2-a^2 > 0$ であるから

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > 0$$

すなわち，$\cos A > 0$

よって，A は鋭角である．

以上より，　A が鋭角 $\Longleftrightarrow a^2 < b^2+c^2$

（3） A が鈍角ならば，$\cos A < 0$

よって

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} < 0$$

両辺に，$2bc\ (>0)$ をかけると

$$b^2+c^2-a^2 < 0$$

すなわち，$a^2 > b^2+c^2$

逆に，$a^2 > b^2+c^2$ ならば，$b^2+c^2-a^2 < 0$ であるから

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} < 0$$

すなわち，$\cos A < 0$

よって，A は鈍角である．

以上より，　A が鈍角 $\Longleftrightarrow a^2 > b^2+c^2$

問 16

三角形の面積を S とする．

（1）
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin C \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \sin 30^\circ \\ &= 6\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{3} \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ca\sin B \\ &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\sqrt{3}\cdot \sin 120^\circ \\ &= 5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{15}{2}} \end{aligned}$$

問 17

三角形の面積を S とすると，$\dfrac{1}{2}ab = S$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 6\cdot \sin C = 15\sqrt{3}$$

すなわち，$30\sin C = 15\sqrt{3}$

よって，$\sin C = \dfrac{15\sqrt{3}}{30} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C は鋭角であるから，$\boldsymbol{C = 60^\circ}$

問 18

$s = \dfrac{\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB}}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} s &= \frac{24.3+46.2+30.8}{2} \\ &= \frac{101.3}{2} = 50.65 \end{aligned}$$

△ABC の面積を S とすると，ヘロンの公式より

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{s(s-\mathrm{BC})(s-\mathrm{CA})(s-\mathrm{AB})} \\ &= \sqrt{50.65(50.65-24.3)(50.65-46.2)(50.65-30.8)} \\ &= \sqrt{50.65\cdot 26.35\cdot 4.45\cdot 19.85} \\ &= \sqrt{117890.98364375} = 343.352\cdots \end{aligned}$$

よって，面積は $\mathbf{343.4\ m^2}$

※　電卓使用