練習問題 2-A

1.（1）　与式 $= \sin(180^\circ + 56^\circ)$
$= -\sin 56^\circ = \mathbf{-0.8290}$　（三角関数表より）

（2）　与式 $= \cos\{-150^\circ + 360^\circ \times (-1)\}$
$= \cos(-150^\circ)$
$= \cos 150^\circ = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

（3）　与式 $= \tan(-40^\circ + 360^\circ \times 2)$
$= \tan(-40^\circ)$
$= -\tan 40^\circ = \mathbf{-0.8391}$　（三角関数表より）

（4）　与式 $= \sin\left\{-\dfrac{2}{3}\pi + 2\pi \times (-2)\right\}$
$= \sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)$
$= -\sin\dfrac{2}{3}\pi = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

（5）　与式 $= \cos\left(\dfrac{9}{6}\pi + 2\pi\right)$
$= \cos\dfrac{3}{2}\pi = \mathbf{0}$

（6）　与式 $= \tan\left(\dfrac{1}{5}\pi + 2\pi\right)$
$= \tan\dfrac{1}{5}\pi$
$= \tan 36^\circ = \mathbf{0.7265}$　（三角関数表より）

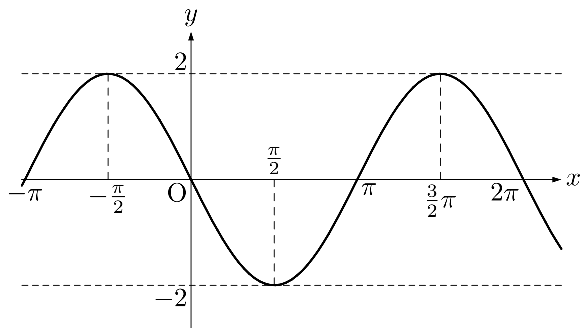
2.　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
$= 1 - \left(-\dfrac{12}{13}\right)^2$
$= 1 - \dfrac{144}{169} = \dfrac{25}{169}$
θ は第 3 象限の角なので，$\sin\theta < 0$
$\sin\theta = -\sqrt{\dfrac{25}{169}} = \boldsymbol{-\dfrac{5}{13}}$
また
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$= \dfrac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

3.　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より
$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$
$= 1 + (\sqrt{5})^2 = 6$
よって，$\cos^2\theta = \dfrac{1}{6}$ であるから
$\cos\theta = \boldsymbol{\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}}$
また
$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$
$= \sqrt{5}\cdot\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = \boldsymbol{\pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}}$　（$\cos\theta$の値と複号同順）

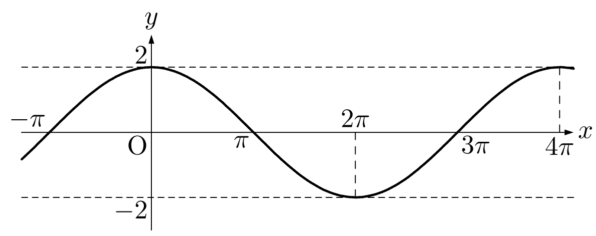
4.（1）　左辺 $= \{(1+\sin\theta) + \cos\theta\}\{(1+\sin\theta) - \cos\theta\}$
$= (1+\sin\theta)^2 - \cos^2\theta$
$= 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta - (1 - \sin^2\theta)$
$= 2\sin\theta + 2\sin^2\theta$
$= 2\sin\theta(1+\sin\theta) =$ 右辺

（2）　$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$ を左辺に代入すると
左辺 $= \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta}$
$= \dfrac{(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta)}{(\cos\theta + \sin\theta)^2}$
$= \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$
$= \dfrac{\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}}$
$= \dfrac{1 - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$
$= \dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta} =$ 右辺

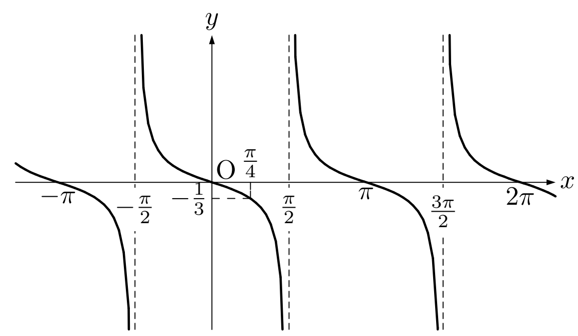
5.（1）　この関数のグラフは，$y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に -2 倍に拡大したものだから，周期は $\boldsymbol{2\pi}$ であり，グラフは次のようになる．



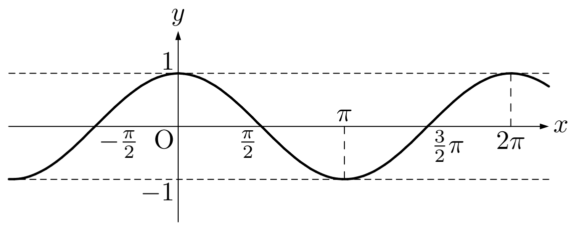
（2）　この関数のグラフは，$y = \cos x$ のグラフを x 軸方向に 2 倍に拡大し，y 軸方向に 2 倍に拡大したものだから，周期は $2\pi\cdot 2 = \boldsymbol{4\pi}$ であり，グラフは次のようになる．



（3）　この関数のグラフは，$y = \tan x$ のグラフを y 軸方向に $-\dfrac{1}{3}$ 倍したものだから，周期は $\boldsymbol{\pi}$ であり，グラフは次のようになる．

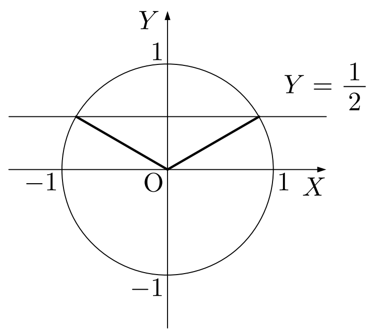


（4）$y = \sin\left\{-\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$ であるから，この関数のグラフは，$y = \sin(-x)$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動したものである．周期は $\boldsymbol{2\pi}$ であり，グラフは次のようになる．



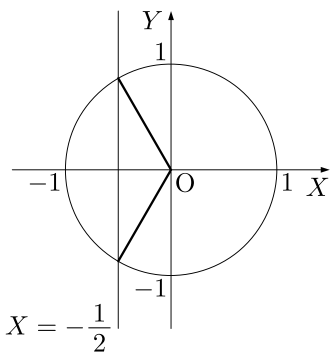
※　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ であるから，$y = \cos x$ のグラフと同じになる．

6.（1）



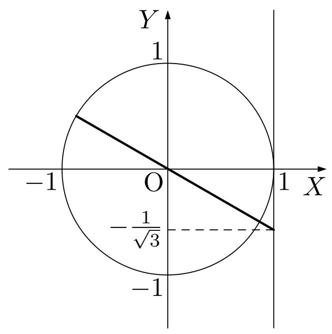
$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi}$$

（2）



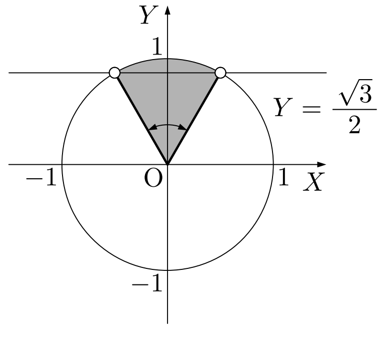
$$\boldsymbol{x = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi}$$

（3）　$\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



$$\boldsymbol{x = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi}$$

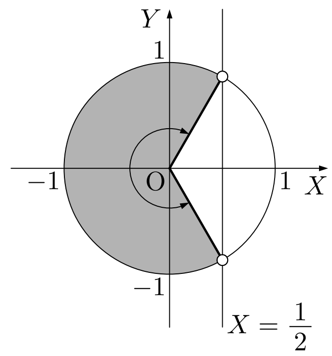
7.（1）　$\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$0 \leqq x < 2\pi$ において，角 x の動経が影をつけた部分にあるのは

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi}$$

（2）　$\cos x < \dfrac{1}{2}$



$0 \leqq x < 2\pi$ において，角 x の動経が影をつけた部分にあるのは

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi}$$

練習問題 2-B

1.　点 A と点 B を結ぶ．

線分 AB の左側の弓形部分の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \qquad \text{(p.142 問 8 より)}$$
$$= \pi - 2$$

線分 AB の右側の弓形部分の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2})^2\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$$

よって，求める面積は

$$(\pi - 2) + \left(\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right) = \boldsymbol{\frac{7}{3}\pi - 2 - 2\sqrt{3}}$$

2.（1）　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2}{3}$ の両辺を 2 乗すると

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{4}{9}$$
$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{4}{9}$$
$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9}$$
$$2\sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9}$$

よって，$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{5}{18}}$

（2）　$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$$= 1 - 2\cdot\left(-\frac{5}{18}\right)$$
$$= 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}$$

よって，$\boldsymbol{\sin\theta - \cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{14}}{3}}$

（3）　与式 $= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$$
$$= \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{5}{18}\right)\right\}$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{23}{18} = \boldsymbol{\frac{23}{27}}$$

（4） 与式 $=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

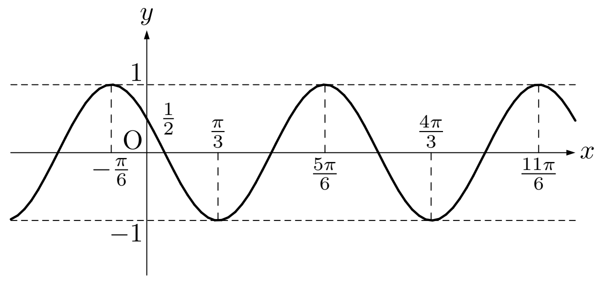
$$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\pm\frac{\sqrt{14}}{3}\left\{1+\left(-\frac{5}{18}\right)\right\}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{14}}{3}\cdot\frac{13}{18}=\boldsymbol{\pm\frac{13\sqrt{14}}{54}}$$

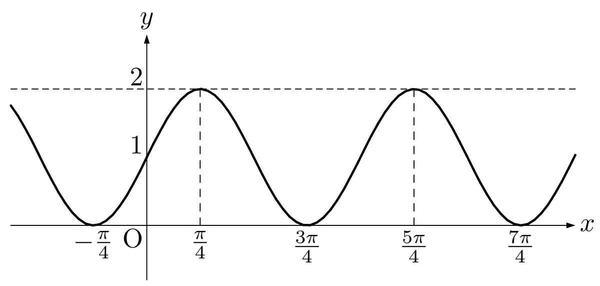
3. （1） $y=\cos 2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから，この関数のグラフは，$y=\cos 2x$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ 平行移動したものである．周期は $2\pi\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\pi}$

また，$x=0$ のとき，$y=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ であり，グラフは次のようになる．



（2） $y=\sin\left\{-2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}+1$ であるから，この関数のグラフは，$y=\sin(-2x)$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$，y 軸方向に 1 平行移動したものである．周期は $2\pi\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\pi}$

また，$x=0$ のとき，$y=\sin\pi+1=1$ であり，グラフは次のようになる．



4. （1） $y=2(1-\cos^2 x)-2\cos x+1$

$$=-2\cos^2 x-2\cos x+3$$

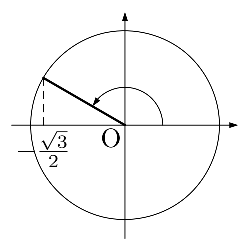
$$=\boldsymbol{-2t^2-2t+3}$$

（2） t の変域を求めると

$0\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ より

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos x\leqq 1$$

よって，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq 1$



$$y=-2(t^2+t)+3$$

$$=-2\left\{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+3$$

$$=-2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+3$$

$$=-2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$$

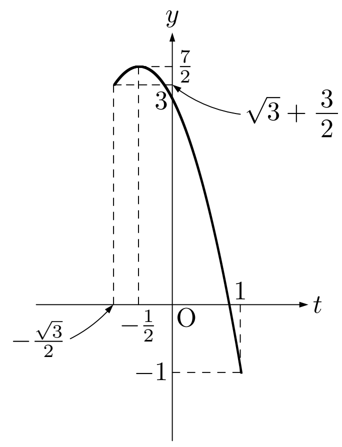
$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$y=-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3$$

$$=-2\cdot\frac{3}{4}+\sqrt{3}+3$$

$$=-\frac{3}{2}+\sqrt{3}+3=\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

$t=1$ のとき，$y=-2-2+3=-1$



よって，$t=-\dfrac{1}{2}$，すなわち $x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，最大値 $\dfrac{7}{2}$ をとり，$t=1$，すなわち $x=0$ のとき，最小値 -1 をとる．

以上より

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$ $\left(x=\dfrac{2}{3}\pi\right)$

最小値 $\boldsymbol{-1}$ $(x=0)$

5. （1） $2x=t\cdots$① とおくと，$\cos t=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ より，$0\leqq 2x<4\pi$ であるから，$0\leqq t<4\pi$

よって，$t=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi,\ \dfrac{10}{3}\pi$

①より，$x=\dfrac{t}{2}$ なので

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi}$$

（2） $\pi-x=t\cdots$① とおくと

$2\sin t-\sqrt{3}=0$，すなわち，$\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ より

$$0\geqq -x>-2\pi$$

$$\pi\geqq\pi-x>\pi-2\pi$$

すなわち，$-\pi<\pi-x\leqq\pi$ であるから，$-\pi<t\leqq\pi$

よって，$t=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

①より，$x=\pi-t$ なので

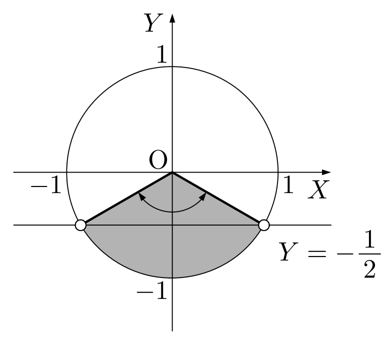
$t=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$x=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$

$t=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$x=\pi-\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{1}{3}\pi$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{3}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi}$

6. （1） $2x=t\cdots$① とおくと，$\sin t<-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ より，$0\leqq 2x<4\pi$ であるから，$0\leqq t<4\pi$



$0\leqq t<4\pi$ において，角 t の動径が影をつけた部分にあ

るのは

$\frac{7}{6}\pi < t < \frac{11}{6}\pi$, $\frac{19}{6}\pi < t < \frac{23}{6}\pi$

①より，$t = 2x$ なので

$\frac{7}{6}\pi < 2x < \frac{11}{6}\pi$, $\frac{19}{6}\pi < 2x < \frac{23}{6}\pi$

すなわち，$\boldsymbol{\frac{7}{12}\pi < x < \frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi < x < \frac{23}{12}\pi}$

（2） $\pi + x = t \cdots$① とおくと

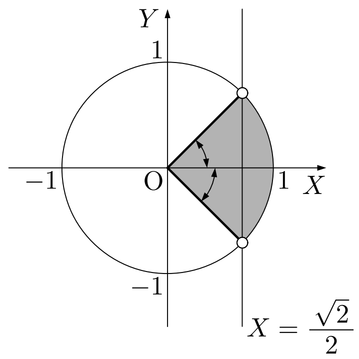
$2\cos t - \sqrt{2} > 0$，すなわち，$\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\pi \leqq x < \pi$ より

$\pi - \pi \leqq \pi + x < \pi + \pi$

$0 \leqq \pi + x < 2\pi$

すなわち，$0 \leqq t < 2\pi$



$0 \leqq t < 2\pi$ において，角 t の動経が影をつけた部分にあるのは

$0 \leqq t < \frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi < t < 2\pi$

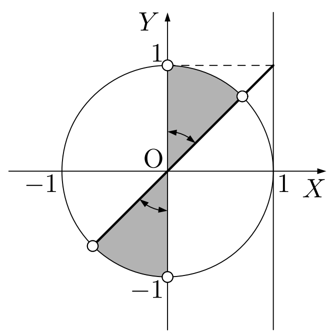
①より，$t = \pi + x$ なので

$0 \leqq \pi + x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi < \pi + x < 2\pi$

$-\pi \leqq x < \frac{\pi}{4} - \pi$, $\frac{7}{4}\pi - \pi < x < 2\pi - \pi$

すなわち，$\boldsymbol{-\pi \leqq x < -\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi < x < \pi}$

（3）



$0 \leqq x < 2\pi$ において，角 x の動経が影をつけた部分にあるのは

$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi < x < \frac{3}{2}\pi}$

■