6章　図形と式

§1　点と直線　(p.173〜p.174)

練習問題 1-A

1.　点 $(0,\ 6)$ を A，点 $(6,\ -2)$ を B，点 $(7,\ 5)$ を C，求める点の座標を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする．

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ より，$\mathrm{PA}^2=\mathrm{PB}^2$ であるから

$x^2+(y-6)^2=(x-6)^2+(y+2)^2$

整理すると，$3x-4y=1\cdots$①

$\mathrm{PA}=\mathrm{PC}$ より，$\mathrm{PA}^2=\mathrm{PC}^2$ であるから

$x^2+(y-6)^2=(x-7)^2+(y-5)^2$

整理すると，$7x-y=19\cdots$②

①，②を連立させて解くと，

$x=3,\ y=2$

よって，求める点の座標は，**(3，2)**

2.　2 点を結ぶ線分を 2 : 1 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{1\cdot a+1\cdot 2}{2+1},\ \frac{1\cdot b+2\cdot 5}{2+1}\right)$$
$$=\left(\frac{a+2}{3},\ \frac{b+10}{3}\right)$$

である．この点が $(-1,\ 1)$ であるから

$\dfrac{a+2}{3}=-1$ より，$a=-5$

$\dfrac{b+10}{3}=1$ より，$b=-7$

よって，$\boldsymbol{a=-5,\ b=-7}$

3.　3 点を頂点とする三角形の重心の座標は

$$\left(\frac{3+(-1)+a}{3},\ \frac{4+(-5)+b}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{a+2}{3},\ \frac{b-1}{3}\right)$$

である．この点が $(-3,\ 1)$ であるから

$\dfrac{a+2}{3}=-3$ より，$a=-11$

$\dfrac{b-1}{3}=1$ より，$b=4$

よって，$\boldsymbol{a=-11,\ b=4}$

4.（1）　直線 AB の傾きは

$\dfrac{5-3}{4-2}=1$

よって，線分 AB の垂直二等分線の傾きは，-1 である．

また，線分 AB の中点の座標は，

$\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{3+5}{2}\right)=(3,\ 4)$

したがって，求める直線の方程式は

$y-4=-1(x-3)$

$\boldsymbol{y=-x+7}$

または，

$\boldsymbol{x+y-7=0}$

（2）　与えられた 2 点を通る直線の傾きは

$\dfrac{-2-3}{3-(-1)}=-\dfrac{5}{4}$

よって，求める直線の傾きは，$\dfrac{4}{5}$ であるから，その方程式は

$y-5=\dfrac{4}{5}(x-0)$

$\boldsymbol{y=\dfrac{4}{5}x+5}$

または，

$\boldsymbol{4x-5y+25=0}$

（3）2 直線の交点の座標は

$$\begin{cases}4x-3y+5=0\\ x+2y-7=0\end{cases}$$

を解いて，$(x,\ y)=(1,\ 3)$

また，直線 $2x+5y-7=0$ の傾きは

$y=-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{7}{5}$ より，$-\dfrac{2}{5}$

したがって，求める直線の方程式は

$y-3=-\dfrac{2}{5}(x-1)$

$\boldsymbol{y=-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{17}{5}}$

または，

$\boldsymbol{2x+5y-17=0}$

5.　2 点を結ぶ線分を 3 : 1 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{1\cdot 12+3\cdot 4}{3+1},\ \frac{1\cdot(-1)+3\cdot 3}{3+1}\right)$$
$$=\left(\frac{24}{4},\ \frac{8}{4}\right)=(6,\ 2)$$

また，2 点を結ぶ直線の傾きは

$\dfrac{3-(-1)}{4-12}=-\dfrac{1}{2}$

よって，求める直線の傾きは，2 であるから．その方程式は

$y-2=2(x-6)$

$\boldsymbol{y=2x-10}$

または，

$\boldsymbol{2x-y-10=0}$

6.　2 直線 $2x-3y=8,\ x-4y=9$ の交点の座標は

$$\begin{cases}2x-3y=8\\ x-4y=9\end{cases}$$

を解いて，$(x,\ y)=(1,\ -2)$

直線 $kx+y=3$ がこの交点を通ればよいので

$k\cdot 1+(-2)=3$

$k-2=3$

よって，$\boldsymbol{k=5}$

7.　$b \fallingdotseq 0$，$b' \fallingdotseq 0$ であるから

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$
$$y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}$$

（1）　2 直線が平行または一致の条件は，傾きが等しいことであるから

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$$

すなわち，$ab' = a'b$

（2）　2 直線が垂直の条件は，傾きの積が -1 になることであるから

$$-\frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{a'}{b'}\right) = -1$$
$$\frac{aa'}{bb'} = -1$$
$$aa' = -bb'$$

すなわち，$aa' + bb' = 0$

練習問題 1-B

1.　i）$m=0$ のとき

2 直線の式は

$$x-3=0,\quad 2y-2=0$$

となるので 2 直線は平行ではない．

ii）$m=-2$ のとき

2 直線の式は

$$x-2y-5=0,\quad -2x-2=0$$

となるので 2 直線は平行ではない．

iii）$m \fallingdotseq 0$　かつ　$m \fallingdotseq -2$ のとき

2 直線が平行となるための条件は，前ページの **7.** より

$$1(m+2) = m\cdot m$$

である．これを解くと

$$m+2 = m^2$$
$$m^2 - m - 2 = 0$$
$$(m+1)(m-2) = 0$$
$$m = -1,\ \ 2$$

$m=-1$ のとき，2 直線の式は

$$x-y-4=0,\quad -x+y-2=0$$

となるので 2 直線は平行である．

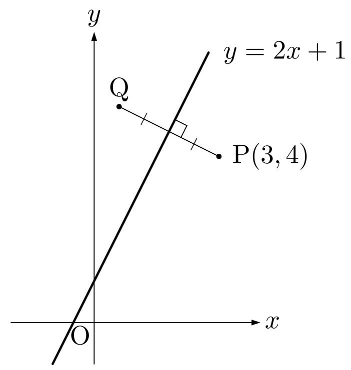
$m=2$ のとき，2 直線の式は

$$x+2y-1=0,\quad 2x+4y-2=0$$

となるので 2 直線は一致する．

よって，$\boldsymbol{m=-1}$

2.　点 $(3,\ 4)$ を P，求める点の座標を Q $(p,\ q)$ とする．



直線 PQ は $y=2x+1$ と垂直で，その傾きは $\dfrac{q-4}{p-3}$ であるから

$$2\cdot\frac{q-4}{p-3} = -1$$
$$2(q-4) = -(p-3)$$

すなわち，

$$p+2q = 11 \cdots ①$$

また，線分 PQ の中点は，$\left(\dfrac{p+3}{2},\ \dfrac{q+4}{2}\right)$ で，この点は直線 $y=2x+1$ 上にあるので

$$\frac{q+4}{2} = 2\cdot\frac{p+3}{2} + 1$$
$$q+4 = 2(p+3)+2$$

すなわち，

$$2p - q = -4 \cdots ②$$

①，②を連立させて解くと

$$\begin{cases} p+2q=11 & \cdots ① \\ 2p-q=-4 & \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{array}{lrrl} ②\times 2 & & 4p-2q & = -8 \\ ① & +) & p+2q & = 11 \\ \hline & & 5p & = 3 \\ & & p & = \dfrac{3}{5} \end{array}$$

これを②に代入して，

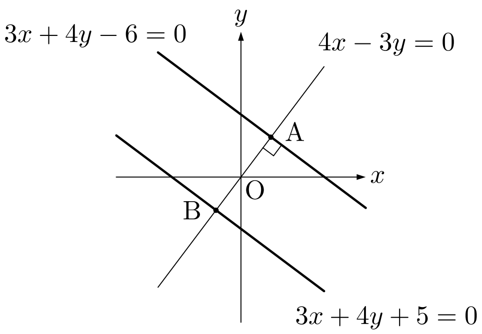
$$\frac{6}{5} - q = -4$$
$$-q = -4 - \frac{6}{5}$$
$$q = \frac{26}{5}$$

よって，$\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{26}{5}\right)}$

3. 2 直線に垂直で，原点を通る直線の方程式は

$4x-3y=0$

である．図のように，この直線と与えられた 2 直線との交点をそれぞれ A，B とすると，線分 AB の長さが求める長さである．



点 A の座標は

$$\begin{cases} 3x+4y-6=0 \\ 4x-3y=0 \end{cases}$$

を解いて，$(x,\ y)=\left(\dfrac{18}{25},\ \dfrac{24}{25}\right)$

点 B の座標は

$$\begin{cases} 3x+4y+5=0 \\ 4x-3y=0 \end{cases}$$

を解いて，$(x,\ y)=\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$

よって

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \sqrt{\left(-\frac{3}{5}-\frac{18}{25}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}-\frac{24}{25}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{33}{25}\right)^2+\left(-\frac{44}{25}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{33^2+44^2}{25^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(3\cdot 11)^2+(4\cdot 11)^2}{25^2}} \\ &= \sqrt{\frac{11^2(3^2+4^2)}{25^2}} \\ &= \frac{11}{25}\sqrt{25} \\ &= \frac{11}{5} \end{aligned}$$

したがって，求める線分の長さは，$\boldsymbol{\dfrac{11}{5}}$

〔別解〕（このページの **6.** の結果を利用します.）

点 $(2,\ 0)$ は，直線 $3x+4y-6=0$ 上の点である．求める線分の長さは，この点と直線 $3x+4y+5=0$ との距離と等しいから

$$\begin{aligned} \frac{|\,3\cdot 2+4\cdot 0+5\,|}{\sqrt{3^2+4^2}} &= \frac{|\,11\,|}{\sqrt{25}} \\ &= \boldsymbol{\frac{11}{5}} \end{aligned}$$

4. △ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

である．

$m>0$, $n>0$ より，$m+n \fallingdotseq 0$ であるから，点 P，Q，R の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}\left(\frac{nx_2+mx_3}{m+n},\ \frac{ny_2+my_3}{m+n}\right)$$
$$\mathrm{Q}\left(\frac{nx_3+mx_1}{m+n},\ \frac{ny_3+my_1}{m+n}\right)$$
$$\mathrm{R}\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

となる．△PQR の重心の座標を $(g_x,\ g_y)$ とすると

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\dfrac{nx_2+mx_3}{m+n}+\dfrac{nx_3+mx_1}{m+n}+\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}}{3} \\ &= \frac{\dfrac{m(x_1+x_2+x_3)+n(x_1+x_2+x_3)}{m+n}}{3} \\ &= \frac{(m+n)(x_1+x_2+x_3)}{3(m+n)} \\ &= \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_y &= \frac{\dfrac{ny_2+my_3}{m+n}+\dfrac{ny_3+my_1}{m+n}+\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}}{3} \\ &= \frac{\dfrac{m(y_1+y_2+y_3)+n(y_1+y_2+y_3)}{m+n}}{3} \\ &= \frac{(m+n)(y_1+y_2+y_3)}{3(m+n)} \\ &= \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \end{aligned}$$

よって，△PQR の重心の座標も

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

となるので，2 つの三角形の重心は一致する．

5. （1）i） $ab \fallingdotseq 0$ のとき

直線 OH は直線 l に垂直なので，その方程式は

$bx-ay=0$

となる．

点 H はこの直線と l との交点である．

$$\begin{cases} ax+by+c=0 & \cdots ① \\ bx-ay=0 & \cdots ② \end{cases}$$

を解くと

$$\begin{array}{lrrl} ①\times a & & a^2x+aby & =-ac \\ ②\times b & +) & b^2x-aby & =0 \\ \hline & & (a^2+b^2)x & =-ac \end{array}$$

$$x = -\frac{ac}{a^2+b^2} \cdots ③$$

②より，$y = \frac{b}{a}x$

これに③を代入して

$$y = \frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{ac}{a^2+b^2}\right) = -\frac{bc}{a^2+b^2}$$

よって，点 H の座標は

$$\left(-\frac{ac}{a^2+b^2},\ -\frac{bc}{a^2+b^2}\right) \cdots ④$$

ii)　$a=0$，$b \neq 0$ のとき

直線の式は，$y = -\frac{c}{b}$ となるので，点 H の座標は，$\left(0,\ -\frac{c}{b}\right)$ となり，④はこれを満たす.

iii)　$a \neq 0$，$b=0$ のとき

直線の式は，$x = -\frac{c}{a}$ となるので，点 H の座標は，$\left(-\frac{c}{a},\ 0\right)$ となり，④はこれを満たす.

以上より，点 H の座標は

$$\boldsymbol{\left(-\frac{ac}{a^2+b^2},\ -\frac{bc}{a^2+b^2}\right)}$$

（2）$$\mathrm{OH} = \sqrt{\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(-\frac{bc}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2c^2+b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

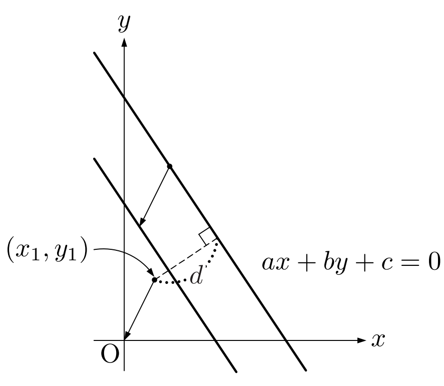
$$= \sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

6.　与えられた点と直線を，x 軸の方向に $-x_1$，y 軸方向に $-y_1$ だけ平行移動すると，点 $(x_1,\ y_1)$ は原点に，直線は $a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$ に移る.



移動した直線の方程式を整理すると

$$ax + ax_1 + by + by_1 + c = 0$$

$$ax + by + (ax_1 + by_1 + c) = 0$$

d は，この直線と原点との距離に等しいので，**5.** より

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

である.