6章　図形と式

§2　2次曲線 (p.175〜p.190)

問1

（1）$\{x-(-1)\}^2+(y-2)^2=2^2$

$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-2)^2=4}$

（2）　円の中心の座標は，原点と点 (8, 6) の中点だから

$\left(\dfrac{0+8}{2},\ \dfrac{0+6}{2}\right)=(4,\ 3)$

半径は，この中心と原点との距離だから

$\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

よって，求める円の方程式は,

$(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$

$\boldsymbol{(x-4)^2+(y-3)^2=25}$

（3）　円の中心の座標は，与えられた2点の中点だから

$\left(\dfrac{2+(-8)}{2},\ \dfrac{7+1}{2}\right)=(-3,\ 4)$

半径は，この中心と点 (2, 7) との距離だから

$\sqrt{\{2-(-3)\}^2+(7-4)^2}=\sqrt{34}$

よって，求める円の方程式は,

$\{x-(-3)\}^2+(y-4)^2=(\sqrt{34})^2$

$\boldsymbol{(x+3)^2+(y-4)^2=34}$

問2

（1）$(x^2+4x)+(y^2-6y)+4=0$

$(x+2)^2-4+(y-3)^2-9+4=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2=9$

よって，中心 **(−2, 3)**，半径 **3**

（2）$x^2-4x+3+y^2-12y+35=7$

$(x^2-4x)+(y^2-12y)+31=0$

$(x-2)^2-4+(y-6)^2-36+31=0$

$(x-2)^2+(y-6)^2=9$

よって，中心 **(2, 6)**，半径 **3**

問3

（1）　求める円の方程式を,

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

とおくと，この円が，与えられた3点を通ることより

$$\begin{cases}1+1+a+b+c=0\\4+1+2a-b+c=0\\9+4+3a+2b+c=0\end{cases}$$

整理すると,

$$\begin{cases}a+b+c=-2\\2a-b+c=-5\\3a+2b+c=-13\end{cases}$$

これを解いて，$(a,b,c)=(-5,-1,4)$

よって，求める方程式は,

$\boldsymbol{x^2+y^2-5x-y+4=0}$

（2）　中心の座標を $(0,\ t)$，半径を r とおくと，求める方程式は

$x^2+(y-t)^2=r^2$

と表すことができる．この円が，与えられた2点を通ることより

$$\begin{cases}1+(1-t)^2=r^2\\9+(5-t)^2=r^2\end{cases}$$

r^2 を消去すると,

$1+(1-t)^2=9+(5-t)^2$

これを解いて，$t=4$

$1+(1-t)^2=r^2$ に代入して，$r^2=10$

よって，求める方程式は,

$\boldsymbol{x^2+(y-4)^2=10}$

問4

点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AP}^2=(x-2)^2+y^2\\\mathrm{BP}^2=x^2+(y-1)^2\end{array}\right\}\cdots①$$

（1）$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=3:2$ より，$2\mathrm{AP}=3\mathrm{BP}$ であるから

$4\mathrm{AP}^2=9\mathrm{BP}^2$

これに①を代入すると

$4\{(x-2)^2+y^2\}=9\{x^2+(y-1)^2\}$

$4(x^2-4x+4+y^2)=9(x^2+y^2-2y+1)$

$5x^2+16x+5y^2-18y-7=0$

$x^2+\dfrac{16}{5}x+y^2-\dfrac{18}{5}y=\dfrac{7}{5}$

$\left(x+\dfrac{8}{5}\right)^2-\dfrac{64}{25}+\left(y-\dfrac{9}{5}\right)^2-\dfrac{81}{25}=\dfrac{7}{5}$

$\left(x+\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{9}{5}\right)^2=\dfrac{180}{25}$

$\left(x+\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{9}{5}\right)^2=\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2$

よって，求める軌跡は,

中心 $\boldsymbol{\left(-\dfrac{8}{5},\ \dfrac{9}{5}\right)}$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{6\sqrt{5}}{5}}$ の円 である．

（2）与式に①を代入すると

$$(x-2)^2+y^2+x^2+(y-1)^2=4$$
$$x^2-4x+4+y^2+x^2+y^2-2y+1=4$$
$$2x^2-4x+2y^2-2y=-1$$
$$x^2-2x+y^2-y=-\frac{1}{2}$$
$$(x-1)^2-1+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$
$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$
$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

よって，求める軌跡は，

中心 $\boldsymbol{\left(1,\ \frac{1}{2}\right)}$ **，半径** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ **の円** である．

問 5

楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$
$$\boldsymbol{\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1}$$

焦点の座標は

$$(\pm\sqrt{7^2-4^2},\ 0)=(\pm\sqrt{33},\ 0)$$
$$\boldsymbol{(\sqrt{33},\ 0),(-\sqrt{33},\ 0)}$$

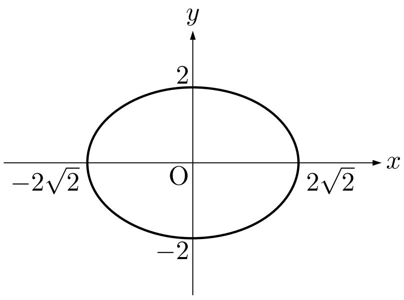
問 6

長軸の長さを $2a$ とすると

$$\sqrt{a^2-2^2}=2$$
$$a^2-4=4$$
$$a^2=8$$

よって，楕円の方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1}$$



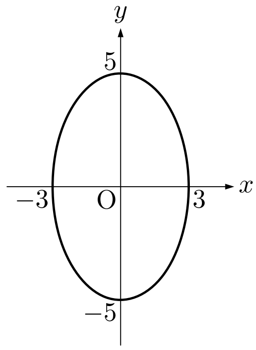
問 7

短軸の長さを $2b$ とすると

$$\sqrt{5^2-b^2}=4$$
$$25-b^2=16$$
$$b^2=9$$

よって，楕円の方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1}$$



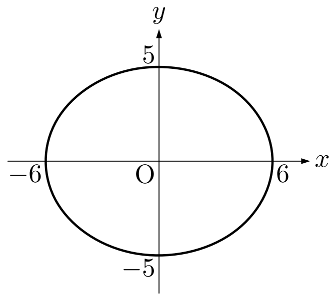
問 8

（1）$\dfrac{x^2}{6^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$ より，焦点の座標は，

$$(\pm\sqrt{6^2-5^2},\ 0)=\boldsymbol{(\pm\sqrt{11},\ 0)}$$

長軸の長さは，$6\cdot 2=\mathbf{12}$

短軸の長さは，$5\cdot 2=\mathbf{10}$



（2）両辺を 4 で割ると

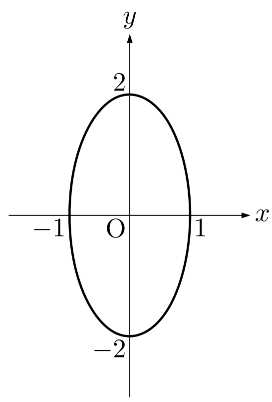
$$x^2+\frac{y^2}{4}=1$$
$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

焦点の座標は，

$$(\pm\sqrt{2^2-1^2},\ 0)=\boldsymbol{(\pm\sqrt{3},\ 0)}$$

長軸の長さは，$2\cdot 2=\mathbf{4}$

短軸の長さは，$1\cdot 2=\mathbf{2}$



（3）両辺を 4 で割ると

$$x^2+\frac{9y^2}{4}=1$$

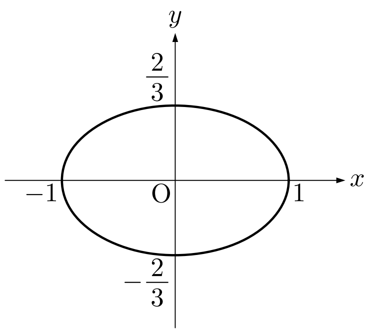
$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1$$

焦点の座標は,

$$\left(\pm\sqrt{1^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2},\ 0\right)=\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3},\ 0\right)$$

長軸の長さは, $1\cdot 2=\mathbf{2}$

短軸の長さは, $\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}$



問 9

$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$ であるから, 焦点の座標は,

$$(\pm\sqrt{3^2+4^2},\ 0)=(\pm 5,\ 0)$$

漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{4}{3}x$$

問 10

$6^2-3^2=27$ より, 双曲線の方程式は,

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$$

漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{\sqrt{27}}{3}x$$

$$y=\pm\sqrt{3}x$$

問 11

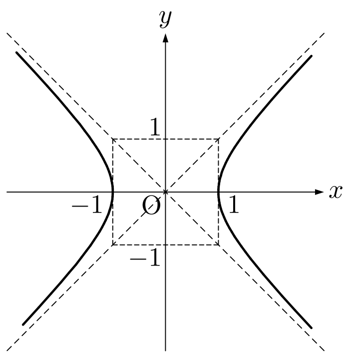
(1) 焦点の座標は,

$$(\pm\sqrt{1+1},\ 0)=(\pm\sqrt{2},\ 0)$$

漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{1}{1}x$$

$$y=\pm x$$

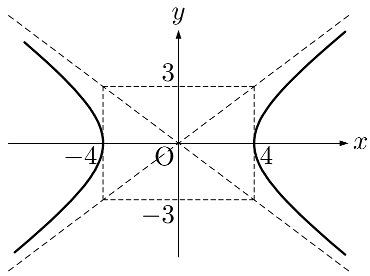


(2) 焦点の座標は,

$$(\pm\sqrt{16+9},\ 0)=(\pm 5,\ 0)$$

漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{3}{4}x$$



(3) 両辺を 4 で割ると

$$x^2-\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$$

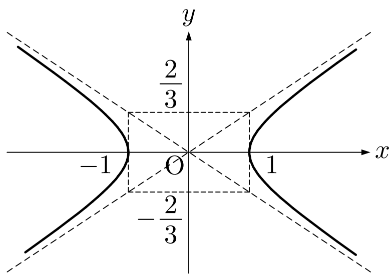
焦点の座標は,

$$\left(\pm\sqrt{1+\frac{4}{9}},\ 0\right)=\left(\pm\frac{\sqrt{13}}{3},\ 0\right)$$

漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{\frac{2}{3}}{1}x$$

$$y=\pm\frac{2}{3}x$$



問 12

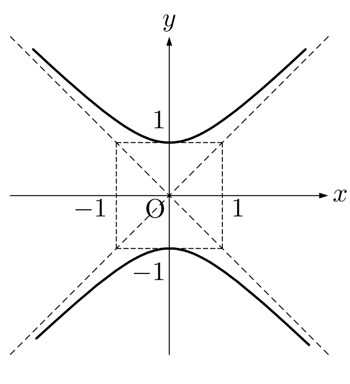
(1) 焦点の座標は,

$$(\pm\sqrt{1+1},\ 0)=(\pm\sqrt{2},\ 0)$$

漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{1}{1}x$$

$$y=\pm x$$

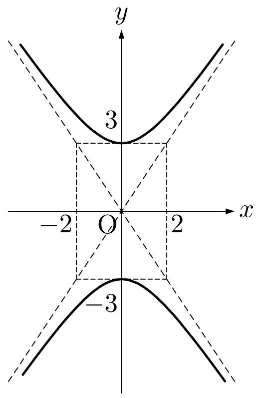


（2）焦点の座標は，

$(\pm\sqrt{4+9},\ 0) = \boldsymbol{(\pm\sqrt{13},\ 0)}$

漸近線の方程式は

$\boldsymbol{y = \pm\frac{3}{2}x}$

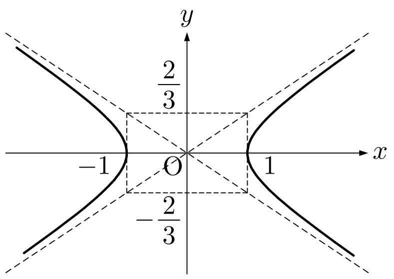


（3）焦点の座標は，

$(\pm\sqrt{16+9},\ 0) = \boldsymbol{(\pm 5,\ 0)}$

漸近線の方程式は

$\boldsymbol{y = \pm\frac{3}{4}x}$

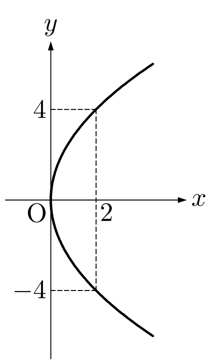


問 13

放物線の方程式は，

$y^2 = 4\cdot 2x$

$\boldsymbol{y^2 = 8x}$



問 14

（1）$y^2 = 4\cdot 4x$ より，

焦点の座標は，$\boldsymbol{(4,\ 0)}$

準線の方程式は，$\boldsymbol{x = -4}$

（2）$y^2 = 4\cdot(-1)x$ より，

焦点の座標は，$\boldsymbol{(-1,\ 0)}$

準線の方程式は，$\boldsymbol{x = 1}$

（3）$x^2 = 4\cdot\frac{1}{4}y$ より，

焦点の座標は，$\boldsymbol{\left(0,\ \frac{1}{4}\right)}$

準線の方程式は，$\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}}$

（4）$x^2 = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)y$ より，

焦点の座標は，$\boldsymbol{\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)}$

準線の方程式は，$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}}$

問 15

$y = -x + k$ より，$x = -y + k$

これを $y^2 = 4x$ に代入して整理すると，

$y^2 = 4(-y + k)$

$y^2 + 4y - 4k = 0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，直線が放物線に接するための条件は，$D = 0$ であるから，

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (-4k)$$

$$= 4 + 4k = 0$$

したがって，$\boldsymbol{k = -1}$

問 16

求める接線の方程式を，$y = 2x + k$ とおく．

$y = 2x + k$ を $x^2 - \frac{y^2}{9} = -1$ に代入して整理すると，

$$x^2 - \frac{(-2x+k)^2}{9} = -1$$

$$9x^2 - (4x^2 - 4kx + k^2) = -9$$

$$5x^2 + 4kx - k^2 + 9 = 0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，直線が双曲線に接するための条件は，$D = 0$ であるから，

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5(-k^2 + 9)$$

$$= 4k^2 + 5k^2 - 45$$

$$= 9k^2 - 45 = 0$$

これより，$k = \pm\sqrt{5}$

したがって，求める接線の方程式は，

$\boldsymbol{y = 2x \pm \sqrt{5}}$

問 17

（1）$\boldsymbol{3x+4y=25}$

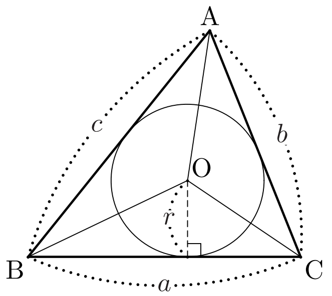
（2）$\boldsymbol{-4x+3y=25}$

（3）$-5x+0\cdot y=25$

$\boldsymbol{x=-5}$

問 18

下の図のように，内心を O とし，O と △ABC の各頂点を結ぶ.



$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OCA}+\triangle\mathrm{OAB}$ であるから,

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

問 19

3 辺の長さが 13，14，15 の三角形の面積を S とすると，$\dfrac{13+14+15}{2}=21$ であるから，ヘロンの公式より，

$$S=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$
$$=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}$$
$$=\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 7^2}$$
$$=84$$

一方，内接円の半径を r とすると，

$$S=\frac{1}{2}(13+14+15)r$$

であるから，

$$\frac{1}{2}(13+14+15)r=84$$

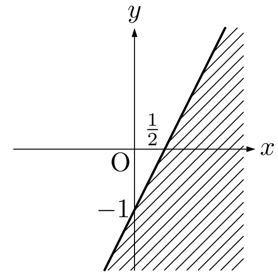
これを解いて，

$$42r=168$$
$$r=4$$

したがって，面積　**84**，半径　**4**

問 20

（1）　求める領域は，直線 $y=2x-1$ の下側の部分である.

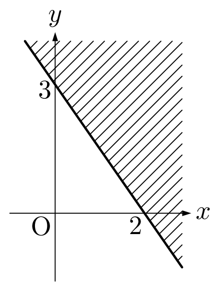


ただし，境界線は含まない.

（2）不等式を変形して，

$$y>-\frac{3}{2}x+3$$

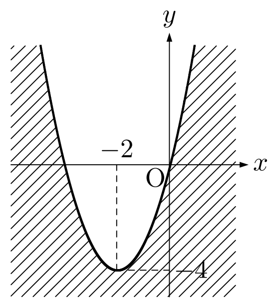
求める領域は，直線 $y=-\dfrac{3}{2}x+3$ の上側の部分である.



ただし，境界線は含まない.

（3）$y<(x+2)^2-4$

求める領域は，放物線 $y=(x+2)^2-4$ の下側である.

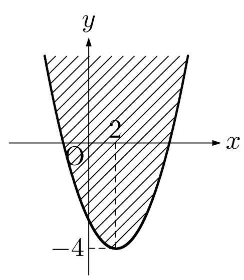


ただし，境界線は含まない.

（4）不等式を変形して，

$$y\geqq x^2-2x-3=(x-1)^2-4$$

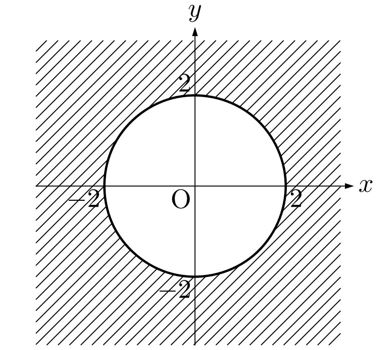
求める領域は，放物線 $y=(x-1)^2-4$ の上側の部分である.



ただし，境界線を含む.

問 21

（1）求める領域は，円 $x^2+y^2=4$ の外部である．

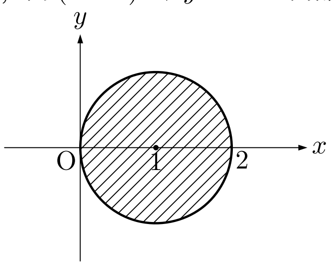


ただし，境界線は含まない．

（2）不等式を変形して，

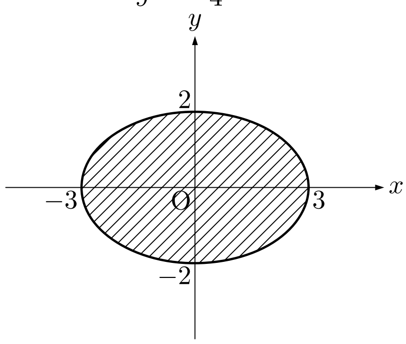
$(x-1)^2+y^2 \leqq 1$

求める領域は，円 $(x-1)^2+y^2=1$ の内部である．



ただし，境界線を含む．

（3）求める領域は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の内部である．

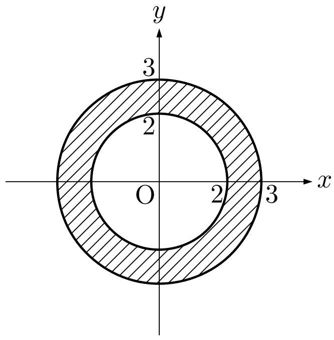


ただし，境界線は含まない．

問 22

（1）　$x^2+y^2>4$ の表す領域は，円 $x^2+y^2=4$ の外部である．また，$x^2+y^2<9$ の表す領域は，円 $x^2+y^2=9$ の内部である．

よって，求める領域は，2 つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である．



ただし，境界線は含まない．

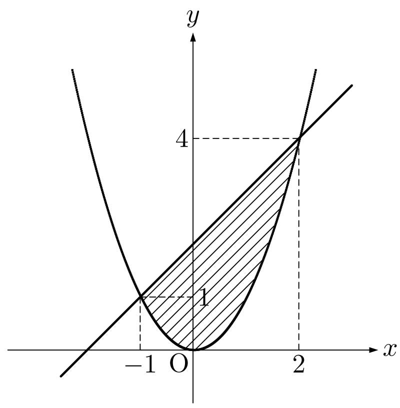
（2）　$x-y+2 \geqq 0$ より，$y \leqq x+2$

これは，直線 $y=x+2$ の下側である．

$x^2-y<0$ より，$y>x^2$

これは，放物線 $y=x^2$ の上側である．

よって，求める領域は，2 つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である．



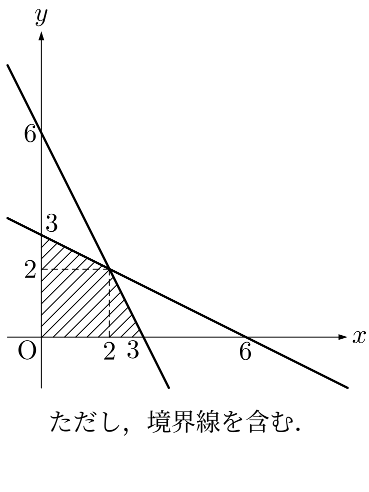
ただし，直線部分の境界線を含み，曲線部分の境界線および交点は含まない．

問 23

$x+2y-6 \leqq 0$ より，$y \leqq -\dfrac{1}{2}x+3$

$2x+y-6 \leqq 0$ より，$y \leqq -2x+6$

2 直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$，$y=-2x+6$ の交点の座標は，$(2,\ 2)$ であるから，4 つの領域の共通部分は，図の斜線部分となる．

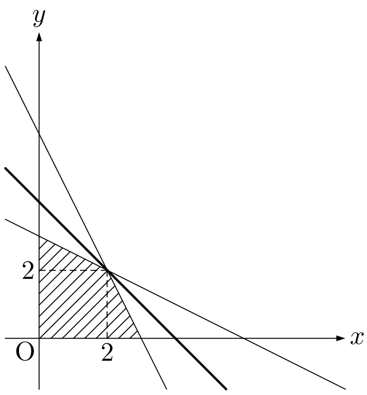


ただし，境界線を含む．

（1）　$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k$

この直線が図の領域と共有点をもち，切片 k の値が最大となるのは，この直線が点 $(2,\ 2)$ を通るときである。

よって，$x=2$, $y=2$ のとき，$x+y$ の値は最大となり，最大値は，$2+2=\mathbf{4}$



（2）　$4x+y=k$ とおくと，$y=-4x+k$

この直線が図の領域と共有点をもち，切片 k の値が最大となるのは，この直線が点 $(3,\ 0)$ を通るときである。

よって，$x=3$, $y=0$ のとき，$4x+y$ の値は最大となり，最大値は，$4\cdot 3+0=\mathbf{12}$